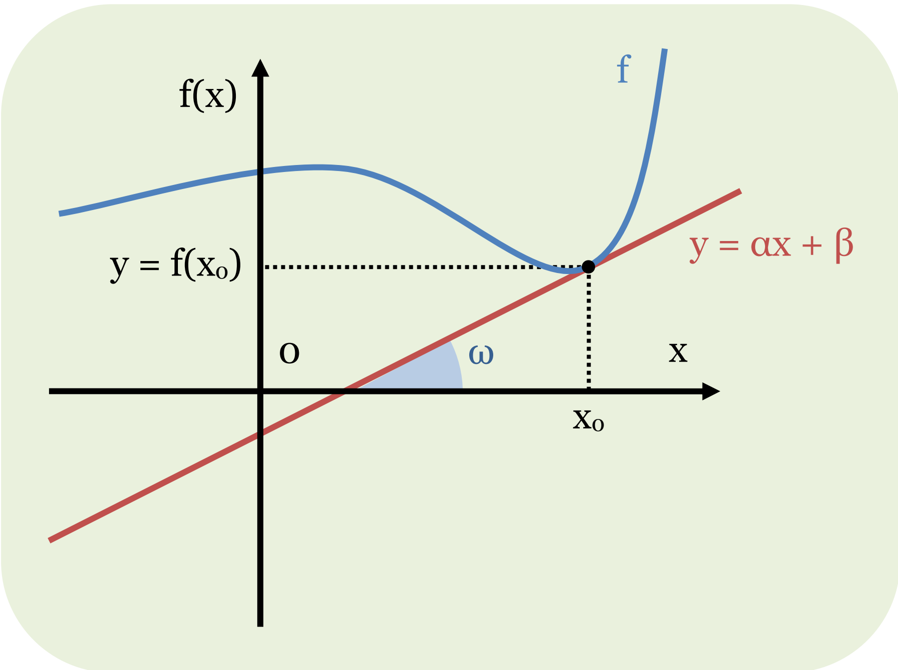
Ευθείες και παράγωγοι

Όταν κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, μπορούμε συχνά να σχεδιάζουμε ευθείες, οι οποίες περνούν «ξυστά» από τη γραφική παράσταση. Με άλλα λόγια, δεν την τέμνουν, αλλά την «ακουμπούν» σε **ένα σημείο** (όπως περίπου μια παραφουσκωμένη μπάλα έρχεται, ίσα-ίσα, σε επαφή με το έδαφος) .

Το σημείο αυτό, το λέμε γενικά x_o και τις ευθείες αυτές **εφαπτομένες** της γραφικής παράστασης και έχουν πολύ μεγάλη σημασία, η οποία δεν είναι κατάλληλη στιγμή να εξηγήσουμε.



Εφόσον όμως μιλάμε πάλι για ευθείες, η εφαπτομένη δεν μπορεί να είναι άλλο πράγμα, απ' όσα κουβεντιάσαμε νωρίτερα. Θα έχει την ίδια συνηθισμένη εξίσωση, δηλαδή : **y = αx + β** . Οπότε, πού είναι το νέο;

Το μαγικό, στην περίπωση αυτή, έχει να κάνει πάλι με την κλίση της ευθείας! Αν στο σημείο x_o , όπου θέλουμε να φέρουμε την εφαπτομένη, η αρχική συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη** (με άλλα λόγια μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγο της στο σημείο αυτό), τότε συμβαίνει το εξής :

- Η κλίση της εφαπτομένη (δηλαδή, το α) είναι ίσο με την παράγωγο της συνάρτησης f στο x_0 ! Δηλαδή :

$$\mathbf{\alpha = f\,'(x_0)}$$

Μαγεία, έτσι;

- Για τις ασκήσεις, είναι σημαντικό να κατανοήσουμε, ότι το σημείο x_0 είναι **κοινό σημείο** των δύο γραμμών. Άρα, σύμφωνα με όσα γράψαμε νωρίτερα, οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν τόσο την εξίσωση της ευθείας, όσο και την εξίσωση της συνάρτησης f ! Δηλαδή, για την εφαπτομένη y = αx + β και τη συνάρτηση f(x) θα ισχύει :

$$\mathbf{y = f(x_0)}$$

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 6x - 11$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο $x_0 = 2$, της γραφικής παράστασης.

Απ' τη στιγμή που γυρεύουμε ευθεία, τούτη θα έχει υποχρεωτικά τη μορφή :

$$y = \alpha x + \beta$$

Επομένως, το μόνο που χρειάζεται είναι να υπολογίσουμε τους αριθμούς α και β .

- Βρίσκουμε την παράγωγο της f :

$$f\,'(x) = (x^2 + 6x - 11)\,' = 2x + 6$$

Υπολογίζουμε την τιμή της στο x_0 , δηλαδή για x = 2 :

$$f\,'(2) = 2\cdot 2 + 6 = 10$$

Μ' άλλα λόγια, υπολογίσαμε το α = 10 κι η ευθεία μας γίνεται προς το παρόν :

$$y = 10x + \beta$$

- Έτσι το μόνο που μένει, τώρα, είναι να υπολογίσουμε και το β . Είπαμε, όμως, ότι το σημείο x_0 είναι κοινό και για τις δυο γραμμές. Υπολογίζουμε, λοιπόν, και την τιμή της αρχικής συνάρτησης στο x_0 , δηλαδή για $x = 2$:

$$f(2) = 2^2 + 6 \cdot 2 - 11 = 4 + 12 - 11 = 5$$

  Άρα, για $x = 2$ βρήκαμε $y = 5$. Αυτό σημαίνει ότι η εφαπτομένη και η συνάρτηση f μοιράζονται το σημείο με συντεταγμένες (2, 5) . Δηλαδή, οι συντεταγμένες του τελευταίου θα επαληθεύουν **και** την εξίσωση της εφαπτομένης, που την έχουμε παρατήσει στη μορφή : $y = 10x + \beta$. Αντικαθιστούμε όπου $x = 2$ και $y = 5$ και λύνουμε την εξίσωση, που προκύπτει, με άγνωστο το β :

$$5 = 10 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow 20 + \beta = 5 \Leftrightarrow \beta = 5 - 20 \Leftrightarrow \beta = -15$$

Φοβερά πράγματα! Τελικά, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y = 10x - 15$$

Με τις περιπτώσεις αυτές, ωστόσο, θ' ασχοληθούμε αναλυτικότερα, στην αντίστοιχη παράγραφο.

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

Λυμένα Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 6x - 11$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο $x_0 = 2$, της γραφικής παράστασης.

Απ' τη στιγμή που γυρεύουμε ευθεία, τούτη θα έχει υποχρεωτικά τη μορφή :

$$\mathbf{y = \alpha x + \beta}$$

Επομένως, το μόνο που χρειάζεται είναι να υπολογίσουμε τους αριθμούς α και β .

- Βρίσκουμε την παράγωγο f' :

$$\mathbf{f'(x)} = (x^2 + 6x - 11)' = \mathbf{2x + 6}$$

Υπολογίζουμε την τιμή της στο x_0 , δηλαδή για $x = 2$:

$$f'(2) = 2 \cdot 2 + 6 = 10$$

Μ' άλλα λόγια, υπολογίσαμε το $\boldsymbol{\alpha = 10}$ κι η ευθεία μας γίνεται προς το παρόν :

$$y = 10x + \beta$$

- Έτσι μένει, τώρα, να υπολογίσουμε και το β . Είπαμε, όμως, ότι το σημείο x_0 είναι **κοινό** και για τις δυο γραμμές. Γι' αυτό, υπολογίζουμε την τιμή της αρχικής συνάρτησης f στο x_0 , δηλαδή για $x = 2$:

$$f(2) = 2^2 + 6 \cdot 2 - 11 = 4 + 12 - 11 = 5$$

Άρα, για $x = 2$ βρήκαμε $y = 5$, που σημαίνει ότι η εφαπτομένη και η συνάρτηση f μοιράζονται το σημείο με συντεταγμένες **(2, 5)** . Δηλαδή, οι συντεταγμένες του τελευταίου θα επαληθεύουν, επίσης, την εξίσωση της εφαπτομένης : $y = 10x + \beta$.

Αντικαθιστούμε όπου x = 2 και y = 5 και λύνουμε την εξίσωση, που προκύπτει, με άγνωστο το β :

$$5 = 10 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow 20 + \beta = 5 \Leftrightarrow \beta = 5 - 20 \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta = -15}$$

Τελικά, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι :

$$\mathbf{y = 10x - 15}$$

Παράδειγμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης, η οποία είναι παράλληλη στον άξονα x΄x .

Κατά τα γνωστά, εφόσον γυρεύουμε ευθεία, γυρεύουμε μια εξίσωση της μορφής :

$$\mathbf{y = \alpha x + \beta}$$

Το πρόβλημα, στις ασκήσεις αυτού του τύπου, είναι πως δε γνωρίζουμε καθόλου το (x_0, y_0) , δηλαδή το σημείο επαφής της εφαπτομένης και της γραφικής παράστασης. Πανικός; Σε καμία περίπτωση!

Εφόσον ζητούμε η εφαπτομένη να είναι **παράλληλη στον x΄x** , θα πρέπει $\boldsymbol{\alpha = 0}$. Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι της μορφής :

$$\mathbf{y = \beta}$$

$$\boldsymbol{\alpha = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0}$$

- Βρίσκουμε την παράγωγο της f :

$$\mathbf{f'(x)} = (3x^2 - 6x + 1)' = \mathbf{6x - 6}$$

η οποία στο x_0 γίνεται :

$$f'(x_0) = 6x_0 - 6$$

Τα 'παμε και τα κουβεντιάσαμε, πως πρέπει α = 0 , όμως α = f'(x_0) κι επομένως λύνουμε την αντίστοιχη εξίσωση :

$α = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 6x_0 - 6 = 0 \Leftrightarrow 6x_0 = 6 \Leftrightarrow \mathbf{x_0 = 1}$

Αν δεν το καταλάβατε ακόμα, βρήκαμε το σημείο επαφής (την τετμημένη του)!

- Μένει, τώρα, να υπολογίσουμε το β . Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, για $x_0 = 1$ έχουμε :

$$f(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 1 = 4 - 6 = -2$$

Επομένως, το σημείο επαφής είναι το **(1, −2)** . Μα αντικατάσταση στη y = β έχουμε **β = 1** . Τελικά, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι :

$$\mathbf{y = 1}$$

Παράδειγμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης, η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία y = 2x − 3 .

Ζητούμε και πάλι ευθεία, άρα εξίσωση της μορφής :

$$\mathbf{y = αx + β}$$

Γνωρίζουμε πως οι παράλληλες ευθείες έχουν τον **ίδιο συντελεστή διεύθυνσης**, δηλαδή το ίδιο α . Εφόσον η εφαπτομένη που ζητούμε είναι παράλληλη στην ευθεία y = 2x − 3 , τότε θα είναι :

$$\mathbf{α = 2}$$

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι της μορφής :

$$y = 2x + β$$

- Βρίσκουμε την παράγωγο της f :

$$\mathbf{f'(x)} = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)' = \mathbf{x^2 - x}$$

Επειδή α = 2 απαιτούμε και η παράγωγος στο x_0 να ισούται με 2 και λύνουμε την αντίστοιχη εξίσωση :

$\alpha = 2 \Leftrightarrow f'(x_0) = 2 \Leftrightarrow x_0^2 - x_0 = 2 \Leftrightarrow x_0^2 - x_0 - 2 = 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_1 = 2 \,,\, x_2 = -1$

Δηλαδή, στην περίπτωση αυτή, έχουμε δύο δυνατά σημεία επαφής, συνεπώς και δύο δυνατές εφαπτομένες! Έχει λίγο κόπο, αλλά οφείλουμε να εξετάσουμε την καθεμία ξεχωριστά.

- Για $\mathbf{x_1 = 2}$ έχουμε :

$f(2) = \frac{1}{3}\cdot 2^3 - \frac{1}{2}\cdot 2^2 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$

δηλαδή, το σημείο επαφής είναι το $\left(2, \frac{2}{3}\right)$. Με αντικατάσταση, στην εξίσωση της ευθείας έχουμε :

$y = x + \beta \Leftrightarrow \frac{2}{3} = 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{2}{3} - 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta = -\frac{4}{3}}$

Επομένως, η εξίσωση της πρώτης εφαπτομένης θα είναι :

$$\mathbf{y = 2x - \frac{4}{3}}$$

- Για $\mathbf{x_1 = -1}$ έχουμε :

$f(-1) = \frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{1}{2}\cdot(-1)^2 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{6} - \frac{3}{6} = -\frac{5}{6}$

δηλαδή, το σημείο επαφής είναι το $\left(-1, -\frac{5}{6}\right)$. Με αντικατάσταση, στην εξίσωση της ευθείας έχουμε :

$$y = x + \beta \Leftrightarrow -\frac{5}{6} = -1 + \beta \Leftrightarrow \beta = -\frac{5}{6} + 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta = \frac{1}{6}}$$

Επομένως, η εξίσωση της μίας εφαπτομένης θα είναι :

$$\mathbf{y = 2x + \frac{1}{6}}$$

Παράδειγμα 4

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = x ² + x + 1 . Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f , η οποία διέρχεται απ' το σημείο Ο (0, 0) .

Παρατηρούμε ότι το σημείο (0, 0) δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της f , καθώς οι συντεταγμένες του δεν επαληθεύουν τον τύπο της συνάρτησης :

$$f(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1 \neq 0$$

Έχει καταντήσει αηδία, όμως και πάλι ευθεία ψάχνουμε. Επειδή, όμως, το (0, 0) είναι η αρχή των αξόνων, τότε η εφαπτομένη θα έχει την απλούστερη μορφή :

$$\mathbf{y = \alpha x}$$

Έστω **Α (x_0, y_0)** το σημείο τομής της εφαπτομένης και της C_f .

- Βρίσκουμε την παράγωγο της f :

$$\mathbf{f'(x)} = (x^2 + x + 1)' = \mathbf{2x + 1}$$

Για $x = x_0$, δε βρίσκουμε ακριβώς ένα συγκεκριμένο νούμερο, για το α, βρίσκουμε όμως μια χρήσιμη σχέση :

$$\boldsymbol{\alpha} = f'(x_0) = \mathbf{2x_0 + 1}$$

- Εφόσον, το σημείο Α (x_o, y_o) είναι κοινό και για τις δυο γραμμές, θα είναι :

  - $f(x_o) = x_o^{\,2} + x_o + 1 \Leftrightarrow y_o = \underline{x_o^{\,2} + x_o + 1}$ (1)

  κι επίσης :

  - $y_o = \alpha x_o$

  Η τελευταία, επειδή λίγο πριν βρήκαμε πως $\alpha = 2x_o + 1$, με απλή αντικατάσταση και πράξεις, γίνεται :

  - $y_o = \alpha x_o \Leftrightarrow y_o = (2x_o + 1)x_o \Leftrightarrow y_o = \underline{2x_o^{\,2} + x_o}$ (2)

  Οι σχέσεις (1) και (2) πρέπει να είναι ίσες, εφόσον το σημείο είναι κοινό :

  $(1) = (2) \Rightarrow$

  $x_o^{\,2} + x_o + 1 = 2x_o^{\,2} + x_o \Leftrightarrow x_o^{\,2} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{x_o = 1}$ ή $\mathbf{x_o = -1}$

  Για κάθε περίπτωση έχουμε :

- Για $\mathbf{x_o = 1}$ έχουμε :

  $\alpha = f'(1) = 2\cdot 1 + 1 = 3$

  Με αντικατάσταση, στην εξίσωση της ευθείας, όπου $\alpha = 3$ έχουμε:

  $$\mathbf{y = 3x}$$

- Για $\mathbf{x_o = -1}$ έχουμε :

  $\alpha = f'(-1) = 2\cdot(-1) + 1 = -1$

  Με αντικατάσταση, στην εξίσωση της ευθείας, όπου $\alpha = 3$ έχουμε:

  $$\mathbf{y = -x}$$

Παράδειγμα 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 + x - 1$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f , η οποία διέρχεται απ' το σημείο Κ (−1, −2) .

Παρατηρούμε ότι το σημείο (−1, −2) δεν ανήκει στη C_f , καθώς οι συντεταγμένες του δεν επαληθεύουν την εξίσωση της f :

$$f(0) = 2\cdot(-1)^2 - 1 - 1 = 0 \neq -2$$

Φυσικά, γυρεύουμε και πάλι ευθεία, δηλαδή :

$$\mathbf{y = \alpha x + \beta}$$

Το πρόβλημα αυτό, είναι το δυσκολότερο απ' όσα δουλέψαμε, καθώς δεν έχουμε την παραμικρή πληροφορία ούτε για την κλίση α , ούτε για το σημείο επαφής. Πάμε με υπομονή και πείσμα.

Έστω **Α (x_o, y_o)** το σημείο τομής της εφαπτομένης και της C_f .

- Βρίσκουμε, όπως πάντα, την παράγωγο της f :

  $$\mathbf{f'(x)} = (2x^2 + x - 1)' = \mathbf{4x + 1}$$

  Για $x = x_o$, βρίσκουμε μια σχέση για το α :

  $$\boldsymbol{\alpha} = f'(x_o) = \mathbf{4x_o + 1}$$

- Εφόσον, το σημείο Α (x_o, y_o) είναι κοινό και για τις δυο γραμμές, θα είναι :

  - $f(x_o) = 2x_o^2 + x_o - 1 \Leftrightarrow y_o = \underline{2x_o^2 + x_o - 1}$ (1)

  κι επίσης (με αντικατάσταση του α, όπως στο παράδ. 4) :

  - $y_o = \alpha x_o + \beta \Leftrightarrow y_o = (4x_o + 1)x_o + \beta \Leftrightarrow y_o = \underline{4x_o^2 + x_o + \beta}$ (2)

  $(1) = (2) \Rightarrow$

  $2x_o^2 + x_o - 1 = 4x_o^2 + x_o + \beta \Leftrightarrow$

$\beta = 2x_0{}^2 - 4x_0{}^2 + x_0 - x_0 \;\Leftrightarrow$

$\boldsymbol{\beta = -\,2x_0{}^2}$

- Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη διέρχεται απ' το **(−2, −2)** , επομένως, με αντικατάσταση $x = -2$, $y = -2$ στην εξίσωση της ευθείας έχουμε :

  $y = \alpha x + \beta \;\Leftrightarrow\; -2 = \alpha(-2) + \beta \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{-2\,\alpha + \beta = -2}$

  Αντικαθιστούμε τις παραστάσεις των α, β , που βρήκαμε νωρίτερα κι έχουμε μια εξίσωση με μοναδικό άγνωστο το x_0 :

  $-2\,(4x_0 + 1) - 2x_0{}^2 = -2 \;\Leftrightarrow\; -\,8x_0 - 2 - 2x_0{}^2 + 2 = 0 \;\Leftrightarrow$

  $-\,2x_0{}^2 - 8x_0 = 0 \;\Leftrightarrow\; -\,2x_0\,(x_0 + 4) = 0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x_0 = 0}$ ή $\boldsymbol{x_0 = -4}$

  Όπως και πριν, εξετάζουμε την κάθε περίπτωση ξεχωριστά. Έχουμε, δηλαδή, δύο δυνατές εφαπτομένες :

- Για $\boldsymbol{x_0 = 0}$ έχουμε :

  $\boldsymbol{\alpha} = 4x_0 + 1 = 4{\cdot}0 + 1 = 1$

  $\boldsymbol{\beta} = -\,2x_0{}^2 = -2{\cdot}0^2 = 0$

  Με αντικατάσταση στην εξίσωση της ευθείας :

  $$\mathbf{y = x}$$

- Για $\boldsymbol{x_1 = -4}$ έχουμε :

  $\boldsymbol{\alpha} = 4x_0 + 1 = 4{\cdot}(-4) + 1 = -15$

  $\boldsymbol{\beta} = -\,2x_0{}^2 = -2{\cdot}(-4)^2 = -32$

  Με αντικατάσταση στην εξίσωση της ευθείας :

  $$\mathbf{y = -15x - 32}$$

Ασκήσεις

- I -

1. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης f με f(x) = $x^2 + 5x + 6$ στο σημείο $x_0 = 2$.

2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1$ στο σημείο $x_0 = -1$.

3. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ στο σημείο $x_0 = \frac{1}{2}$.

4. Να βρεθεί η εξίσωση των εφαπτομένων της συνάρτησης $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$ στα σημεία τομής της με τους άξονες x΄x και y΄y .

5. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ με $x \neq 0$ στο σημείο τομής της, με τη $g(x) = -3x + 9$.

6. Να βρεθεί η εφαπτομένη της $f(x) = \sqrt{2x-2}$ στο σημείο της γραφικής παράστασης με τετμημένη 3 .

7. Να βρεθεί η εφαπτομένη της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 - 5x$ στο σημείο x = 1 και να δείξετε ότι εφάπτεται, επίσης, στην $h(x) = -x^2 + 9x - 20$ στο σημείο x = 4 .

8. Να βρεθεί η εφαπτομένη της $f(x) = -x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 8$ στο σημείο $x_0 = 2$. Να δείξετε ότι εφάπτεται, επίσης, στη γραφική παράσταση της $g(x) = x^2 - 4x + 3$.

- II -

9. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης f με f(x) = $2x^2 - 3x - 2$ η οποία είναι παράλληλη στον x΄x .

10. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x$, η οποία σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία $\omega = 45^{o}$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 9$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -3x + 2$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 1$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης , η οποία είναι κάθετη στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x - 7$.

13. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $f(x) = x^2 - 2x + 4$, η οποία διέρχεται απ' την αρχή των αξόνων .

14. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$, η οποία διέρχεται απ' το σημείο Α $(2, -2)$.

15. Να βρεθεί η εφαπτομένη της $f(x) = \sqrt{2}\,x^2 - \sqrt{2}\,x + 1$, η οποία διέρχεται απ' το σημείο Α $(\sqrt{2}, 3)$.