Δ Ι Α Φ Ο Ρ Ι Κ Ο Σ Λ Ο Γ Ι Σ Μ Ο Σ
Προβλήματα

1. Προβλήματα Ρυθμού Μεταβολής

Ένα μονάχα πράγμα χρειάζεται να θυμόμαστε, σε αυτή την περίπτωση:

ρυθμός μεταβολής = παράγωγος
(ενός μεγέθους)

Παρατηρήσεις

- Προσέχουμε γιατί, συνήθως, οι συναρτήσεις που περιγράφουν τα μεγέθη στα περισσότερα προβλήματα είναι **σύνθετες**.
- Στα περισσότερα προβλήματα, αυτού του τύπου, η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος **t** και όχι το **x** , όπως έχουμε συνήθισει.
- Προσέχουμε σε τι μονάδες είναι εκφρασμένος ο χρόνος! Σε άλλα προβλήματα είναι sec, σε άλλα min, μέρες, βδομάδες, μήνες, έτη κ.ο.κ.
- Εκφράσεις όπως «αρχικά», «αρχή πειράματος», «αρχική μέτρηση», «ξεκίνημα», «έναρξη», κ.τ.λ υποννοούν ότι ο χρόνος δεν έχει ξεκινήσει ακόμη να μετράει, οπότε θέτουμε **t = 0** , στην αντίστοιχη συνάρτηση.

Παράδειγμα

Ο αριθμός των μελών ενός γυμναστηρίου, που άνοιξε πριν από μερικά χρόνια, δίνεται κατά προσέγγιση από την συνάρτηση:

$$N(t) = 100(64 + 4t)^{\frac{2}{3}} \ , \quad \text{με } 0 \le t \le 52$$

όπου N είναι ο αριθμός των μελών, στην αρχή μιας εβδομάδας t . Πώς αυξανόταν ο αριθμός νέων μελών αρχικά και πώς στην αρχή της 40ης εβδομάδας; Ποιος ο αριθμός των μελών τις δύο αυτές χρονικές στιγμές;

Απάντηση

Αντιλαμβανόμαστε αμέσως τις παρακάτω σημασίες:

«πώς αυξανόταν» $\rightarrow$ ρυθμός μεταβολής
«αρχικά» $\rightarrow$ για $t = 0$

Συνεπώς, υπολογίζουμε την (σύνθετη) παράγωγο $N'(t)$:

$$\mathbf{N'(t)} = \left(100(64+4t)^{\frac{2}{3}}\right)' = 100\left((64+4t)^{\frac{2}{3}}\right)' = 100\cdot\frac{2}{3}(64+4t)^{\frac{2}{3}-1}\cdot(64+4t)' =$$

$$\frac{200}{3}(64+4t)^{-\frac{1}{3}}\cdot 4 = \mathbf{\frac{800}{3}(64+4t)^{-\frac{1}{3}}}$$

Άρα, ο ρυθμός μεταβολής των μελών «αρχικά» υπολογίζεται για **t = 0** :

$$N'(0) = \frac{800}{3}(64+4\cdot 0)^{-\frac{1}{3}} = \frac{800}{3}\cdot 64^{-\frac{1}{3}} = \frac{800}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{800}{3}\cdot\frac{1}{4} \cong 66{,}7 \text{ μέλη}$$

Ομοίως, για **t = 40** :

$$N'(40) = \frac{800}{3}(64+4\cdot 40)^{-\frac{1}{3}} = \frac{800}{3}\cdot 224^{-\frac{1}{3}} = \frac{800}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{224}} \cong \frac{800}{3}\cdot\frac{1}{6{,}1} \cong 43{,}7 \text{ μέλη}$$

Επειδή μας ζητείται, επιπλέον, και ο ακριβής αριθμός των μελών, τις δύο αυτές χρονικές στιγμές (και όχι ρυθμός μεταβολής), τότε εργαζόμαστε με την αρχική συνάρτηση:

$$N(0) = 100(64+4\cdot 0)^{\frac{2}{3}} = 100\cdot 64^{\frac{2}{3}} = 100\cdot\sqrt[3]{64^2} = 100\cdot\sqrt[3]{4096} = 100\cdot 16 = 1600 \quad \text{και}$$

$$N(40) = 100(64+4\cdot 40)^{\frac{2}{3}} = 100\cdot 224^{\frac{2}{3}} = 100\cdot\sqrt[3]{224^2} = 100\cdot\sqrt[3]{50175} \cong 100\cdot 36{,}9 =$$

$$= 3690$$

2. Προβλήματα Θέσης, Ταχύτητας, Επιτάχυνσης

Δε χρειάζονται πολύπλοκες γνώσεις Φυσικής, για τα προβλήματα αυτού του είδους. Αρκεί να γνωρίζουμε τις παρακάτω σχέσεις:

Συνάρτηση - **Θέσης** : **x(t)**

Συνάρτηση - **Ταχύτητας** : **v(t) = x΄(t)**

Συνάρτηση - **Επιτάχυνσης** : **α(t) = v΄(t)** ή **α(t) = x΄΄(t)**

Παρατηρήσεις

- Αυτό που εκφράζουν οι παραπάνω σχέσεις είναι πως όταν, συνήθως, μας δίνουν μια συνάρτηση που εκφράζει τη **θέση** ενός κινητού, τότε:
  - για να βρούμε την **ταχύτητά** του βρίσκουμε την **1η παράγωγο**.
  - για να βρούμε την **επιτάχυνσή** του βρίσκουμε τη **2η παράγωγο**.
- Η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι, σε κάθε περίπτωση, ο χρόνος **t** .

Η κακιά στιγμή ...

- Πολλές φορές στο ζητούμενο προστίθεται η έκφραση «**στιγμιαία**». Στην περίπτωση αυτή, ζητείται απλά η τιμή μιας συνάρτησης σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 . Άρα, κάνουμε απλή αντικατάσταση. Πχ. Να βρεθεί η στιγμιαία ταχύτητα μετά από 2 sec : με απλά λόγια $t = 2$, άρα υπολογίζουμε το $v(2)$.

Εν αρχή ην ...

- Για το χρόνο, ισχύουν όσα περιγράψαμε στο πρώτο είδος προβλημάτων. Αν πχ. ζητείται η «**αρχική ταχύτητα**», «**αρχική θέση**», κ.τ.λ. υποννοείται ότι ο χρόνος δεν έχει ξεκινήσει να μετράει ακόμη, άρα θέτουμε $\mathbf{t = 0}$.

Αραλίκι ...

- Συχνά, μας ζητούν να βρούμε πότε (= τις χρονικές στιγμές που) ένα κινητό είναι... ακίνητο. Όταν κάτι δεν κινείται, όμως, σημαίνει πως δεν έχει καθόλου ταχύτητα. Άρα, χρειάζεται απλά να λύσουμε την εξίσωση:

$$\mathbf{v(t) = 0}$$

Μπρος-πίσω ...

- Άλλοτε, πάλι, μας ζητούν να βρούμε πότε (= τις χρονικές στιγμές που) ένα κινητό κινείται αντίστροφα. Αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα, στην περίπτωση αυτή, είναι αρνητική. Επειδή γνωρίζουμε ότι $\mathbf{v(t) = x'(t)}$, κατασκευάζουμε απλά τον πίνακα προσήμων της παραγώγου, όπως ακριβώς έχουμε συνηθίσει από τις ασκήσεις μονοτονίας.

Παρ' το αλλιώς ...

- Αν μας δίνεται η συνάρτηση της ταχύτητας και μας ζητείται εκείνη της θέσης, είναι σα να μας δίνεται η παράγωγος και μας ζητείται η αρχικής συνάρτηση. Με άλλα λόγια, υπολογίζουμε απλά την **παράγουσα.**

Παράδειγμα

Ένα αυτοκίνητο διανύει απόσταση S (σε m), στα t πρώτα δευτερόλεπτα της εκκίνησής του, ίση με:

$$S(t) = \frac{5}{3}t^3 - 10t^2 + 21t + 3 \ , \quad 0 \le t \le 6$$

α. Να βρείτε την αρχική ταχύτητα του αυτοκινήτου.

β. Να βρείτε την απόσταση που θα έχει διανύσει μετά από 3 sec, καθώς και της στιγμιαία του ταχύτητα την χρονική στιγμή αυτή.

γ. Να βρείτε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου, καθώς και τις χρονικές στιγμές που το αυτοκίνητο επιταχύνει ή επιβραδύνει, αντίστοιχα.

Απάντηση

α. Η παράγωγος της συνάρτησης $S(t)$ μας δίνει την ταχύτητα $v(t)$, δηλαδή:

$$v(t) = S'(t) = \left(\frac{5}{3}t^3 - 10t^2 + 21t + 3\right)' = \frac{5}{3}3t^2 - 20t + 21 = 5t^2 - 20t + 21$$

Επειδή μας ζητείται η αρχική ταχύτητα, θέτουμε **t = 0** , άρα:

$$v(t) = 5\cdot 0^2 - 20\cdot 0 + 21 = 21 \text{ m/sec}$$

β. Για **t = 3** , η αρχική συνάρτηση δίνει:

$$S(3) = \frac{5}{3}3^3 - 10\cdot 3^2 + 21\cdot 3 + 3 = 45 - 90 + 63 = 18 \text{ m}$$

Η στιγμιαία ταχύτητα, για t = 3, γίνεται:

$$v(5) = 5\cdot 3^2 - 20\cdot 3 + 21 = 45 - 60 + 21 = 6 \text{ m/sec}$$

γ. Η παράγωγος της ταχύτητας v(t) μας δίνει την επιτάχυνση α(t) , δηλαδή:

$$\alpha(t) = v'(t) = \left(5t^2 - 20t + 21\right)' = 10t - 20$$

Φτιάχνουμε πίνακα προσήμων: $10t - 20 = 0 \Leftrightarrow 10t = 20 \Leftrightarrow t = 2$ sec

t	0		2		6
10t – 20		–	0	+	

Άρα, στο χρονικό διάστημα [0, 2] το αυτοκίνητο επιβραδύνει, ενώ στο διάστημα [2, 6] επιταχύνει.

3. Προβλήματα Κόστους, Εσόδων, Κέρδους

Οι οικονομικές γνώσεις, που χρειάζονται για τα προβλήματα αυτού του τύπου, είναι επιπέδου κουμπαρά. Αν συμβολίσουμε ως:

συνάρτηση - **Κόστους** : **K(x)**
συνάρτηση - **Εσόδων** : **E(x)**
συνάρτηση - **Κέρδους** : **P(x)**

με x = (συνήθως) αριθμός προϊόντων

τότε:

$$\boxed{\mathbf{P(x) = E(x) - K(x)}}$$

Με άλλα λόγια, κέρδος είναι αυτό που απομένει αν από τα έσοδα αφαιρέσουμε το κόστος παρασκευής.

Μέσα Μεγέθη

Κάποιες φορές, μας ζητούνται οι αντίστοιχες μέσες τιμές, δηλαδή:

Μέσο Κόστος, Μέσα Έσοδα, Μέσο Κέρδος.

Τότε οι αντίστοιχες συναρτήσεις έχουν ως εξής:

$$\boxed{\overline{\mathbf{K(x)}} = \frac{\mathbf{K(x)}}{\mathbf{x}},\quad \overline{\mathbf{E(x)}} = \frac{\mathbf{E(x)}}{\mathbf{x}},\quad \overline{\mathbf{P(x)}} = \frac{\mathbf{P(x)}}{\mathbf{x}}}$$

Παρατηρήσεις

Αυτό που κάνουν οι πονηροί ασκησογράφοι είναι να μας κωδικοποιούν στην «οικονομική γλώσσα» πράγματα, τα οποία παίζουμε στα δάχτυλα από τις ασκήσεις μονοτονίας και ακροτάτων. Πιο συγκεκριμένα:

- Αν ζητείται ο ρυθμός μεταβολής κάποιου μεγέθους (κόστους, εσόδων, κέρδους) τότε βρίσκουμε απλά την παράγωγο.
- Αν ζητείται να βρούμε την παραγωγή για την οποία κάποιο μέγεθος αυξάνει ή μειώνεται, τότε υπολογίζουμε απλά τη μονοτονία του. Αν η μονοτονία είναι γνησίως αύξουσα, προφανώς, το μέγεθος αυξάνεται. Αν είναι γνησίως φθίνουσα μειώνεται.
- Αν ζητείται να υπολογίσουμε τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή κάποιου μεγέθος (πχ. μέγιστο κέρδος, ελάχιστο κέρδος, κ.τ.λ) τότε αναζητούμε τα ακρότατα της αντίστοιχης συνάρτησης (πχ. τοπικό μέγιστο, τοπικό ελάχιστο).
- Κάποιες φορές, μας δίνεται η συνάρτηση για την παραγωγή **ενός μόνο** προϊόντος. Τότε, για τη συνολική παραγωγή (για x προϊόντα), οι αντίστοιχες συναρτήσεις θα είναι: $\mathbf{x \cdot K(x)}$, $\mathbf{x \cdot E(x)}$, $\mathbf{x \cdot P(x)}$.

Παράδειγμα

Μια βιομηχανία υπολόγισε ότι η σχέση μεταξύ της τιμής T ενός νέου προϊόντος και της ζητούμενης ποσότητας x του προϊόντος αυτού δίνεται από τη συνάρτηση:

$T(x) = -0{,}2x + 4000$ €, για παραγωγή $0 \le x \le 10.000$

α. Να βρεθεί η συνάρτηση E(x) των εσόδων της βιομηχανίας.

β. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης εσόδων.

γ. Αν το κόστος για την παραγωγή x μονάδων δίνεται από τη συνάρτηση:

$$K(x) = 950x + 250.000 \text{ €}$$

να προσδιορίσετε τη συνάρτηση κέρδους P(x).

δ. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολή του μέσου κέρδους.

ε. Να βρείτε το κέρδος από την παραγωγή 1000 μονάδων προϊόντος.

Απάντηση

α. Αφού T(x) είναι η τιμή ενός προϊόντος, άρα η τιμή των x προϊόντων θα είναι $x \cdot T(x)$. Άρα, η συνάρτηση εσόδων θα είναι:

$$\mathbf{E(x)} = x \cdot T(x) = x \cdot (-0{,}2x + 4000) = \mathbf{-0{,}2x^2 + 4000x}$$

β. Ο ρυθμός μεταβολής είναι απλά η παράγωγος, συνεπώς:

$$E'(x) = (-0{,}2x^2 + 4000x)' = -0{,}4x + 4000$$

γ. Γνωρίζουμε ότι $P(x) = E(x) - K(x)$, συνεπώς:

$$\mathbf{P(x)} = -0{,}2x^2 + 4000x - (950x + 250.000) =$$

$$= -0{,}2x^2 + 4000x - 950x - 250.000 = \mathbf{-0{,}2x^2 + 3050x - 250.000}$$

δ. Το μέσο κέρδος δίνεται από τη σχέση $\frac{P(x)}{x}$, άρα:

$$\overline{\mathbf{P(x)}} = \frac{-0{,}2x^2 + 3050x - 250000}{x} = \frac{-0{,}2x^2}{x} + \frac{3050x}{x} - \frac{250000}{x} =$$

$$= \mathbf{-0{,}2x + 3050 - \frac{250000}{x}}$$

Συνεπώς, ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κέρδους θα είναι η παράγωγός του:

$$\left(-0{,}2x + 3050 - \frac{250000}{x}\right)' = -0{,}2 + \frac{250000}{x^2}$$

ε. Η συνάρτηση P(x) για x = 1000 γίνεται:

$P(1000) = -0{,}2 \cdot 1000^2 + 3050 \cdot 1000 - 250.000 =$

$= -200.000 + 3.050.000 - 250.000 = 2.600.000$ €

4. Και μερικές ασκήσεις ...

1. Το ύψος (σε m) που βρίσκεται ένα τηλεκατευθυνόμενο μοντέλο αεροπλάνου, μετά από χρόνο πτήσης t (sec) δίνεται απο την συνάρτηση $f(t) = -3t^2 + 30t$, με $0 \le t \le 10$.

α. Σε ποιο ύψος βρίσκεται το αεροπλάνο αρχικά ;

β. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του ύψους του αερολπλάνου μετά από χρόνο t.

γ. Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το αεροπλάνο ανεβαίνει, καθώς και το χρονικό διάστημα κατά το οποίο κατεβαίνει.

δ. Να βρείτε την χρονική στιγμή t κατά την οποία το αεροπλάνο βρίσκεται στο μέγιστο ύψος, καθώς και το ύψος αυτό.

[2003]

2. Το άθροισμα του μήκους και του πλάτους ενός οικοπέδου σχήματος ορθογωνίου παραλληλόγραμμου, είναι 200 μέτρα. Αν το μήκος του είναι x μέτρα :

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $E(x) = -x^2 + 200x$.

β. Για ποιά τιμή του x το εμβαδό του οικοπέδου γίνεται μέγιστο ;

γ. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του οικοπέδου.

[2004]

3. Μια ομάδα βιολόγων προτείνει να ληφθούν μέτρα για τη διάσωση ενός είδους δελφινιών. Μετά την εφαρμογή των μέτρων εκτιμάται ότι ο αριθμός των δελφινιών εκφράζεται από τη συνάρτηση $N(t) = 2t^3 - t^2 + 5t + 1000$, $0 \le t \le 10$, όπου t ο χρόνος σε έτη.

α. Πόσα δελφίνια υπάρχουν κατά την έναρξη εφαρμογής των μέτρων;

β. Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών.

γ. Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών το δεύτερο έτος.

δ. Πόσα δελφίνια θα υπάρχουν σε δέκα (10) έτη;

[2005]

4. Ένα μικρό ναυπηγείο έχει τη δυνατότητα να κατασκευάζει κατ' έτος μέχρι και είκοσι (20) σκάφη ενός συγκεκριμένου τύπου. Το κόστος κατασκευής (σε χιλιάδες €) x σκαφών εκφράζεται με τη συνάρτηση $K(x) = 4x^2 + 30$ και τα έσοδα από τις πωλήσεις τους (σε χιλιάδες €) με τη συνάρτηση $E(x) = 3x^2 + 20x$.

α. Να βρεθεί το κόστος κατασκευής πέντε (5) σκαφών.

β. Να βρεθεί ο τύπος P(x) της συνάρτησης του κέρδους του ναυπηγείου.

γ. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους.

δ. Πόσα σκάφη πρέπει να κατασκευάζει το ναυπηγείο κατ' έτος για να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος ;

[2005 - Εσπερινά]

5. Μια βιοτεχνία, μεταξύ άλλων, κατασκευάζει κεραμικά πλακίδια σε σχήμα τριγώνου. Σε κάθε πλακίδιο το άθροισμα της βάσης x και του ύψους που αντιστοιχεί στη βάση αυτή είναι σταθερό και ισούται με 50 cm.

α. Να δείξετε ότι το εμβαδό Ε της επιφάνειας κάθε τριγωνικού πλακιδίου δίνεται συναρτήσει του x από τον τύπο: $E(x) = \frac{1}{2}x(50 - x)$, $0 < x < 50$.

β. Για ποια τιμή του x το εμβαδό E(x) γίνεται μέγιστο ;

γ. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του E(x).

[2006]

6. Το ύψος ενός πυραύλου (σε m) μετά από t sec πτήσης, δίνεται από τη συνάρτηση: $f(t) = -\frac{1}{6}t^3 + 8t^2 + \frac{33}{2}t + 5$, $t \geq 0$. Να εξετάσετε πότε ο πύραυλος αυτός ανεβαίνει και πότε κατεβαίνει, καθώς και το μέγιστο ύψος.

7. Το πλήθος των εγκλημάτων τα τελευταία 10 χρόνια, σε μία πόλη (2004 - 2014), δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση: $f(t) = 0{,}03t^3 + \frac{368{,}64}{t}$ (σε δεκάδες εγκλήματα) , $0 < t \leq 10$. Να εξετάσετε ποια χρονιά είχαμε την ελάχιστη εγκληματικότητα και ποια ήταν αυτή.

8. Ο αριθμός βακτηρίων N(t) σε μια συγκεκριμένη καλλιέργεια μεταβάλλεται μετά τη χρήση ενός βακτηριοκτόνου ως εξής: $N(t) = \frac{10.000}{1+t^2} + 2.000$, όπου ο χρόνος t εκφράζεται σε min. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής και το πλήθος των βακτηρίων 1 και 2 min μετά τη χρήση του βακτηριοκτόνου.