ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ / ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ 11

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
Παράγουσα Συνάρτηση & Ανώτερες Παράγωγοι

1. Ποιους ορισμούς πρέπει να ξέρω ;

Τι ονομάζουμε παράγουσα συνάρτηση μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

Ονομάζουμε, αν υπάρχει, μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $F: \Delta \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε:

$$\mathbf{F'(x) = f(x)}, \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Πόσες παράγουσες έχει μια συνάρτηση ;

Αν **F** είναι μία παράγουσα της $f: \Delta \to \mathbb{R}$, με Δ διάστημα του $\mathbb{R}$, τότε οποιαδήποτε άλλη παράγουσα της f θα είναι της μορφής **F + c**, όπου c κάποιος σταθερός αριθμός.

Άρα, έχει άπειρες παράγουσες που όλες διαφέρουν απλά κατά ένα σταθερό πραγματικό αριθμό.

2. Ποιες είναι οι Παράγουσες των βασικών συναρτήσεων ;

Συνάρτηση f(x)	Παράγουσα F(x)
1	$x + c$
α [γενικά για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$]	$\alpha x + c$
x^{α} [$\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, x > 0$]	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$

$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $[x > 0]$	$\sqrt{x} + c$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $[x > 0]$	$2\sqrt{x} + c$
$\dfrac{1}{x}$ $[x \neq 0]$	$\ln\lvert x\rvert + c$
$-\dfrac{1}{x^2}$ $[x \neq 0]$	$\dfrac{1}{x} + c$
e^x	$e^x + c$
$ημx$	$-συνx + c$
$συνx$	$ημx + c$
$\dfrac{1}{συν^2x}$ $[x \neq κπ + \dfrac{π}{2}]$	$εφx + c$
$\dfrac{1}{ημ^2x}$ $[x \neq κπ]$	$-σφx + c$

3. Τι είναι οι παράγωγοι ανώτερης τάξης ;

Εδώ δεν υπάρχει κάποιος κανούργιος ορισμός για να πούμε. Όπως βρίσκουμε την παράγωγο f΄, μιας συνάρτησης f (εφόσον είναι παραγωγίσιμη), έτσι μπορούμε να συνεχίσουμε βρίσκοντας την παράγωγο της παραγώγου (εφόσον και αυτή είναι παραγωγίσιμη). Ετούτη τη νέα παράγωγο την ονομάζουμε **2η παράγωγο** της f και τη συμβολοίζουμε με **f ΄΄** (f δίτονο).

Προφανώς, με την ίδια λογική, μπορούμε να συνεχίσουμε βρίσκοντας ακόμη περισσότερες παραγώγους παραγώγων (εφόσον αυτό είναι δυνατόν) : την 3η παράγωγο, την 4η παράγωγο κ.ο.κ. τις οποίες ονομάζουμε και παράγωγους **3ης τάξης**, **4ης τάξης** κ.ο.κ.

Τις παράγωγους ανώτερων τάξεων μπορούμε να τις συμβολίζουμε και διαφορετικά, ώστε να μη μας βγαίνει η ψυχή γράφοντας συνέχεια τόνους. Έτσι, αντί για $f'''(x)$ γράφουμε $\mathbf{f^{(3)}(x)}$, αντί για $f''''(x)$ γράφουμε $\mathbf{f^{(4)}(x)}$, κ.ο.κ.

4. Ποιες είναι οι πιο συνηθισμένες «παγίδες» ;

Το κομμάτι αυτό της ύλης δεν έχει καμία δυσκολία, αν κάποιος έχει κατανοήσει καλά τα προηγούμενα. Ωστόσο, κατ' εξακολούθηση, δημιουργούνται δύο βασικές παρανοήσεις:

- **Άλλο η παράγουσα κι άλλο η παράγωγος**. Ή μάλλον, καλύτερα, η μία είναι το αντίστροφο της άλλης. Χρειάζεται να τα ξεχωρίσουμε καλά, ετούτα τα δύο στο μυαλό μας, όπως επίσης να διαβάζουμε με ιδιαίτερη προσοχή την εκφώνηση της άσκησης και τα ζητούμενα.

- Η παράγουσα μιας συνάρτησης δεν είναι μία, αλλά άπειρες. Λέμε καλύτερα πως είναι μια **οικογένεια** συναρτήσεων. Γι' αυτό δεν παραλείπουμε ποτέ τη σταθερά **c** , στο τέλος της παράγουσας.

  Αν ο εμπνευστής μιας άσκησης επιθυμεί να υπολογίσουμε μια **συγκεκριμένη** παράγουσα, τότε είναι υποχρεωμένος να μας παρέχει κάποιο στοιχείο επιπλέον. Συνήθως, μια τιμή της παράγουσας σε κάποιο x_0 , πχ. ότι $F(0) = 3$ ή ότι διέρχεται απ' το σημείο Α (0, 3) κ.τ.λ.

- Θυμίζουμε όμως ότι υπάρχει μια **μόνη** περίπτωση, στην οποία μπορούμε να παραλείψουμε τη σταθερά c στην εύρεση της κατάλληλης παράγουσας: στον υπολογισμό ενός ορισμένου ολοκληρώματος (παρακάτω, στην ύλη).

5. Ποιες είναι μερικές από τις βασικότερες ασκήσεις ;

1. Να υπολογίσετε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $ημx + x$	**2.** $-ημx$	**3.** 1974
4. $3x^2 + 1$	**5.** $ημx + συνx$	**6.** $e^x - 2x$
7. x^{2014}	**8.** x^{-2014}	**9.** 3^{2014}
10. $3\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	**11.** $\sqrt{x}$	**12.** $\sqrt{2π}$
13. $\dfrac{1}{x}$	**14.** $-\dfrac{1}{x}$	**15.** $-\dfrac{1}{x}$
16. e^{1453}	**17.** $π^e$	**18.** $x^{\frac{2}{5}}$

22. $x^{-0,25}$ **23.** $\sqrt[5]{x^3}$ **24.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

2. Να υπολογίσετε τις παράγουσες F(x) των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 4$, αν $F(0) = 9$

β. $f(x) = 5x^4 + 2x + 1$, αν $F(-1) = 3$

γ. $f(x) = \dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{2}{3}x + 2$, αν $F(2) = \dfrac{1}{2}$

δ. $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x}$, αν $F(1) = -2$

ε. $f(x) = 3συνx - 2ημx$, αν $F(π) = 1$

στ. $f(x) = \dfrac{1}{π} + ημx + συνx$, αν $F\left(\dfrac{π}{2}\right) = -1$

3. Αν $f(x) = x^2 + 2x + 3$ τότε να δείξετε ότι :

α. $3f'(x) - 3f''(x) = 6x$

β. $f(1)\cdot f'(1) - f''(1) = 26$

4. Αν $f(x) = e^x + \ln x$, με $x > 0$, τότε να δείξετε ότι :

α. $f''(x) - f'(x) = e^x \dfrac{x-1}{x^2}$

β. $f(1) = f''(1) - e$

5. Αν $f(x) = \dfrac{ημx}{x}$ τότε να δείξετε ότι :

α. $f'(x) = \dfrac{συνx}{x} - \dfrac{ημx}{x^2}$

β. $\dfrac{1}{2}\cdot f\left(\dfrac{π}{2}\right) + f'(π) = 0$

6. Αν $f(x) = αx^4 - 3x^2 + β$ τότε να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β, αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α (0, −2) και $f''(1) = 6$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = κx^2 + λx + 1$. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ και λ, αν γνωρίζετε ότι:

- η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, στο σημείο $x_0 = 1$,
- για την παράγουσα F της f ισχύει $F(0) = 2$ κι ότι, επίσης, διέρχεται απ' το σημείο (1, 4) .