Δ Ι Α Φ Ο Ρ Ι Κ Ο Σ   Λ Ο Γ Ι Σ Μ Ο Σ

Μονοτονία & Ακρότατα Συνάρτησης

1. Ποιους ορισμούς πρέπει να ξέρω για τη μονοτονία ;

Πότε μια συνάρτηση θα ονομάζεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα (α, β) και πώς συμβολίζεται ;

Μια συνάρτηση θα λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα (α, β), αν για οποιουσδήποτε δύο αριθμούς x_1, x_2 που ανήκουν στο (α, β) ισχύει:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Γράφουμε: f ↗

Πότε μια συνάρτηση θα ονομάζεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα (α, β) και πώς συμβολίζεται ;

Μια συνάρτηση θα λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα (α, β) , αν για οποιουσδήποτε δύο αριθμούς x_1, x_2 που ανήκουν στο (α, β) ισχύει:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Γράφουμε: f ↘

Πότε μια συνάρτηση θα ονομάζεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα (α, β) ;

Όταν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο (α, β).

2. Ποιους ορισμούς πρέπει να ξέρω για τα ακρότατα ;

Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σε ένα σημείο x_0 ;

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο σημείο $x = x_0$ αν υπάρχει ανοιχτό διάστημα (α, β) που περιέχει το x_0, τέτοιο ώστε $\mathbf{f(x) \le f(x_0)}$, για κάθε $x \in (α, β)$.

Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο x_0 ;

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο σημείο $x = x_0$ αν υπάρχει ανοιχτό διάστημα (α, β) που περιέχει το x_0, τέτοιο ώστε $\mathbf{f(x) \geq f(x_0)}$, για κάθε $x \in (α, β)$.

Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα σημείο x_0 ;

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 αν παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο σε αυτό.

Σε ποια σημεία αναζητούμε τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης ;

α. Στα άκρα του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f.

β. Στα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της f στα οποία δεν υπάρχει η παράγωγος της f. Τα σημεία αυτά καλούνται **γωνιακά**.

γ. Στα σημεία του πεδίου ορισμού της f, όπου η παράγωγός της υπάρχει και είναι ίση με μηδέν, δηλαδή λύνουμε την εξίσωση $\mathbf{f'(x) = 0}$. Τα σημεία αυτά καλούνται **στάσιμα**.

Ποια σημεία ονομάζονται κρίσιμα σημεία της f ;

Κρίσιμα ονομάζονται τα γωνιακά και τα στάσιμα σημεία μαζί.

3. Ποια είναι η σχέση της παραγώγου με τη μονοτονία και τα ακρότατα ;

ΘΕΩΡΗΜΑ

α. Αν $\mathbf{f'(x) > 0}$ για κάθε $x \in (α, β)$, τότε η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο (α, β).

β. Αν $\mathbf{f'(x) < 0}$ για κάθε $x \in (α, β)$, τότε η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο (α, β).

γ. Αν $\mathbf{f'(x) = 0}$ για κάθε $x \in (α, β)$, τότε η f είναι **σταθερή** στο (α, β).

Θεώρημα Fermat

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0) = 0$$

Κριτήριο 1ης παραγώγου

Έστω συνεχής συνάρτηση $f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ και x_0 **κρίσιμο** σημείο της.

α. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι **τοπικό μέγιστο** της f.

β. Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι **τοπικό ελάχιστο** της f.

γ. Αν η **$f'(x)$ διατηρεί το ίδιο πρόσημο** στα διαστήματα (α, x_0) και (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ δεν είναι ούτε τοπικό μέγιστο, ούτε ελάχιστο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

Κριτήριο 2ης παραγώγου

Έστω συνεχής συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και x_0 ένα στάσιμο σημείο της. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0, τότε:

α. αν $f''(x_0) < 0$ η συνάρτηση f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο x_0.

β. αν $f''(x_0) > 0$ η συνάρτηση f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο x_0.

4. Τι πρέπει να προσέχω στις ασκήσεις ;

- Για να λύσω μια άσκηση μονοτονίας ή ακροτάτων, σε γενικές γραμμές, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

  1ον. Βρίσκουμε την παράγωγο $f'(x)$ της συνάρτησης.

  2ον. Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0$.

  3ον. Φτιάχνουμε πίνακα προσήμων / μονοτονίας.

- Επισημαίνουμε ότι τα σημεία, που μηδενίζεται η παράγωγος, **δεν** είναι απαραίτητα σημεία τοπικών ακροτάτων. Πρέπει να προσέχουμε πάντα, **ν' αλλάζει η μονοτονία** δεξιά κι αριστερά ενός σημείου. Διαφορετικά, δεν είναι ακρότατο και το προσπερνάμε.

- ▶ Ξεκαθαρίζουμε στο μυαλό μας, ότι άλλο πράγμα **η θέση x_o** του τοπικού ακρότατου και άλλο το ίδιο το τοπικό ακρότατο, που είναι το **$f(x_o)$** .

- ▶ Προσέχουμε, καθώς κατασκευάζουμε τον πίνακα μονοτονίας, στον άξονα των x δεν τοποθετούμε τυφλά $+\infty$ και $-\infty$, αλλά ότι μας υποδεικνύει το **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης.

5. Ποιες είναι μερικές από τις βασικότερες ασκήσεις ;

1. Να εξετάσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα :

α. $f(x) = 2x - 10$ **β.** $f(x) = 9 - x$

γ. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ **δ.** $f(x) = 4 + 4x + x^2$

ε. $f(x) = 9 - x^2$ **στ.** $f(x) = x^2 - 4x$

ζ. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 6x$ **η.** $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x$

2. Ομοίως (αν δίνεται απευθείας η παράγωγος της συνάρτησης) :

α. $f'(x) = x^3 - 7x + 6$ **β.** $f'(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$

γ. $f'(x) = x^3 + 1$ **δ.** $f'(x) = (x - 3)(x + 1)^2$

ε. $f'(x) = (x + 1)(x - 2)^3$ **στ.** $f'(x) = (x - 1)(x - \frac{1}{2})(4 - 3x)$

3. Ομοίως :

α. $f(x) = e^x$ **β.** $f(x) = \ln x$

γ. $f(x) = \sqrt{x}$ **δ.** $f(x) = 2014$

4. Ομοίως :

α. $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$, $x\in(0, 3)$ **β.** $f(x) = x^2 - 5x + 1$, $x\in[1, 9]$

γ. $f(x) = x^3 + x^2 - x - 3$, $x\in[0, 1]$ **δ.** $f(x) = \frac{5}{3}x^3 - 2x^2 - x$, $x\in[-2, 1)$

ε. $f(x) = ημx$, $x\in[0, \pi)$ **στ.** $f(x) = συνx$, $x\in[0, \pi)$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x3 - 27x - 1$.

α. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία.

β. Να αποδείξετε ότι $f(2014) > f(1821)$.

γ. Να συγκριθούν οι τιμές $f(e)$ και $f(-1)$.

δ. Να δείξετε ότι για κάθε $x\in(0, +\infty)$ είναι $f(x) \geq -55$.

ε. Να δείξετε ότι για κάθε $x\in(-\infty,-1)$ είναι $f(x) < 100$.

6. Δίνεται η συνάρτηση f: $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

α. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να συγκριθούν οι τιμές $f(\pi)$ και $f(e)$.

γ. Να συγκριθούν οι αριθμοί e^{π} και π^{e} .

7. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g: $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με :

$$f(x) = \frac{x - e^x}{x + e^x} \quad \text{και} \quad g(x) = x - x \cdot \ln x$$

Να αποδείξετε ότι παρουσιάζουν μέγιστο σε σημείο με κοινή τετμημένη.

8. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν έχουν ακρότατα :

α. $f(x) = x^5 + x^3 + x$

β. $f(x) = e^{x} + x$

γ. $f(x) = \sqrt{x} + x$

δ. $f(x) = -2e^x - x^3$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 2\lambda$, με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποια τιμή του λ η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο ίσο με 7 .

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \kappa x + 1$, με $\kappa \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του κ , αν γνωρίζετε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στη θέση $x_0 = -3$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 4$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τους αριθμούς α και β , αν γνωρίζετε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει στη θέση $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο ίσο με -1 .

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \mu x^2 - 4x + \nu$. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β , αν γνωρίζετε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στη θέση $x_0 = -2$ και η γραφική παράσταση της f διέρχεται απ' το σημείο Α(1, 3) .