

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Κανόνες Παραγώγισης

1. Ποιοι είναι οι βασικοί κανόνες παραγώγισης ;

$$\alpha. \quad (f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x) \quad [\text{Άθροισμα - Διαφορά}]$$

$$\beta. \quad (c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x) \quad [\text{Συντελεστής}]$$

$$\gamma. \quad (f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad [\text{Γινόμενο}]$$

$$\delta. \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad [\text{Πηλίκο}]$$

$$\epsilon. \quad [g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad [\text{Σύνθεση}]$$

Εναλλακτικός, συμβολισμός:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

2. Ποιες είναι οι βασικότερες δυσκολίες στη χρήση των κανόνων ;

Γενικά, δεν υπάρχουν δυσκολίες στη χρήση των κανόνων - πέρα από την ορθή απομνημόνευσή τους και μια στοιχειώδη εξάσκηση - εκτός ίσως από την περίπτωση της **σύνθετης** συνάρτησης. Συχνά, πολλοί μαθητές αδυνατούν να συμπεράνουν, αν πρόκειται για σύνθετη συνάρτηση ή όχι. Φυσικά, με το δίκιο τους, εφόσον το βιβλίο είναι γραμμένο στο πόδι και θεωρεί γνωστά πράγματα, τα οποία ουδέποτε διδάχτηκαν στο παρελθόν.

- ▶ Χωρίς να ελεγκταθούμε σε ανατριχιαστικές λεπτομέρειες, μπορούμε να αντιλαμβανόμαστε τη σύνθεση ως μια συνάρτηση **μέσα** σε μια άλλη συνάρτηση.
- ▶ Οι σύνθετες συναρτήσεις που πιθανόν να μας δοθούν στηρίζονται, κατά βάση, στις λίγες **βασικές** συναρτήσεις, που έχουμε απομνημονεύσει απ' τον πίνακα των παραγώγων.

Έτσι, είναι ευκολότερο ν' αντιληφθούμε μια σύνθετη συνάρτηση: εκεί που θα περιμέναμε να υπάρχει ένα "απλό" και "σκέτο" x , στη θέση του παρατηρούμε κάτι πιο σύνθετο, δηλαδή μια παράσταση που περιλαμβάνει το x .

Παρακάτω, δίνεται ένας πίνακας, ο οποίος για κάθε βασική συνάρτηση, δίνει μερικά συνηθισμένα παραδείγματα σύνθετων, που στηρίζονται στην αρχική.

Βασική Συνάρτηση	Σύνθετες Συναρτήσεις
x^v	πχ1. $(x^2 - 3x + 1)^2$ πχ2. $(x + 1)^5$ πχ3. $\eta\mu^2 x$ πχ4. $\ln^2 x$
\sqrt{x}	πχ1. $\sqrt{x^3 + 2x - 5}$ πχ2. $\sqrt{e^x + 1}$ πχ3. $\sqrt{\eta\mu x}$ πχ4. $\sqrt{\ln x - 2x^3}$
e^x	πχ1. e^{x^2+5x} πχ2. $e^{\sin x}$ πχ3. e^{2x} πχ4. $e^{\sqrt{x}}$
$\ln x$	πχ1. $\ln(x^2 + 5x + 6)$ πχ2. $\ln(\epsilon\phi x)$ πχ4. $\ln(5x)$
$\eta\mu x$	πχ1. $\eta\mu(2x - x^2)$ πχ2. $\eta\mu(\sin x)$ πχ3. $\eta\mu(3x)$
$\sin x$	πχ1. $\sin(x^3 + x^2 - 1)$ πχ2. $\sin(\sqrt{x})$ πχ3. $\sin(e^x)$
$\epsilon\phi x$	πχ1. $\epsilon\phi(x^2)$ πχ2. $\epsilon\phi(\ln x)$ πχ3. $\epsilon\phi(-\pi x)$

3. Ποιες είναι μερικές από τις βασικότερες ασκήσεις ;

A. Να υπολογίσετε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x^{-2} + \ln 2$

2. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x + 3\sqrt[3]{x}$

3. $f(x) = \ln 2 \cdot x^3 - e^3 \cdot x^2 + \pi \cdot x + \sqrt{5}$

4. $f(x) = 2\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x$

5. $f(x) = e \cdot \ln x + \ln 2 \cdot e^x$

6. $f(x) = \ln x - \epsilon\phi x + 2\sqrt{x}$

B. Ομοίως:

1. $f(x) = (x + 1) \cdot (x^2 + 3x + 2)$

2. $f(x) = e^x \cdot (x^3 + x)$

3. $f(x) = 2e^x \cdot \ln x$

4. $f(x) = 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

5. $f(x) = \eta\mu x \cdot \epsilon\phi x$

6. $f(x) = (x^3 + x^2 + 1) \cdot \sqrt{x}$

7. $f(x) = x^2 \cdot \ln x \cdot \sqrt{x}$

Γ. Ομοίως:

1. $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 1}$

2. $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{\ln x}$

3. $f(x) = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$

4. $f(x) = \frac{x^2 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

5. $f(x) = \frac{x^2 \cdot \ln x}{e^x}$

6. $f(x) = \frac{x^2(x-1)}{x+1}$

Δ. Ομοίως:

1. $f(x) = (x^2 + 3x + 2)^3$

2. $f(x) = \sqrt{2x^3 + 2x^2 - 13}$

3. $f(x) = \ln(x^2 - x^3)$

4. $f(x) = e^{x^2+3x+1}$

5. $f(x) = \eta\mu(\epsilon\phi x)$

6. $f(x) = e^{x^2 \cdot \ln x}$

7. $f(x) = \epsilon\phi(\sigma\upsilon\nu x)$

8. $e^{\sigma\upsilon\nu x}$

9. $f(x) = \sqrt{\ln x}$

10. $f(x) = \sigma\upsilon\nu^3 x$

11. $f(x) = e^{5x}$

12. $f(x) = \eta\mu(3x)$

13. $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 - x})$

Ε. Να υπολογίσετε την παράγωγο κάθε συνάρτησης, στο αντίστοιχο x_0 .

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5x^2 + 1821$, στο $x_0 = -1$

2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$, στο $x_0 = 1$

3. $f(x) = \ln x \cdot (x^2 - ex)$, στο $x_0 = e$

4. $f(x) = \ln x \cdot (x^2 - ex)$, στο $x_0 = e$

5. $f(x) = \frac{e^x + x^2 - x}{x + 1}$, στο $x_0 = 0$

6. $f(x) = \eta\mu x \cdot (\sigma\upsilon\nu x - x^2)$, στο $x_0 = \frac{\pi}{2}$

ΣΤ. Να υπολογίσετε τους πραγματικούς α και β , σε κάθε περίπτωση:

1. Αν $f(x) = -x^3 + \alpha x^2 + 3x - 10$ και $f'(1) = 10$.

2. Αν $f(x) = (x^2 + \beta) \cdot \ln x$ και $f'(e) = 4e$.

3. Αν $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 3$ και $f(1) = 5$, $f'(2) = -1$.

Ζ. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot \sigma\upsilon\nu x$. Να δείξετε ότι: $f(x) - x \cdot f'(x) = x^2 \cdot \eta\mu x$.