Δ Ι Α Φ Ο Ρ Ι Κ Ο Σ Λ Ο Γ Ι Σ Μ Ο Σ
Παραγωγίσιμη Συνάρτηση & Βασικές Παράγωγοι

1. Ποιους ορισμούς πρέπει να ξέρω ;

Πότε μια συνάρτηση f(x) θα ονομάζεται παραγωγίσιμη σε κάποιο σημείο x_o του πεδίου ορισμού της ;

Μια συνάρτηση f λέγεται **παραγωγίσιμη** (ή ότι έχει παράγωγο) σε ένα σημείο $\mathbf{x_o}$ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{h\to o}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

και είναι πραγματικός αριθμός. Τότε συμβολίζουμε το όριο αυτό $\mathbf{f'(x_o)}$ και το ονομάζουμε **παράγωγο** της f στο x_o. Είναι, δηλαδή:

$$f'(x_o)=\lim_{h\to o}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να πούμε, επίσης:

Πότε μια συνάρτηση f(x) θα ονομάζεται παραγωγίσιμη σε κάποιο σημείο x_o του πεδίου ορισμού της ;

Μια συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη** σε ένα σημείο $\mathbf{x_o}$ του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν υπάρχουν τα δύο πλευρικά όρια:

$$\lim_{h\to o^-}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} \quad \text{και} \quad \lim_{h\to o^+}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

και είναι ο ίδιος πραγματικός αριθμός. Δηλαδή, αν συμβαίνει:

$$\lim_{h\to o^-}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}=\lim_{h\to o^+}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

Πότε μια συνάρτηση f(x) θα ονομάζεται παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της;

Αν και μόνο αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_o που ανήκει στο στο (α, β).

Τι ονομάζουμε παράγωγο συνάρτηση μιας συνάρτησης f: (α, β) → ℝ και πότε αυτή ορίζεται;

Παράγωγος συνάρτηση ονομάζεται η συνάρτηση **f ΄: (α, β) → ℝ** και ορίζεται μόνο στην περίπτωση που η f(x) είναι παραγωγίσιμη σε κάθε x_o του (α, β).

Τι ονομάζουμε παράγωγο συνάρτηση μιας συνάρτησης f: [α, β] → ℝ και πότε αυτή ορίζεται;

Παράγωγος συνάρτηση ονομάζεται η συνάρτηση **f ΄: [α, β] → ℝ** και ορίζεται αν και μόνο αν:

- Η f(x) είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x_o \in (\alpha, \beta)$.
- Υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί, τα πλευρικά όρια:

$$\lim_{h\to o^-}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} \text{ και } \lim_{h\to o^-}\frac{f(\beta+h)-f(\beta)}{h}$$

2. Ποιες είναι οι παράγωγοι των βασικών συναρτήσεων ;

Συνάρτηση f(x)	**Παράγωγος f΄(x)**
c [σταθερή]	**0**
x [ταυτοτική]	**1**
$\mathbf{x^{\alpha}}$ [$\alpha\in\mathbb{R}, \alpha \neq 0, x > 0$]	$\boldsymbol{\alpha\cdot x^{\alpha-1}}$
$\sqrt{x}$ [$x > 0$]	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
ημx	**συνx**
συνx	**– ημx**

εφx	$\frac{1}{συν^2x}$
σφx	$-\frac{1}{ημ^2x}$
e^x	e^x
lnx [x > 0]	$\frac{1}{x}$

3. Τι σχέση υπάρχει μεταξύ παραγώγισης και συνέχειας ;

Θεώρημα

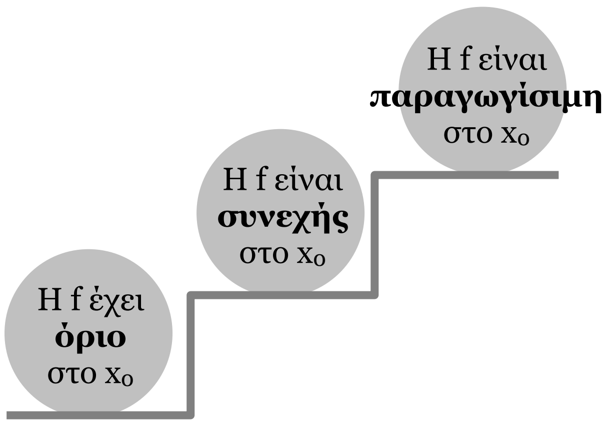
> Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε θα είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

ΠΡΟΣΟΧΗ !!!

Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 δεν είναι απαραίτητα και παραγωγίσιμη σε αυτό.

ΣΧΟΛΙΟ

Ένας τρόπος να κατανοήσουμε τι συμβαίνει είναι με τη μορφή μιας ιεραρχικής σκαλίτσας:



Συνεπώς, αν μια συνάρτηση βρίσκεται σε κάποιο σκαλοπάτι, αυτό δε σημαίνει ότι μπορεί ν' ανέβει και ψηλότερα. Σημαίνει όμως, με βεβαιότητα, πως έχει περάσει από τα προηγούμενα.

Το πιθανότερο, για τη γνώση αυτή, είναι να μας ζητηθεί σε ερωτήσεις του τύπου Σωστό - Λάθος. Δίνουμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα:

- Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο x_0 , του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής σε αυτό.

  Σωστό : Πρόκειται για απλή διατύπωση του θεωρήματος.

- Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε κάποιο x_0 , του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό.

Λάθος : Το αντίστροφο είπαμε πως δεν ισχύει.

- Αν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε κάποιο x_0 , του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό.

Σωστό: Αν ήταν παραγ/σιμη θα ήταν και συνεχής.

- Αν μια συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο x_0 , του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι και συνεχής σε αυτό.

Λάθος: Μπορεί να είναι συνεχής, αλλά όχι απαραίτητα παραγ/σιμη.

κ.τ.λ. ...

4. Ποια είναι τα βασικότερα λάθη / δυσκολίες στην εύρεση μιας βασικής παραγώγου ;

- Δεν κατανοούμε πότε μια συνάρτηση είναι **σταθερή.**

Πότε, δηλαδή, πρόκειται μονάχα για κάποιον αριθμό. Για παράδειγμα, γράφουμε λανθασμένα:

$$(\ln 2)' = \frac{1}{2}, \text{ ενώ είναι απλά: } (\ln 2)' = 0 .$$

Ένας πρόχειρος κανόνας, για να κατανοούμε αν πρόκειται για σταθερή συνάρτηση, είναι ο εξής: δεν θα υπάρχει πουθενά η μεταβλητή "x". Τότε, όσο "περίεργο" κι αν μας φαίνεται αυτό που βλέπουμε, δεν θα είναι παρά ένας "σκέτος" αριθμός. Όλα τα παρακάτω παραδείγματα είναι τέτοιοι "σκέτοι" αριθμοί:

$$\ln 2014 \text{ , } \eta\mu\frac{\pi}{7} \text{ , } \sqrt{1821} \text{ , } e^{431 - \ln 404} \text{ , } \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{13}+\frac{13}{\pi}\right) \text{ , } \sqrt{\ln 5{,}25} \text{ , κ.ο.κ}$$

και η παράγωγος οποιουδήποτε, από αυτούς, ισούται με μηδέν.

- Δεν υπολογίζουμε σωστά παραγώγους δυνάμεων με **αρνητικό εκθέτη**.

Γράφουμε λανθασμένα: $\left(x^{-3}\right)' = -3x^{-2}$ αντί του ορθού: $\left(x^{-3}\right)' = -3x^{-4}$ συγχέοντας τους κανόνες πράξεων σε θετικούς και αρνητικούς αριθμούς.

- Τα χάνουμε κάθε φορά, που μια δύναμη βρίσκεται σε **παρονομαστή**.

Στην περίπτωση αυτή, πρέπει να θυμόμαστε τον εξής κανόνα:

$$\boldsymbol{\frac{1}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{-\nu}}$$

Έτσι γράφουμε ορθά: $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \left(x^{-2}\right)' = -2x^{-3}$

ή ακόμη κι αυτό: $\left(\frac{1}{x^{-3}}\right)' = \left(x^{3}\right)' = 3x^{2}$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Συχνά, γράφουν κάποιοι αχαΐρευτοι: $\left(\dfrac{1}{\alpha^2}\right)' = \alpha^{-2}$

νομίζοντας πως υπολόγισαν καμιά παράγωγο. Με τον κανόνα αυτόν **δεν** βρίσκουμε την παράγωγο, αλλά μετασχηματίζουμε τη δύναμη έτσι, ώστε να μπορέσουμε **κατόπιν** να βρούμε την παράγωγο!!

- Στεκόμαστε αμήχανοι μπροστά σε ρίζες **ανώτερης τάξης**.

Στην περίπτωση αυτή, πρέπει να θυμόμαστε τον εξής κανόνα:

$$\sqrt[\nu]{\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\mu}}} = \boldsymbol{\alpha}^{\frac{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\nu}}}$$

Έτσι γράφουμε ορθά: $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \dfrac{2}{3}\alpha^{\frac{2}{3}-1} = \dfrac{2}{3}\alpha^{\frac{2}{3}-\frac{3}{3}} = \dfrac{2}{3}\alpha^{-\frac{1}{3}}$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Ισχύει ότι και στην προηγούμενη περίπτωση. Η εφαρμογή του παραπάνω κανόνα δε σημαίνει εύρεση καμιάς παραγώγου, αλλά μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε την παράγωγο, αμέσως μετά.

Συνεπώς, είναι μέγα σφάλμα να γράφουμε: $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = x^{\frac{2}{3}}$

5. Ποιες είναι οι βασικές ιδιότητες των δυνάμεων ;

1. $\boldsymbol{\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\nu+\mu}}$

2. $\boldsymbol{\dfrac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu}}$

3. $\boldsymbol{(\alpha \cdot \beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu}}$

4. $\boldsymbol{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \dfrac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}}$

5. $\boldsymbol{(\alpha^{\nu})^{\mu} = \alpha^{\nu \cdot \mu}}$

---

6. $\boldsymbol{\alpha^1 = \alpha}$

7. $\boldsymbol{\alpha^0 = 1}$

8. $\boldsymbol{\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^{\nu}}}$

9. $\boldsymbol{\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{-\nu} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}}$

10. $\boldsymbol{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}$

6. Ποιες είναι μερικές από τις βασικότερες ασκήσεις ;

Να υπολογίσετε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

1. συνx

2. – συνx

3. συν(2π + 2)

4. x^{2014}

5. x^{-2014}

6. 3^{2014}

7. $\sqrt{x}$ **8.** $\sqrt{2\pi}$ **9.** $\sqrt[3]{x}$

10. $\ln x$ **11.** $\ln\sqrt{e}$ **12.** $\ln e$

13. e^{x} **14.** e^{1789} **15.** x^{e}

16. εφx **17.** – ημx **18.** π^{e}

19. $\frac{1}{x}$ **20.** $-\frac{1}{x}$ **21.** $\frac{1}{x^5}$

22. x **23.** $x^{-0,25}$ **24.** $x^{\frac{2}{5}}$

25. $\sqrt[5]{x^3}$ **26.** $\sqrt[3]{x^5}$ **27.** $\frac{1}{\sqrt{x}}$

28. $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ **29.** $\frac{x^5}{x^2}$ **30.** $x^{-3}\cdot x^{7}$

31. $\frac{x^{-3}}{x^{-8}}$ **32.** $\sqrt[3]{x}\cdot x^{2}$ **33.** $\frac{x^5}{\sqrt[3]{x^2}}$

34. $\frac{\sqrt[3]{x}}{x^3}$ **35.** $\left(x^2\right)^{-3}$ **36.** $x^2\cdot\left(\frac{x^{-2}}{x^3}\right)^3$