Δ Ι Α Φ Ο Ρ Ι Κ Ο Σ Λ Ο Γ Ι Σ Μ Ο Σ
Πεδίο Ορισμού Συνάρτησης

1. Τι πρέπει να γνωρίζω για τα πεδία ορισμού;

Χωρίς πολλές φιλοσοφίες: όταν μιλάμε για το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης, εννοούμε τις τιμές (= αριθμούς), που επιτρέπεται να αντικαθιστούμε στη μεταβλητή x.

Συνεπώς, το επόμενο ερώτημα που μας έρχεται στο μυαλό είναι το εξής: «Δηλαδή, δε μπορούμε να θέτουμε πάντα οποιονδήποτε αριθμό επιθυμούμε»; Με άλλα λόγια, οι δυνατές επιλογές μας δεν είναι, πάντα, όλοι οι πραγματικοί αριθμοί;

Στην πραγματικότητα, υπάρχουν τρεις βασικοί **περιορισμοί**, τους οποίους πρέπει να έχουμε διαρκώς κατά νου :

- Οι **παρονομαστές** να είναι διάφοροι του μηδενός.

$$\neq 0$$

- Τα **υπόρριζα** να είναι μη αρνητικά.

$$\geq 0$$

- Οι **παραστάσεις λογάριθμων** (ορίσματα) να είναι θετικές και μόνο.

$$> 0$$

Εφόσον, δεν συναντούμε κανέναν απ' τους τρεις αυτούς περιορισμούς, θα λέμε ότι πεδίο ορισμού είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί, δηλαδή όλο το $\mathbb{R}$.

Συμβολισμός

Για το πεδίο ορισμού υπάρχουν διάφοροι συμβολισμοί, με πιο διαδεδομένο το γράμμα $\mathbf{A}$ ή ακόμα καλύτερα $\mathbf{A_f}$, όπου ο δείκτης μας πληροφορεί και για το όνομα της συνάρτησης, στην οποία αναφέρεται. Αλλού θα το δούμε και ως $\mathbf{D_f}$.

Παρατήρηση: Τα παραπάνω έχουν απλοποιηθεί σε μέγιστο βαθμό. Επιπλέον, έχει αποφευχθεί να συμπεριληφθούν όλες οι δυνατές περιπτώσεις. Οι γνώσεις έχουν περιοριστεί στο ελάχιστο δυνατό επίπεδο, αυτό δηλαδή που κατά παράδοση απαιτείται από την εξεταστέα ύλη. Τυπικά, όμως, ούτε πχ. οι τριγωνομετρικές, ούτε οι εκθετικές συναρτήσεις εξαιρούνται της εξεταστέας ύλης.

2. Ποιες παλαιότερες γνώσεις είναι απαραίτητες;

Εξισώσεις

- Επίλυση εξισώσεων **1ου βαθμού** . Πχ. $2(x-3) = x + 12$
- Επίλυση εξισώσεων **2ου βαθμού** . Πχ. $2x^2 - 3x - 2 = 0$
- Επίλυση εξισώσεων μεγαλύτερου βαθμού με χρήση του σχήματος Horner.

Ανισώσεις

- Επίλυση ανισώσεων **1ου βαθμού** . Πχ. $12 - 4x \le x + 10$
- Επίλυση ανισώσεων **2ου βαθμού** . Πχ. $x^2 - 4 \ge 0$
- Επίλυση ανισώσεων μεγαλύτερου βαθμού με χρήση του σχήματος Horner και κατασκευή πίνακα προσήμων.

3. Βασικά παραδείγματα

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 10$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει κανείς από τους περιορισμούς, που πρέπει να προσέχουμε. Υπάρχουν βέβαια παρονομαστές, όμως κανείς δεν περιέχει τη μεταβλητή x. Επομένως, πεδίο ορισμού είναι όλο το $\mathbb{R}$. Χωρίς πολλές εξηγήσεις, γράφουμε:

$$A_f = \mathbb{R}$$

2. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{x-1}{10-2x}$.

Λύση

Πρέπει ολόκληρος ο παρονομαστής (και όχι μόνο το x, όπως λανθασμένα αντιλαμβάνονται κάποιοι μαθητές) να είναι διάφορος του μηδενός. Δηλαδή:

$$10 - 2x \neq 0$$

Το παραπάνω λύνεται όπως ακριβώς λύνεται μια εξίσωση. Ωστόσο, υπάρχουν μαθητές που δε νιώθουν άνετα με το συμβολισμό "≠" . Μπορεί, λοιπόν, κανείς να λύνει τις σχέσεις αυτές σαν ισότητες, δηλαδή αντί "≠" να γράφει "=" . Αρκεί, στο τέλος, να θυμάται ότι οι λύσεις που βρίσκουμε είναι εκείνοι, ακριβώς, οι αριθμοί που πρέπει να απορρίψουμε κι όχι να κρατήσουμε.

$$10 - 2x = 0 \Leftrightarrow -2x = -10 \Leftrightarrow x = \frac{-10}{-2} \Leftrightarrow x = 5$$

Συνεπώς, το x μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός **ΕΚΤΟΣ** από το 5 . Πώς το γράφουμε αυτό συμβολικά; Υπάρχει ο σύντομος τρόπος:

$$A_f = \mathbb{R} - \{5\}$$

υπάρχει κι ο αναλυτικότερος:

$$A_f = (-\infty\ ,\ 5) \cup (5\ ,\ +\infty)$$

3. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x - 6}$.

Λύση

Πρέπει: $x^2 + x - 6 \neq 0$

Λύνουμε την αντίστοιχη εξίσωση: $x^2 + x - 6 = 0$.

Υπολογίζουμε, τελικά, $\Delta = 25$ και $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

Συνεπώς, το πεδίο ορισμού είναι:

$$A_f = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$$

4. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 5}$.

Λύση

Πρέπει: $x^2 + 5 \neq 0$.

Εδώ, παρ' ότι πρόκειται για εξαιρετικά εύκολη περίπτωση, πολλοί μαθητές τα χάνουν και δεν ξέρουν τι πρέπει να κάνουν.

1ος τρόπος Η παράσταση $x^2 + 5$ είναι άθροισμα μιας μη-αρνητικής ποσότητας (x^2) και μιας θετικής (5). Άρα, παραμένει θετική «σε κάθε περίπτωση», δηλαδή δεν είναι δυνατόν να μηδενιστεί. Στη "χειρότερη" περίπτωση να γίνει 5 , αν μηδενιστεί ο όρος x^2 .

Αυτό το «σε κάθε περίπτωση», που γράψαμε παραπάνω, σημαίνει σε απλά μαθηματικά «για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό». Άρα, πεδίο ορισμού είναι όλο το $\mathbb{R}$.

2ος τρόπος Λύνουμε την εξίσωση: $x^2 + 5 = 0$.

- Αν τη λύσουμε με Διακρίνουσα, τότε $\Delta = -20 < 0$, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη. Αφού όμως η εξίσωση δεν έχει καμία λύση, άρα κι εμείς δεν έχουμε κανέναν περιορισμό. Άρα, πεδίο ορισμού είναι όλο το $\mathbb{R}$.
- Αν χωρίσουμε γνωστούς - αγνώστους: $x^2 = -5$. Η οποία όμως είναι αδύνατη, εφόσον κάθε αριθμός υψωμένος στο τετράγωνο (και γενικά σε ζυγό εκθέτη) δίνει πάντα θετικό ή μηδενικό αποτέλεσμα. Άρα δεν έχουμε κανέναν περιορισμό, δηλαδή πεδίο ορισμού είναι όλο το $\mathbb{R}$.

$$A_f = \mathbb{R}$$

5. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{1 - 6x}$.

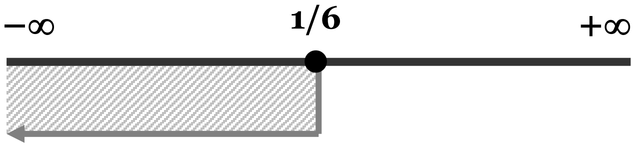
Λύση

Πρέπει ολόκληρο το υπόρριζο (χωρίς το σύμβολο της ρίζας!) να είναι μη αρνητικό, δηλαδή μεγαλύτερο ή ίσο με το μηδέν. Άρα:

$$1 - 6x \geq 0 \Leftrightarrow -6x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq \frac{-1}{-6} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{6}$$

▶ Παρατηρούμε ότι η φορά της ανίσωσης άλλαξε, επειδή διαιρέσαμε με αρνητικό αριθμό!

Στην περίπτωση που λύνουμε ανισώσεις, πρέπει να θυμόμαστε ότι τα πεδία ορισμού γράφονται αναγκαστικά υπό μορφή διαστημάτων. Αν κανείς δυσκολεύεται να συμπεράνει τα σωστά διαστήματα, κατευθείαν από τη λύση της ανίσωσης, μπορεί αν το επιθυμεί να σχεδιάσει, πρώτα, τη λύση σε έναν άξονα.



Συνεπώς, το πεδίο ορισμού είναι:

$$A_f = (-\infty\ ,\ 1/6]$$

6. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x) = $\sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

Λύση

Πρέπει: $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

Υπολογίζουμε τη Διακρίνουσα ($\Delta = 1$) και τις λύσεις ($x_1 = 1$, $x_2 = 2$) .

Φτιάχνουμε πίνακα προσήμων:

x	−∞		1		2		+∞
$x^2 - 4x + 3$		+	0	−	0	+	

Εφόσον η ανίσωση που λύνουμε απαιτεί ≥ 0 , άρα επιθυμούμε τα θετικά διαστήματα, δηλαδή το 1ο και το 3ο . Συνεπώς, το πεδίο ορισμού είναι:

$$A_f = (-\infty\ ,\ 1] \cup [2\ ,\ +\infty)$$

7. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x) = $\sqrt{7 + 2x^2}$.

Λύση

Πρέπει: $7 + 2x^2 \geq 0$. Αν σκεφτούμε, όπως ακριβώς σκεφτήκαμε στο παράδειγμα 4, εύκολα συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει κανείς περιορισμός :

$$A_f = \mathbb{R}$$

8. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x) = $\dfrac{x}{x^2 + 2x - 3} + \dfrac{x - 1}{\sqrt{x + 2}}$.

Λύση

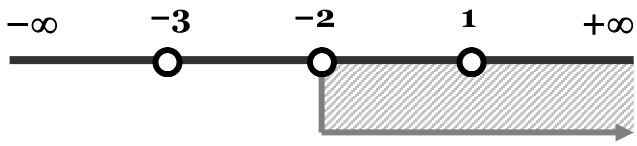
Εδώ, έχουμε συνδυασμό περιπτώσεων και χρειάζεται μεγαλύτερη προσοχή. Αν έχουμε πάνω από έναν περιορισμούς, εξετάζουμε τον καθένα ξεχωριστά.

Πρέπει: $x^2 + 2x - 3 \neq 0$ και $x + 2 > 0$.

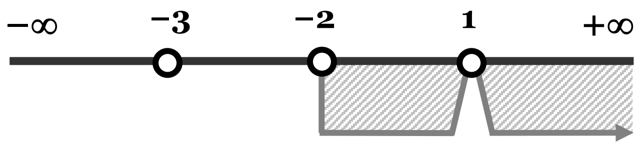
Κάποιοι θα παρατηρήσουν - ορθά - γιατί στην ανίσωση χρησιμοποιήσαμε το σύμβολο ">" και όχι "≥", όπως συνηθίζουμε. Εδώ, εσκεμμένα, η ρίζα έχει τοποθετηθεί στον παρονομαστή, συνεπώς δεν επιθυμούμε να μηδενιστεί. Έτσι, παρ' ότι γενικά δε μας πειράζει μια ρίζα να μηδενίζεται και γράφουμε "≥ 0", στη συγκεκριμένη περίπτωση, είμαστε υποχρεωμένοι να γράψουμε αποκλειστικά "> 0". Μ' ένα σμπάρο δυο τρυγόνια, λοιπόν: έχουμε καλύψει και το υπόρριζο, και τον παρονομαστή!

- Για $x^2 + 2x - 3 = 0$, έχουμε $\Delta = 16$ και $x_1 = -3$, $x_2 = 1$
- Για $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

Τώρα, το δύσκολο κομμάτι: κάθε φορά, που αντιμετωπίζουμε πολλαπλούς περιορισμούς, θα πρέπει στο τέλος να τους συναληθεύουμε, δηλαδή, να αναζητούμε τις **κοινές λύσεις** τους. Ένα μικρό σχέδιο, πάντα βολεύει:



Παρατηρούμε, ότι το πεδίο ορισμού αποτελείται από όλους τους αριθμούς, που είναι μεγαλύτεροι του −2 , εκτός όμως απ' το 1 (το −3 δεν επηρεάζει καθόλου και μας είναι παντελώς αδιάφορο). Θα μπορούσαμε να το σκεφτούμε και ως εξής: ότι το πεδίο ορισμού κάνει ένα μικρό «αλματάκι» στον αριθμό 1. Κάπως έτσι:



Άρα, τελικά, μπορούμε να γράψουμε ότι το πεδίο ορισμού είναι:

$$A_f = (-2\ ,\ 1) \cup (1\ ,\ +\infty)$$

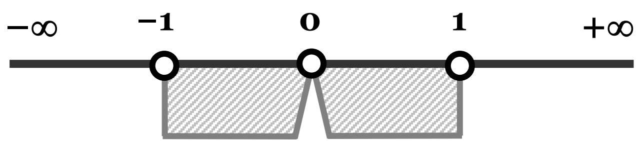
9. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \ln(1 - x^2) - \dfrac{9}{x}$.

Λύση

Ο φυσικός λογάριθμος "ln" δε μας τρομάζει καθόλου, εφόσον το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να λύσουμε άλλη μια ανίσωση, πράγμα που έχουμε κάνει επανειλημμένα στα παραδείγματα με τις τετραγωνικές ρίζες. Έτσι, έχουμε τους παρακάτω περιορισμούς:

- Για $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow (1 - x)(1 + x) > 0$, έχουμε ρίζες τους αριθμούς −1 και 1 . Αφού φτιάξουμε πίνακα προσήμων, βρίσκουμε τελικά: $x \in (-1\ ,\ 1)$.
- $x \neq 0$

Αν σχεδιάζαμε τις λύσεις μας, στον ίδιο άξονα, θα είχαμε:



Άρα, τελικά, το πεδίο ορισμού είναι:

$$A_f = (-1\ ,\ 0) \cup (0\ ,\ 1)$$

4. Μερικές βασικές ασκήσεις

Να βρείτε το πεδίο ορισμού, κάθε μίας, από τις παρακάτω συναρτήσεις.

1. $f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{5}+\dfrac{x}{3}$

2. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+4}$

3. $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2-4}$

4. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-6x+9}$

5. $f(x)=\dfrac{x^3-2x+7}{2x^2-x-1}$

6. $f(x)=\dfrac{-5x}{x^2-x-3}$

7. $f(x)=\sqrt{x^2+9}$

8. $f(x)=\sqrt{3x-12}$

9. $f(x)=\sqrt{15-3x}$

10. $f(x)=\sqrt{x^2+6x+8}$

11. $f(x)=\sqrt{x^2+4x+4}$

12. $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$

13. $f(x)=\sqrt{3-x^2}$

14. $f(x)=\sqrt{x^2-9}+\dfrac{x-1}{2x+4}$

15. $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{-x^2+x+12}}-\dfrac{x}{2x+4}$

16. $f(x)=\ln(x^2-16)$

17. $f(x)=\ln(24-6x)-\ln(2x+6)$

18. $f(x)=\dfrac{5+2x^3}{\sqrt{5x+8}}+\ln(-x^2-6x+7)$

19. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3+x^2-5x+3}$

20. $f(x)=\sqrt{x^3+x^2-5x+3}$

21. $f(x)=\dfrac{10}{\sqrt{x^3+x^2-5x+3}}$

22. $f(x)=\ln(x^3+x^2-5x+3)$