Εκθετική Συνάρτηση

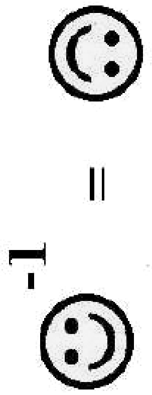
«Μ' ασέβεια μίλησες κάποτε, δίχως μιαν υποψία
για τη λεπτή ειρωνία, στης ύπαρξής μου τη μορφή,
τι μοιάζω να βυθίζομαι αενάως απ' τη μία,
μ' από την άλλη, υψώνομαι πέρα από κάθε κορυφή».

1. Δυνάμεις

Αποδεικνύεται ότι μπορούμε να επεκτείνουμε τον ορισμό της δύναμης ενός αριθμού $\alpha \in \mathbb{R}^+$ (πραγματικού & **θετικού**) ώστε να δέχεται ως εκθέτη οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό. Συνοπτικά, έχουμε:

Για εκθέτη φυσικό ($\nu \in \mathbb{N}$)

$$\boxed{\alpha^\nu = \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha} \quad (\nu \text{ παράγοντες})$$



Για εκθέτη αρνητικό ακέραιο ($\kappa \in \mathbb{Z}^-$)

$$\boxed{\alpha^\kappa = \frac{1}{\alpha^{-\kappa}}}$$

Για εκθέτη ρητό ($\mu, \nu \in \mathbb{Z}$)

$$\boxed{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}}$$

Για εκθέτη άρρητο ($x \in \mathbb{Q}'$)

Δεν απαιτείται από την ύλη μας να γνωρίζουμε το πώς και γιατί, αρκεί να γνωρίζουμε ότι ακόμη και στην περίπτωση αυτή ορίζεται η δύναμη ενός θετικού, πραγματικού αριθμού.

Ορίζεται με τη βοήθεια μαθηματικών εννοιών , που ονομάζονται όρια , ως εξής:

$$\alpha^x = \lim_{\nu \to +\infty} \alpha^{\rho_\nu}$$

όπου ρ_ν η ακολουθία δεκαδικών προσεγγίσεων του x , με ν δεκαδικά ψηφία.

Αποδεικνύεται, επίσης, ότι και για τους πραγματικούς εκθέτες εξακολουθούν να ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων:

Ιδιότητες δυνάμεων

$\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$	$\dfrac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu}$	ίδια βάση
$(\alpha \cdot \beta)^{\mu} = \alpha^{\mu} \cdot \beta^{\mu}$	$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu} = \dfrac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}$	ίδιος εκθέτης
$\left(\alpha^{\mu}\right)^{\nu} = \alpha^{\mu \cdot \nu}$		δύναμη δύναμης

Ισχύει ακόμα:

$\alpha^1 = \alpha$

$\alpha^0 = 1$

$0^{\nu} = 0$

0^0 = δεν ορίζεται

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$$

$1^{\nu} = 1$

$$(-1)^{\nu} = \begin{cases} 1 & \text{αν } \nu = \text{άρτιος} \\ -1 & \text{αν } \nu = \text{περιττός} \end{cases}$$

2. Εκθετική Συνάρτηση

Με τον τρόπο αυτό, λοιπόν, μπορούμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ορίσουμε την παρακάτω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, την οποία ονομάζουμε **εκθετική**:

$$f(x) = \alpha^{x}$$

$\alpha > 0$
$\alpha \neq 1$

προϋποθέσεις περιορισμοί

Για την εκθετική συνάρτηση ισχύουν τα εξής:

1. Έχει πεδίο ορισμού $\mathbf{A} = \mathbb{R}$
2. Έχει σύνολο τιμών το $\mathbf{f(A) = (0, +\infty)}$

3. Είναι **«1–1»**, δηλ. για κάθε $x_1 = x_2 \in A$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$\mathbf{x_1 = x_2 \Leftrightarrow \alpha^{x_1} = \alpha^{x_2}}$$

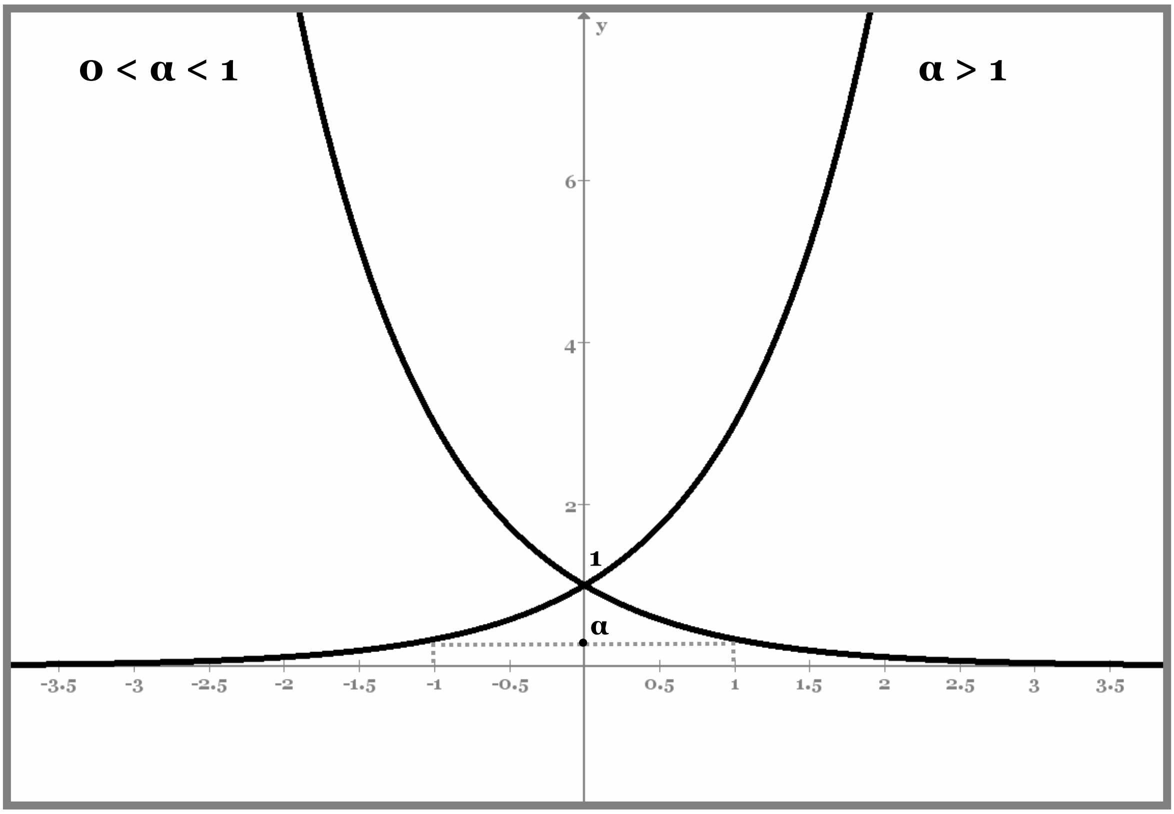
4. Αν **α > 1** είναι **αύξουσα (↑)**, δηλαδή $\forall\ x_1 < x_2 \in A$ ισχύει:

$$\mathbf{x_1 < x_2 \Leftrightarrow \alpha^{x_1} < \alpha^{x_2}}$$

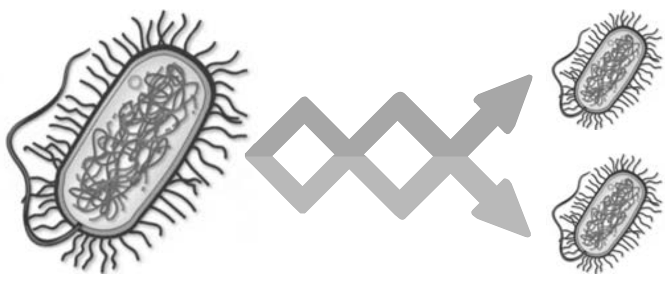
Αν **0 < α < 1** είναι **φθίνουσα (↓)**, δηλαδή $\forall\ x_1 < x_2 \in A$ ισχύει:

$$\mathbf{x_1 < x_2 \Leftrightarrow \alpha^{x_1} > \alpha^{x_2}}$$

5. Για καθεμία απ' τις προηγούμενες περιπτώσεις, έχει γραφική παράσταση μια καμπύλη της μορφής:

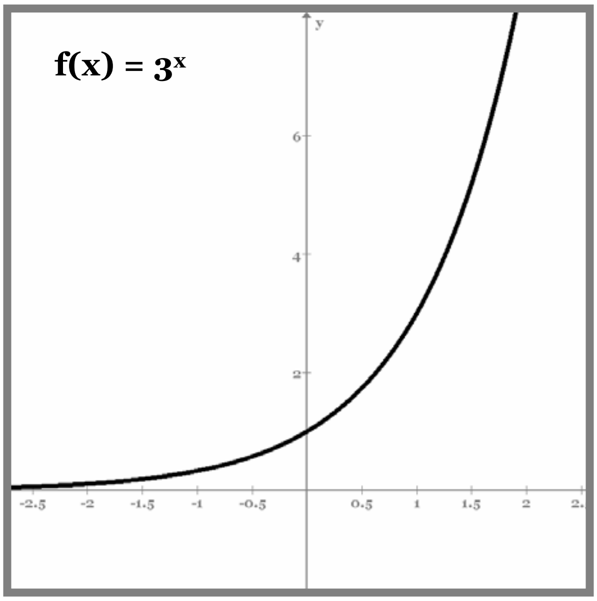


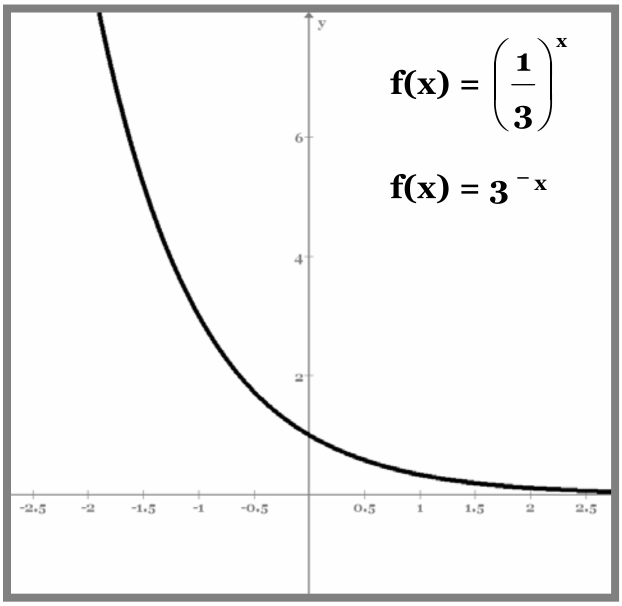
6. Λέμε ότι ο άξονας x΄x είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης, καθώς η γραφικής παράσταση της εκθετικής συνάρτησης τον πλησιάζει απεριόριστα, δίχως ποτέ να τον τέμνει.

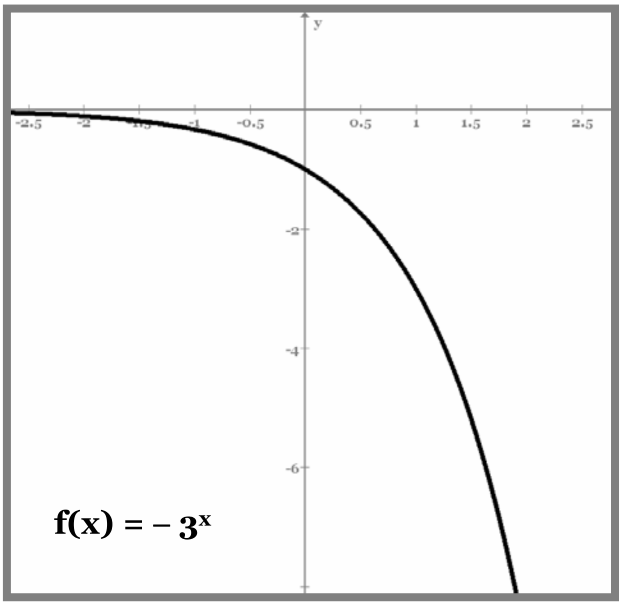


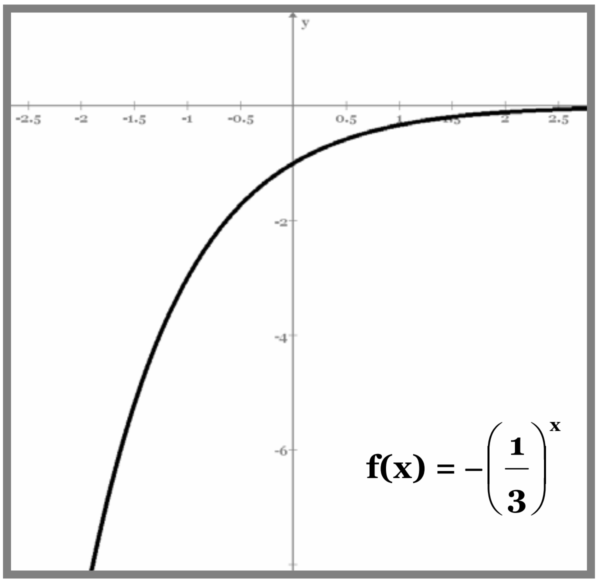
3. Παραδείγματα Γραφικών Παραστάσεων

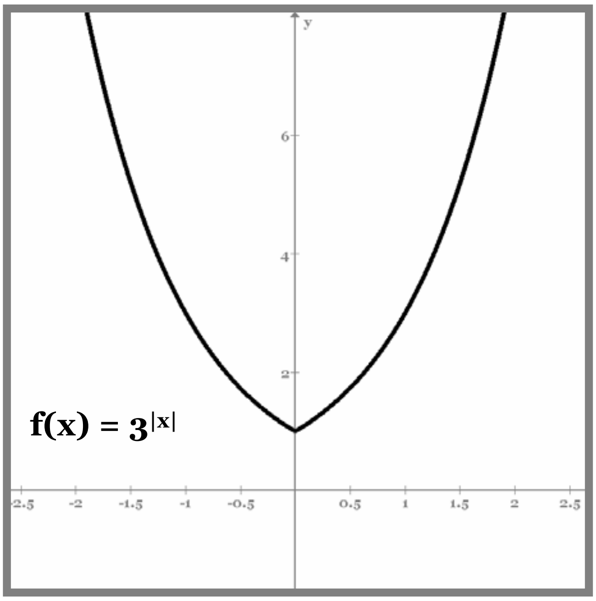
Εδώ παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις από διάφορες παραλλαγές της $f(x) = 3^x$, ώστε να γίνει καλύτερα κατανοητή η συμπεριφορά της εκθετικής συνάρτησης (αλλά και γενικότερα των συναρτήσεων).

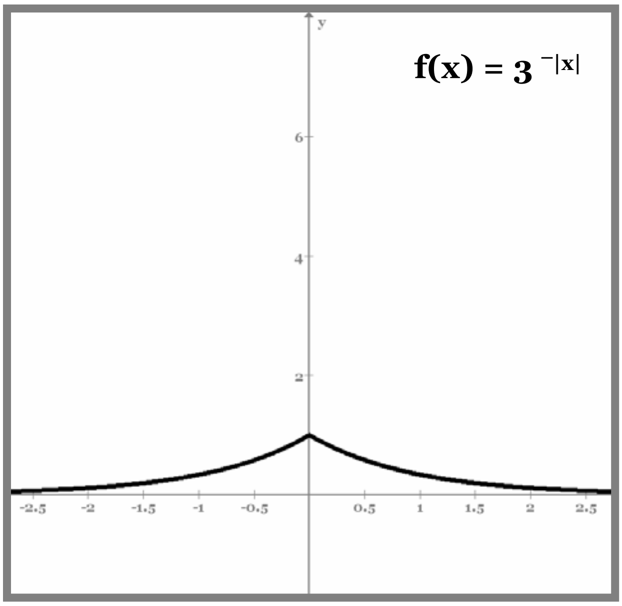


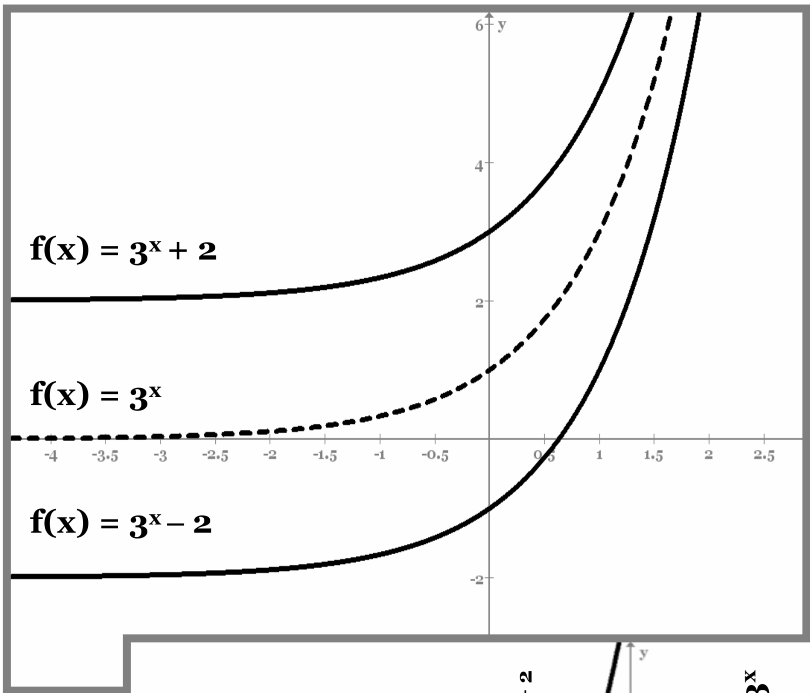


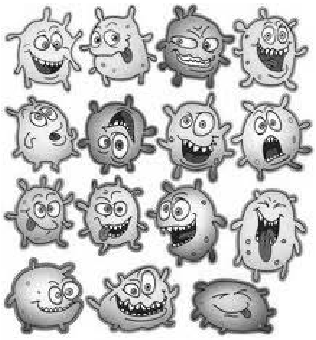


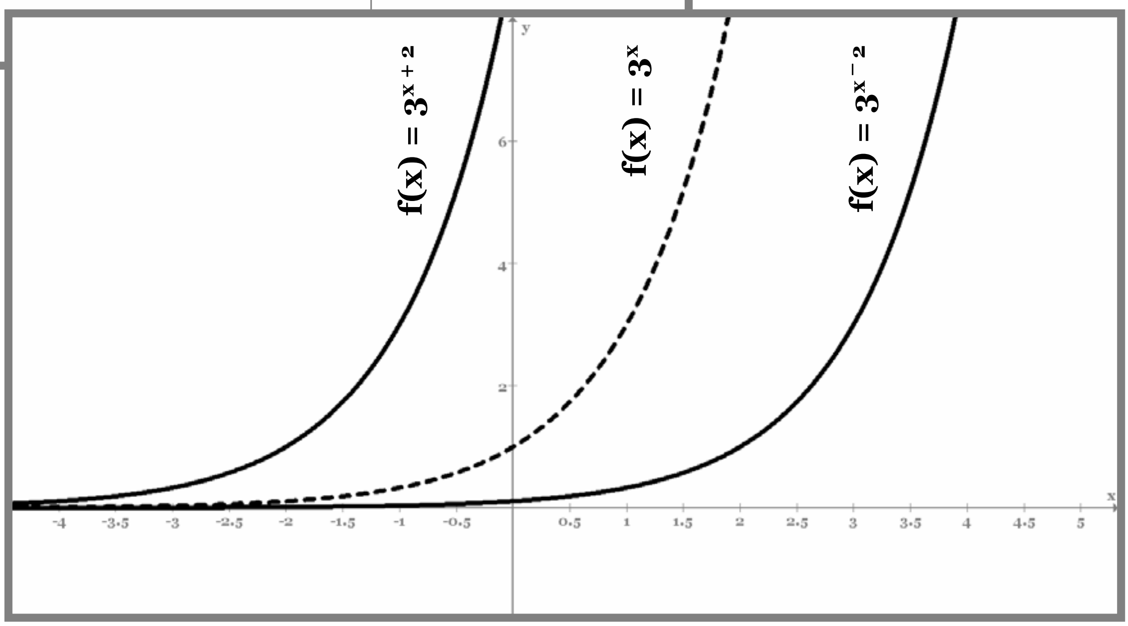



$f(x) = 3^{|x|}$


$f(x) = 3^{-|x|}$


$f(x) = 3^x + 2$
$f(x) = 3^x$
$f(x) = 3^x - 2$

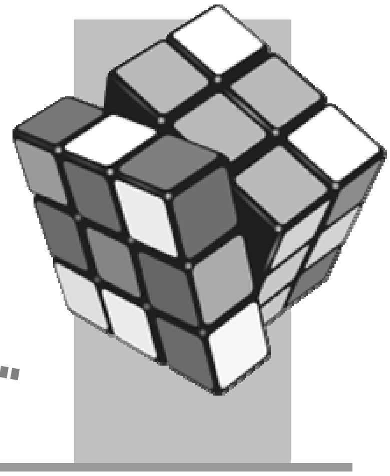



$f(x) = 3^{x+2}$
$f(x) = 3^x$
$f(x) = 3^{x-2}$

Μεθοδολογία

Εκθετική Συνάρτηση

και άλλα όμορφα...



1. Εκθετικές Συναρτήσεις

1. Όταν μας ζητείται να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση μιας εκθετικής συνάρτησης λαμβάνουμε υπόψιν τις διάφορες περιπτώσεις που αναλύθηκαν στις προηγούμενες σελίδες ή συνδυασμό αυτών.

Εξάσκηση : Να γίνει η γραφική παράσταση της $f(x) = 3^{x-2} + 1$

2. Αν για μια συνάρτηση $\mathbf{f(x) = \alpha^x}$ μας ζητείται να εξετάσουμε :

α. πότε είναι **εκθετική**, θα πρέπει:

$$\mathbf{\alpha > 0 \text{ και } \alpha \neq 1}$$

β. πότε **ορίζεται** για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θα πρέπει:

$$\mathbf{\alpha > 0}$$

γ. πότε είναι **γνησίως αύξουσα**, θα πρέπει:

$$\mathbf{\alpha > 1}$$

δ. πότε είναι **γνησίως φθίνουσα**, θα πρέπει:

$$\mathbf{0 < \alpha < 1}$$

2. Εκθετικές Εξισώσεις

1. Προσπαθούμε να γράψουμε και τα δύο μέλη ως δυνάμεις με την ίδια βάση, με τη βοήθεια των γνωστών ιδιοτήτων των δυνάμεων. Στη συνέχεια, επειδή η εκθετική συνάρτηση είναι «1–1», θα ισχύει:

$$\alpha^{x_1} = \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Εξάσκηση : Να λυθεί η εξίσωση: $4^{3x} = 2^{4} \cdot 16^{\frac{x}{2}}$

2. Με κατάλληλη αντικατάσταση ανάγουμε την εξίσωση σε μια ισοδύναμη πολυωνυμική, πχ. 2ου βαθμού.

Εξάσκηση : Να λυθεί η εξίσωση: $9^{x-1} + 3^{x} = 4$

3. Εκθετικές Ανισώσεις

Σκεφτόμαστε με παρόμοιο τρόπο, όπως στις εξισώσεις, ωστόσο φροντίζουμε στην περίπτωση που **0 < α < 1** να **αλλάζουμε τη φορά** της ανίσωσης, αφού τότε η συνάρτηση θα είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε θα ισχύει: $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

Εξάσκηση : Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$4^{2x-3} > 2^{2x+4} \quad \text{και} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{x+4} < \left(\frac{1}{3}\right)^{3x-1}$$

4. Συστήματα

1. Με κατάλληλη αντικατάσταση ανάγουμε το σύστημα σε άλλο ισοδύναμο με δυο αγνώστους, το οποίο μπορούμε να λύσουμε με κάποια από τις γνωστές μας μεθόδους.

Εξάσκηση : Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} 3^{x} + 2^{y} = 31 \\ 3^{x} - 2^{y} = 23 \end{cases}$

2. Σε μερικές περιπτώσεις, όταν σε κάθε εξίσωση του συστήματος και τα δύο μέλη είναι γινόμενα, αρκεί να ακολουθήσουμε μια μέθοδο ανάλογη με αυτή που περιγράψαμε στις εξισώσεις: προσπαθούμε να γράψουμε και τα δύο μέλη, κάθε εξίσωσης, σαν δυνάμεις με την ίδια βάση.

Εξάσκηση : Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} 27^{3x+1} = 27 \cdot 81^{y-1} \\ 4 \cdot 16^{x-y} = 32^{2x+y+2} \end{cases}$

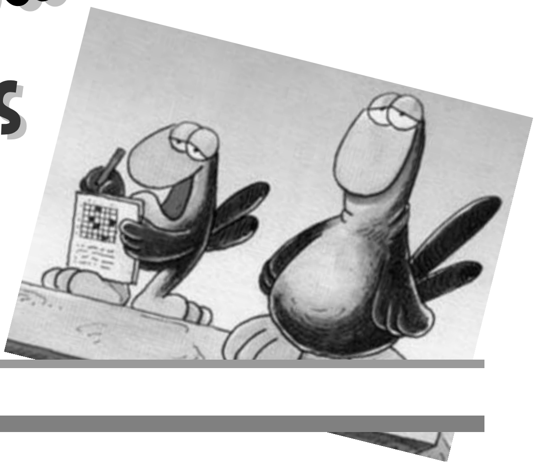
3. Όταν σε περιπτώσεις όπως η προηγούμενη, δεν είναι δυνατόν να γραφτούν και τα δύο μέλη με την ίδια βάση, τότε μια καλή ιδέα είναι να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε κατά μέλη, τις δυο εξισώσεις του συστήματος.

Εξάσκηση : Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 250 \\ 2^y \cdot 5^x = 40 \end{cases}$

Ασκήσεις

Εκθετικές Εξισώσεις & Ανισώσεις

(και συναρτήσεις)
(και συστήματα)



1. Εκθετικές Συναρτήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\dfrac{\alpha+1}{3-\alpha}\right)^x$. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση:

α. έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$;

β. είναι γνησίως αύξουσα;

γ. είναι γνησίως φθίνουσα;

δ. είναι σταθερή;

2. Εκθετικές Εξισώσεις

1. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α. $2^{x+3} - 2^{x+2} + 2^{x+1} = 48$ **β.** $2 \cdot 9^x - 3^{x+1} - 135 = 0$

γ. $2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3 \cdot 3^{2x} = 0$ **δ.** $3 \cdot 9^x - 8 \cdot 3^x \cdot 5^x + 5 \cdot 5^{2x} = 0$

ε. $3 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^x + 2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 5$ **στ.** $5 \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^x + 6 \cdot \left(\dfrac{6}{5}\right)^x = 11$

ζ. $2^{x+1} + 7 \cdot 2^{x+2} - \dfrac{24}{2^{x-1}} = \dfrac{468}{2^{x-2}}$

η. $4^{2x} - 5 \cdot 8^x - 7 \cdot 2^{2x+1} + 5 \cdot 2^x + 13 = 0$

θ. $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{x+1} \cdot \left(\dfrac{9}{25}\right)^{x^2+2x-11} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^9$ **ι.** $5^{2\eta\mu^2 x - \eta\mu 2x} = 1$

ια. $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$ **ιβ.** $3 \cdot 2^{x-4} - 2^{x-1} = 5^{x-2} - 2 \cdot 5^{x-3}$

ιγ. $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$ **ιδ.** $3 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x + 2^{2x+1} = 0$

2. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

α. $\sigma\upsilon\nu x + e^{-x} = 2$ στο [0, π]

β. $3^x + 4^x = 5^x$

γ. $10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^x = 1111110$ αν $x \in \mathbb{N}^*$

3. Να λυθεί στο [0, π] η εξίσωση: $4^{\sigma\upsilon\nu 2x} + 4^{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 3$

4. **α.** Να υπολογίσετε την παράσταση $(3 + \sqrt{2})^2$

β. Να λυθεί η εξίσωση $7\cdot(11 + 6\sqrt{2})^x = 3 - \sqrt{2}$

3. Εκθετικές Ανισώσεις

1. Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις:

α. $e^{2x} + 3 \geq e^x + e^{x+1}$

β. $3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} > 4^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

γ. $9^{\frac{1}{x}} \leq \sqrt{3^x}$

δ. $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2-3x}$

ε. $27^x + 12^x - 2\cdot 8^x > 0$

στ. $9^{x+1} - 108\cdot 3^x + 243 > 0$

4. Εκθετικά Συστήματα

1. Να λυθούν τα συστήματα:

α. $\begin{cases} 3^x - 2^{y+3} = -5 \\ 2^y - 3^{x-3} = 3 \end{cases}$

β. $\begin{cases} 3^{\frac{x-y}{2}} - 3^{\frac{x-y}{4}} = 6 \\ 2^{\frac{x+y}{3}} - 2^{\frac{x+y}{6}} = 2 \end{cases}$

γ. $\begin{cases} 5^x - 4^{y+1} = 9 \\ 5^{x-1} + 4^{y+2} = 69 \end{cases}$

δ. $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 54 \\ 3^x \cdot 2^y = 24 \end{cases}$

ε. $\begin{cases} 3\cdot 2^{x} - 2^{x+y} + 2 = 0 \\ 5\cdot 2^{x+1} - 2^{x+y-1} - 16 = 0 \end{cases}$

στ. $\begin{cases} 4^{x}\cdot 2^{y-2} = 32 \\ 3^{x+2}\cdot 3^{y-4} = 27 \end{cases}$

η. $\begin{cases} 2^{x+2y} - 3^{2x-y} = 15 \\ 2^{\frac{x}{2}+y} + 3^{x-\frac{y}{2}} = 5 \end{cases}$

θ. $\begin{cases} x^{y} = y^{x} \\ x = y^{2} \end{cases}$

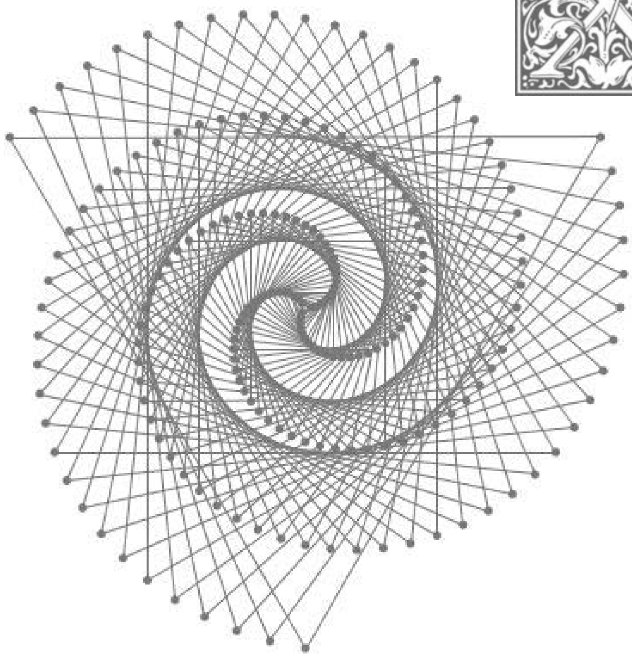
5. Συνδυαστικές Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $2^{\sigma\upsilon\nu x} + 2\cdot 2^{-\sigma\upsilon\nu x} - 3 = 0$ στο $[0, 2\pi]$

β. $\dfrac{e^{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{e} = e^{-2\sigma\upsilon\nu^3 x + 2\sigma\upsilon\nu x}$

γ. $e^{3\cdot \ln x} = 7e^{\ln x} + 6$



4 Λογαριθμική Συνάρτηση

«Στου σύμπαντος αναρριχώμενος τη φαύλη σπείρα,
αναζητώντας μια διέξοδο, ίσως φυγή απ' τη μοίρα,
γύρεψες στήριγμα σ' ανώτερες δυνάμεις και θεριά,
που με της Λογικής τα δάμασες το κράτος, τη θωριά».

1. Λογάριθμοι

Με τις προϋποθέσεις $\boldsymbol{\alpha > 0}$, $\boldsymbol{\alpha \neq 1}$ και $\boldsymbol{\theta > 0}$, ορίζεται ο **λογάριθμος** του αριθμού θ, ως προς βάση α, ως ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον α ώστε να μας δώσει τον θ. Ισχύει, δηλαδή, η ισοδυναμία:

$$\alpha^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_\alpha \theta$$

Από τον ορισμό προκύπτουν άμεσα οι σχέσεις:

$$\log_\alpha \alpha^x = x \qquad \alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$$

$$\log_\alpha 1 = 0 \qquad \log_\alpha \alpha = 1$$

Ειδικότερα, έχουμε τους **δεκαδικούς** λογάριθμους, με βάση το 10, και γράφουμε $\boldsymbol{\log\theta}$ αντί για $\boldsymbol{\log_{10}\theta}$. Δηλαδή:

$$\log \theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta$$

και τους **φυσικούς** ή **νεπέριους** λογάριθμους, με βάση τον αριθμό **e** ($\cong 2{,}71828$), και γράφουμε $\boldsymbol{\ln\theta}$ αντί για $\boldsymbol{\log_e\theta}$. Δηλαδή:

$$\ln \theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$$

2. Ιδιότητες Λογαρίθμων

Αν **α, β > 0 και α, β ≠ 1**, τότε για κάθε $\boldsymbol{\theta > 0}$ και $\kappa \in \mathbb{R}$, ισχύει:

1. $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$

2. $\log_\alpha\left(\dfrac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2$

3. $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \cdot \log_\alpha \theta$

4. $\log_\alpha \theta = \dfrac{\log_\beta \theta}{\log_\beta \alpha}$ **(Αλλαγή βάσης)**

Παρατήρηση: Σύμφωνα με την τελευταία, μπορούμε να ανάγουμε εύκολα τον υπολογισμό λογάριθμων, με οποιαδήποτε βάση, σε υπολογισμό δεκαδικών ή φυσικών λογάριθμων, δηλαδή:

$$\log_\beta \theta = \frac{\log\theta}{\log\alpha} \quad \text{ή} \quad \log_\beta \theta = \frac{\ln\theta}{\ln\alpha}$$

3. Λογαριθμική Συνάρτηση

Με τον τρόπο αυτό, λοιπόν, μπορούμε για κάθε $x > 0$ να ορίσουμε την παρακάτω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, την οποία ονομάζουμε **λογαριθμική με βάση α**:

$$f(x) = \log_\alpha x$$

$\alpha > 0$
$\alpha \neq 1$

προϋποθέσεις
περιορισμοί

Για τη λογαριθμική συνάρτηση ισχύουν τα εξής:

1. Έχει πεδίο ορισμού **$A = (0, +\infty)$**
2. Έχει σύνολο τιμών το **$f(A) = \mathbb{R}$**
3. Είναι **«1–1»**, δηλ. για κάθε $x_1 = x_2 \in A$ ισχύει:

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow \log_\alpha x_1 = \log_\alpha x_2$$

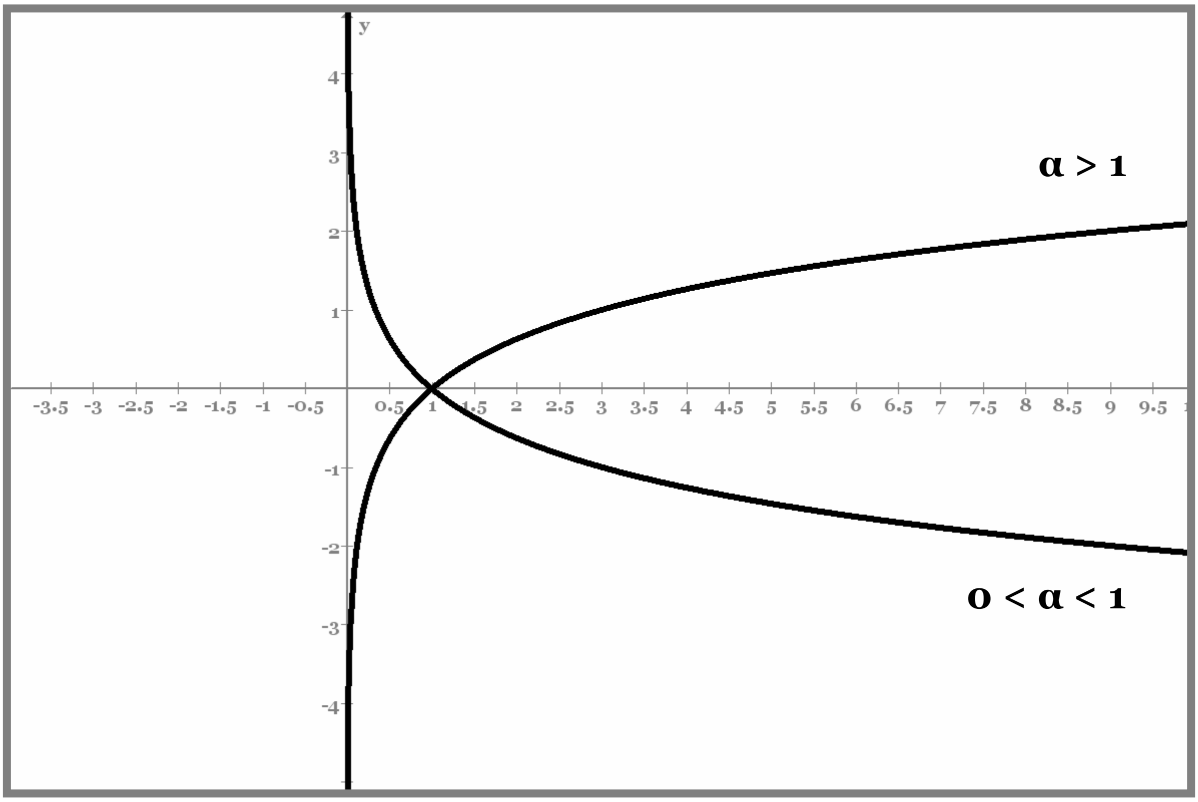
4. Αν **$\alpha > 1$** είναι **αύξουσα (↑)**, δηλαδή για κάθε $x_1 < x_2 \in A$ ισχύει:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2$$

Αν **$0 < \alpha < 1$** είναι **φθίνουσα (↓)**, δηλαδή για κάθε $x_1 < x_2 \in A$ ισχύει:

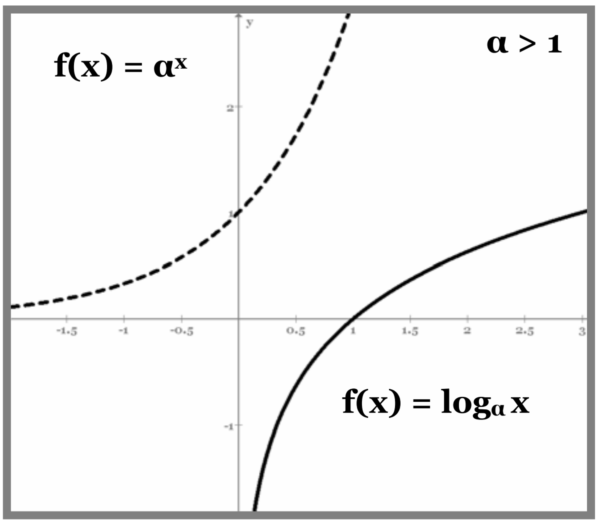
$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_\alpha x_1 > \log_\alpha x_2$$

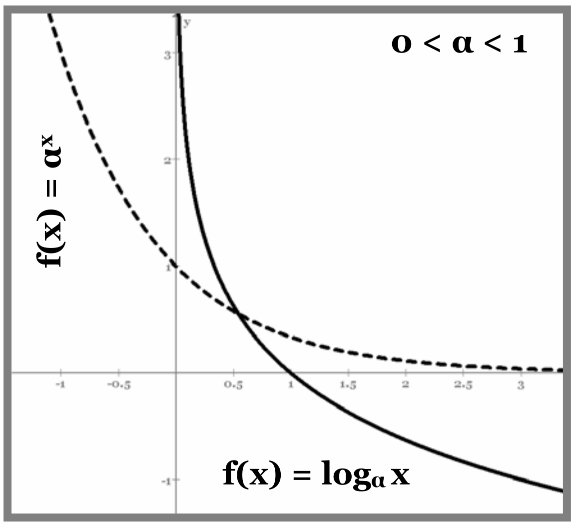
5. Για καθεμία από τις προηγούμενες περιπτώσεις, η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι μια καμπύλη της παρακάτω μορφής:



6. Λέμε ότι ο άξονας y΄y είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης, για τους ίδιους λόγους που ο x΄x είναι οριζόντια ασύμπτωτη της εκθετικής συνάρτησης.

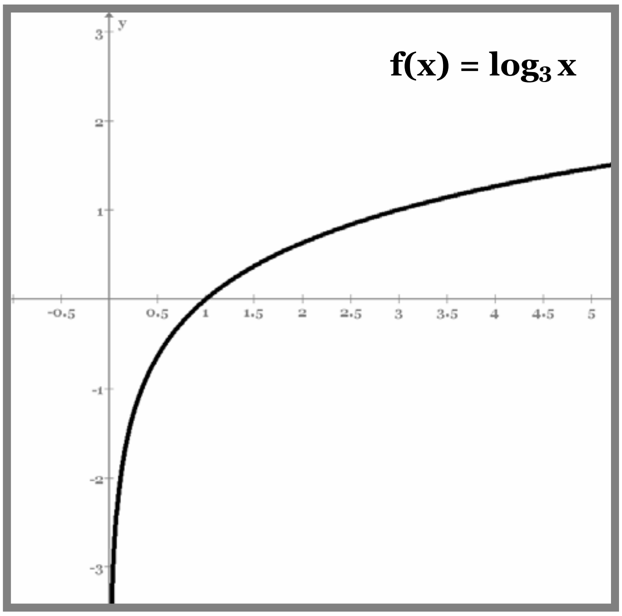
7. Διαπιστώνουμε, επίσης, ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\mathbf{y = \log_{\alpha} x}$ και $\mathbf{y = \alpha^x}$ (δηλαδή, με την ίδια βάση) είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο του 1^{ου} τεταρτημορίου:

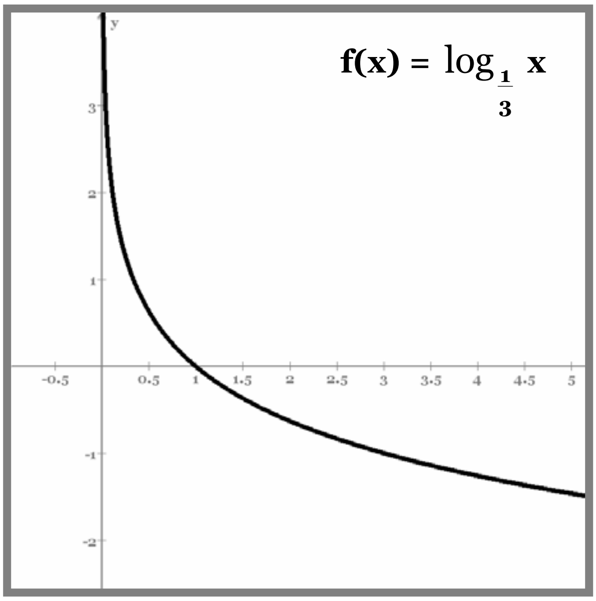


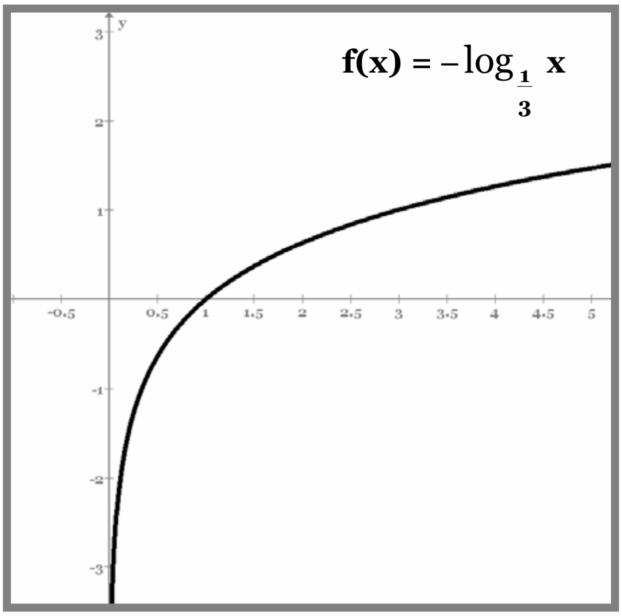


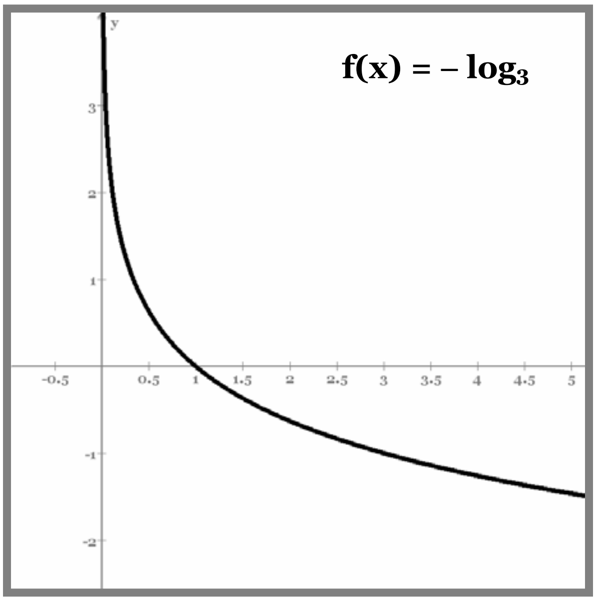
3. Παραδείγματα Γραφικών Παραστάσεων

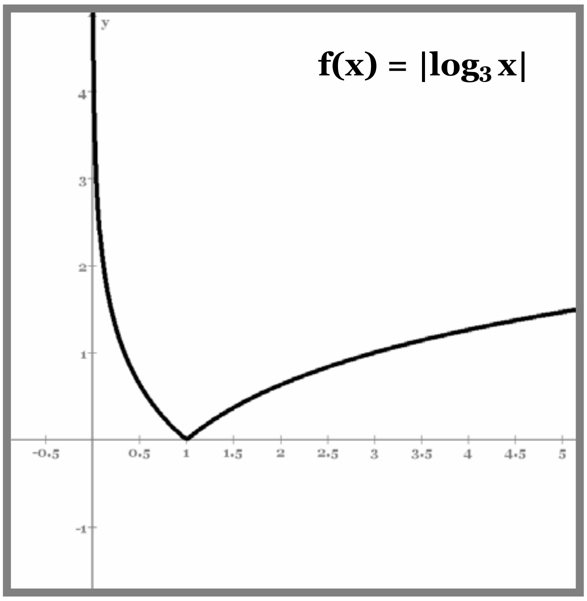
Εδώ παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις από διάφορες παραλλαγές της $f(x) = \log_3 x$, ώστε να γίνει καλύτερα κατανοητή η συμπεριφορά της λογαριθμικής συνάρτησης.

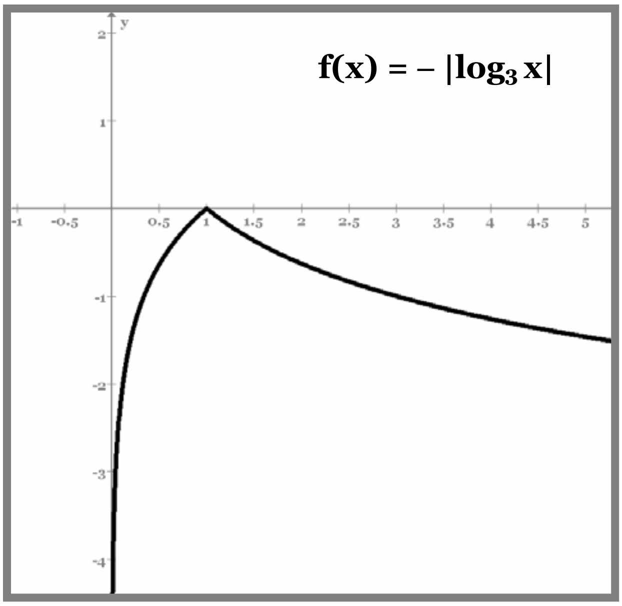


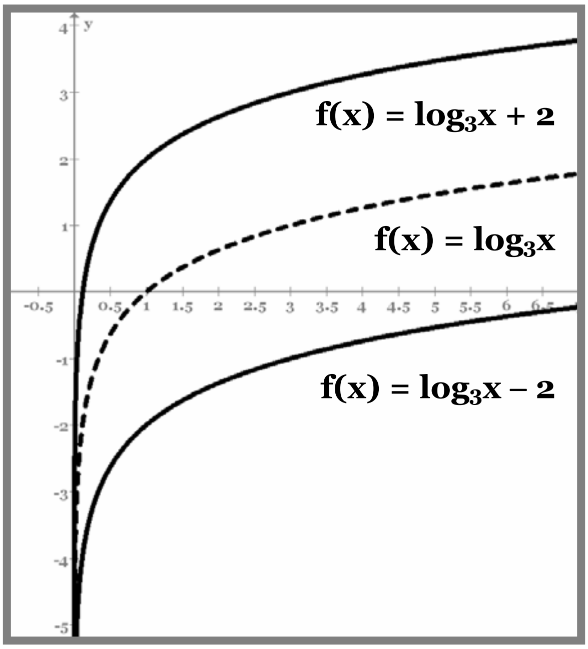


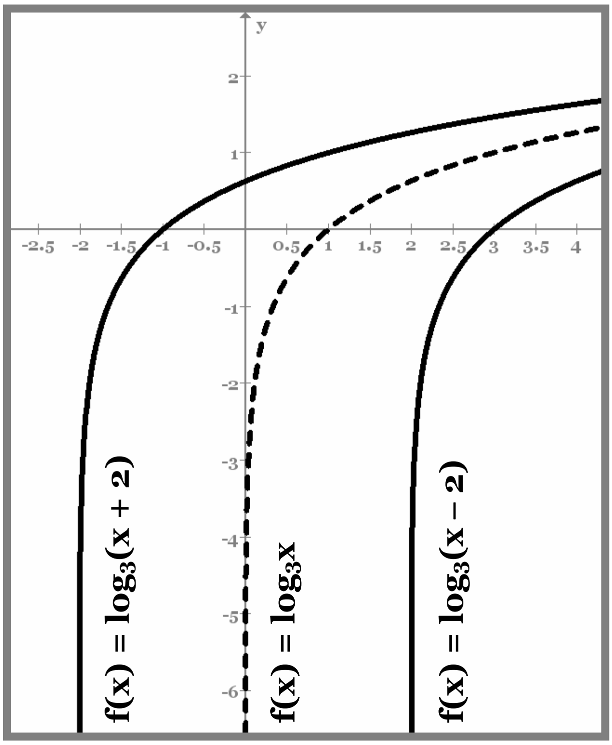





f(x) = |log3 x|


f(x) = – |log3 x|


f(x) = log3x + 2
f(x) = log3x
f(x) = log3x – 2


f(x) = log3(x + 2)
f(x) = log3x
f(x) = log3(x – 2)

Μεθοδολογία

Λογαριθμική Συνάρτηση

και άλλα όμορφα...

1. Λογαριθμικές Συναρτήσεις

1. Όταν μας ζητείται να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση μιας λογαριθμικής συνάρτησης λαμβάνουμε υπόψιν τις διάφορες περιπτώσεις που αναλύθηκαν στην προηγούμενη σελίδες ή συνδυασμό αυτών.

Εξάσκηση : Να γίνει η γραφική παράσταση της $f(x) = \ln(x - 2) + 1$

2. Όταν ζητείται να βρούμε πότε ορίζεται μια λογαριθμική συνάρτηση τότε έχουμε δυο πράγματα, κατά νου:

α. Καταρχάς, όμοια με την εκθετική, απαιτούμε για τη βάση του λογαρίθμου να είναι $\boldsymbol{\alpha > 0}$ και $\boldsymbol{\alpha \neq 1}$. Συνήθως, αυτό θα συμβαίνει, εφόσον στις περισσότερες ασκήσεις ασχολούμαστε με δεκαδικούς ή φυσικούς λογάριθμους. Καλό είναι όμως να έχουμε το νου μας, σε απαιτητικότερες ασκήσεις.

β. Κατά δεύτερο λόγο, η λογαριθμική συνάρτηση $\log_\alpha x$ είδαμε πως έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$, δηλαδή θα πρέπει $\mathbf{x > 0}$.

Εξάσκηση : Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x) = \log\dfrac{2-x}{2+x}$

2. Λογαριθμικές Παραστάσεις - Αποδεικτικές Ασκήσεις

Προσπαθούμε με τις ιδιότητες των λογαρίθμων να «ενώσουμε» όλους τους όρους σε έναν (συνήθως, ένα λογάριθμο), τον οποίο κατόπιν υπολογίζουμε.

Σε κάποιες περισσότερο απαιτητικές περιπτώσεις, χρήσιμες είναι και οι ιδιότητες $\mathbf{\log_\alpha \alpha^x = x}$ και $\mathbf{\log_\alpha \alpha^x = x}$.

Εξάσκηση : Να υπολογίσετε την παράσταση: $4^{1-\frac{1}{2}\log_2 3}$

3. Λογαριθμικές Εξισώσεις

Π Ρ Ο Σ Ο Χ Η ! ! !

Το πρώτο πράγμα που κάνουμε πριν λύσουμε μια λογαριθμική εξίσωση είναι να πάρουμε βαθιές ανάσες και κατόπιν τους απαραίτητους **περιορισμούς**. Θα πρέπει η παράσταση, μέσα σε κάθε λογάριθμο, να είναι **θετική ποσότητα** (θυμάστε το πεδίο ορισμού της λογαριθμικής;). Αφού εξετάσουμε όλους τους περιορισμούς, αναζητούμε τα διαστήματα στα οποία αυτοί **συναληθεύουν** (αναζητούμε δηλαδή τις κοινές τους λύσεις).

1. Καταρχάς, στις εξαιρετικά απλοϊκές εξισώσεις $\log_\alpha \theta = x$, όπου ο άγνωστος είναι κάποιος από τους α, θ, x κάνουμε άμεση αναγωγή της λογαριθμικής εξίσωσης σε μια εύκολη εκθετική, σύμφωνα με τον ίδιο τον ορισμό των λογάριθμων, δηλ. $\mathbf{\log_\alpha \theta = x \Leftrightarrow \alpha^x = \theta}$.

Εξάσκηση : Να λυθούν οι εξισώσεις:

$\log_x 32 = 5$ και $\log_3 81 = x$ και $\log_5 x = 3$

2. Γενικά, προσπαθούμε να γράψουμε και τα δύο μέλη ως λογάριθμους με την ίδια βάση, ενώνοντας τους διάφορους όρους με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των λογαρίθμων. Στη συνέχεια, **"διαγράφουμε"** τους λογάριθμους, επειδή η λογαριθμική συνάρτηση είναι «1–1», άρα θα ισχύει: $\mathbf{\log x_1 = \log x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2}$.

Εξάσκηση : Να λυθεί η εξίσωση:

$$\log(4x + 3) + \log 2 = \log(3x - 1) + \log 3$$

3. Συχνά, μπορεί να μας δίνονται λογαριθμικές εξισώσεις όπου ο άγνωστος θα βρίσκεται εκτός λογαρίθμου, σαν ξεχωριστός όρος. Τότε τον μετατρέπουμε σε λογάριθμο με βάση την κοινή βάση της εξίσωσης, σύμφωνα με την ιδιότητα $\mathbf{x = \log_\alpha \alpha^x}$.

Εξάσκηση : Να λυθεί η εξίσωση:

$$x + \log(3 + 2^x) = x\log 5 + 2\log 2 + \log 7$$

4. Σε άλλες πάλι εξισώσεις, μπορεί να μας δίνονται λογάριθμοι με διαφορετικές βάσεις. Τότε, πολύ εύκολα, ανάγουμε όλους τους λογαρίθμους σε άλλους με την ίδια βάση, σύμφωνα με τον τύπο αλλαγής βάσης $\mathbf{\log_{\alpha}\theta = \dfrac{\log_{\beta}\theta}{\log_{\beta}\alpha}}$.

4. Λογαριθμικές Ανισώσεις

Σκεφτόμαστε με παρόμοιο τρόπο, όπως στις εξισώσεις, ωστόσο φροντίζουμε αν το $\mathbf{0 < \alpha < 1}$ να **αλλάζουμε τη φορά** της ανίσωσης, αφού τότε ισχύει: $\log x_1 < \log x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$. Στο τέλος, θα πρέπει φυσικά να **συναληθεύσουμε** τα διαστήματα λύσης της ανίσωσης με τα διαστήματα των περιορισμών. Αν δεν υπάρχουν κοινές λύσεις, τότε η ανίσωση θα είναι προφανώς αδύνατη.

Εξάσκηση : Να λυθεί η ανίσωση: $\log(3x - 2) - \log 4 > \log(2x - 5)$

5. Ανυπότακτες Εκθετικές Εξισώσεις

Μερικές φορές, ερχόμαστε αντιμέτωποι με εκθετικές εξισώσεις, στις οποίες θα αδυνατούμε να γράψουμε και τα δύο μέλη σαν δυνάμεις με την ίδια βάση. Στην περίπτωση αυτή – και εφόσον τα δύο μέλη της εξίσωσης είναι θετικά – λογαριθμίζουμε και τα δύο μέλη.

Εξάσκηση : Να λυθεί η εξίσωση: $2^{3x-1} = 3^{x+2}$

6. Συστήματα

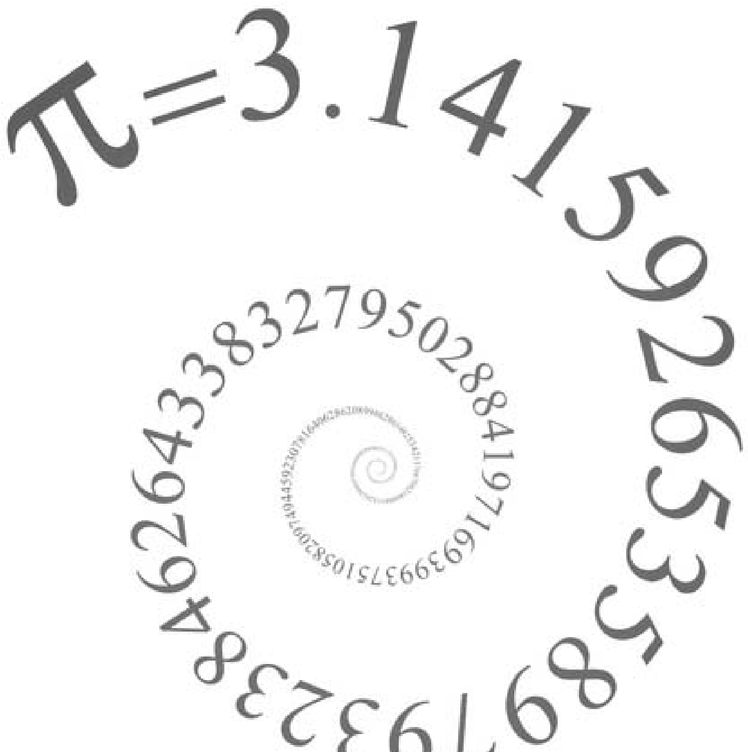
1. Κάποια συστήματα λύνονται εύκολα, με απλή χρήση των ιδιοτήτων των λογαρίθμων και, στη συνέχεια, με απλές αντικαταστάσεις.

Εξάσκηση : Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} \log x + \log y = 7 \\ \log x^3 - \log y^5 = 5 \end{cases}$

2. Γενικά πάντως, με όσες γνώσεις έχουμε συνολικά από τις εκθετικές εξισώσεις και τις ιδιότητες των λογαρίθμων, προσπαθούμε να ανάγουμε το σύστημα σε ένα ισοδύναμο χωρίς λογαρίθμους ή αγνώστους στους εκθέτες.

Εξάσκηση : Να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{cases} \log x + \log y = \log 12 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} 2^{2x} \cdot 2^{y} = 128 \\ 2\log_2 x + \log_2 y = \log_2 12 \end{cases}$$



Ασκήσεις

Λογαριθμικές Εξισώσεις & Ανισώσεις

(και συναρτήσεις)
(και συστήματα)

1. Λογαριθμικές Συναρτήσεις

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\left(x^4-3x^3+6x-4\right)^x$

β. $g(x)=\log_{x-1}\left(e^{2x-1}-1\right)$

γ. $\varphi(x)=\ln(x-2)+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^x+\sqrt{\ln\dfrac{x^2+1}{2}}$

δ. $f(x)=\left(\dfrac{2\alpha-1}{1+\alpha}\right)^x$

2. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

α. $f(x)=\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha+2}\right)^x$, $\alpha\in\mathbb{R}$

β. $g(x)=\log_{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}\left(x^2+1\right)$, $\alpha\in\mathbb{R}$

γ. $h(x)=\left(x^2-x+1\right)^x$

δ. $t(x)=\log_{\frac{x+2}{1-x^2}}\left(x^4+4\right)$

3. Δίνεται η συναρτηση $f(x)=\left(\dfrac{2\lambda+1}{\lambda-1}\right)^x$.

α. Για ποιές τιμές του λ είναι 1-1 ;

β. Υπολογίστε τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύει:

$$f(1)+f(2)+f(3)=3f(0)$$

γ. Αν για κάθε $x<0$ ισχύει $f(x)>1$ να βρείτε τις τιμές του λ.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log_{\alpha}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.

α. Εξετάστε αν είναι άρτια η περιττή.

β. Να αποδείξετε ότι: $f(x_1)+f(x_2)=f\left(\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right)$

2. Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Αν x>0, y>0 και $x^2+y^2=7xy$ να δείξετε ότι:

$$\log_{\alpha}\frac{x+y}{3}=\frac{1}{2}\left(\log_{\alpha}x+\log_{\alpha}y\right)$$

2. Αν α, β, γ διάφοροι μεταξύ τους θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$\alpha^{\alpha}\cdot\beta^{\beta}\cdot^{\gamma}=1$, αν ισχύει: $\dfrac{\log\alpha}{\beta-\gamma}=\dfrac{\log\beta}{\gamma-\alpha}=\dfrac{\log\gamma}{\alpha-\beta}$

3. Αν οι αριθμοί α, β, γ, θ > 0 και διάφοροι του 1 (α, β, γ διαδοχικοί σε γεωμετρική πρόοδο) να αποδείξετε ότι οι αντίστροφοι των αριθμών: $\log_{\alpha}\theta$, $\log_{\beta}\theta$, $\log_{\gamma}\theta$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

4. Να αποδείξετε ότι το αθροισμα των ν πρώτων όρων σε αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1=\log\alpha$, $\alpha_2=\log\beta$ είναι: $S_{\nu}=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{\beta^{\nu(\nu-1)}}{\alpha^{\nu(\nu-3)}}$.

5. Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

α. $3\log 2+\log 5-\log 4=1$

β. $\dfrac{1}{2}\log 25+\dfrac{1}{3}\log 8+\dfrac{1}{5}\log 32=1+\log 2$

γ. $\log_{\alpha\beta}\gamma=\dfrac{\log_{\beta}\gamma}{1+\log_{\beta}\alpha}$, με $\alpha,\beta,\gamma\in R_+$, $\alpha\beta\neq 1,\beta\neq 1$

6. Να αποδείξετε ότι: $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_7 8=3$

7. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

$$A=\frac{\log_{\alpha}\sqrt{\alpha^2-1}}{\log_{\alpha^2}\left(\alpha^2-1\right)}\frac{\log_{\frac{1}{\alpha}}\sqrt{\alpha^2-1}}{\log_{\sqrt[3]{\alpha}}\sqrt[6]{\alpha^2-1}}\qquad B=81^{\frac{1}{\log_5 3}}+27^{\log_9 3}+3\frac{1}{\log_7 9}$$

8. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα Sν των ν πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο το $\log\alpha$ και δεύτερο το $\log\beta$ είναι:

$$S_\nu = \frac{1}{2}\log\frac{\beta^{\omega(\omega-1)}}{\alpha^{\omega(\omega-3)}}$$

9. Να υπολογίσετε το x, αν είναι: $2(\log_x 8)^2 + \log_x 64 + \log_x 8 = 9$

3. Λογαριθμικές Εξισώσεις

1. Να επιλυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α. $\sigma\upsilon\nu x + e^{-x} = 2$ στο $[0,\pi]$

β. $3^x + 4^x = 5^x$

γ. $10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^x = 1111110$ **,** αν $x \in \mathbb{N}^*$

2. Να επιλυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α. $\log(4x-1) = 2\log 2 + \log(x^2-1)$

β. $\log_{\sqrt{2}} x \cdot \log_2 x \cdot \log_{2\sqrt{2}} x \cdot \log_4 x = 54$

γ. $\frac{1}{2}\log(x+2) + \log\sqrt{x-3} = 1 + \log\sqrt{3}$

δ. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

ε. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

στ. $2\cdot 4^x + 3\cdot 9^x = 5\cdot 6^x$

ζ. $\log_3 x \cdot \log_9 x = 2$

η. $2^{2x-1} + 3^x + 4^{x+\frac{1}{2}} - 9^{\frac{x}{2}+1} = 0$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α. $x + \log(1+2^x) = x\log 5 + \log 6$

β. $\log_2(3^{3x-2} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$

γ. $\ln x + 6\log_x e = 5$

δ. $\log\left(3^x + 2.5^x\right) - x\log 5 = \log 39 - \log 15$

ε. $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$

στ. $\left(x^2 - 5x + 6\right)^{x^2 - 2x} = 1$

ζ. $(4x)^{\log 2 + \log\sqrt{x}} = 100$

4. Να λυθεί στο [0, π] η εξίσωση: $4^{\sigma\upsilon\nu 2x} + 4^{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 3$.

4. Λογαριθμικές Ανισώσεις

1. Να λύσετε τις ανισώσεις :

α. $(4x)^{\log 2 + \log\sqrt{x}} > 100$

β. $e^{2x} + e \geq e^x + e^{x+1}$

γ. $3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} \geq 4^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

δ. $\left(\frac{1}{2}\right)^{(\log x)^2 - 3\log x + 2} > 1$

5. Λογαριθμικά Συστήματα

1. Να λυθούν τα συστήματα:

α. $\begin{cases} y^{\log x} = 100 \\ \log(xy) = 3 \end{cases}$

β. $\begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 20 \\ \log\sqrt{xy} = 1 \end{cases}$

γ. $\begin{cases} 3\cdot 2^x - 2^{x+y} + 2 = 0 \\ 5\cdot 2^{x+1} - 2^{x+y-1} - 16 = 0 \end{cases}$

2. Να λυθούν τα συστήματα :

α. $\begin{matrix} 4^x \cdot 2^{y-2} = 32 \\ 3^{x+2} \cdot 3^{y-4} = 27 \end{matrix}$

β. $\begin{matrix} 2^x \cdot 3^y = 54 \\ 3^x \cdot 2^y = 24 \end{matrix}$

γ. $\begin{matrix} \log x + \log y = \log 14 \\ 3x - y = 1 \end{matrix}$

δ. $\begin{matrix} \log_y x + \log_x y = 2 \\ x^2 + y = 12 \end{matrix}$

ε. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$