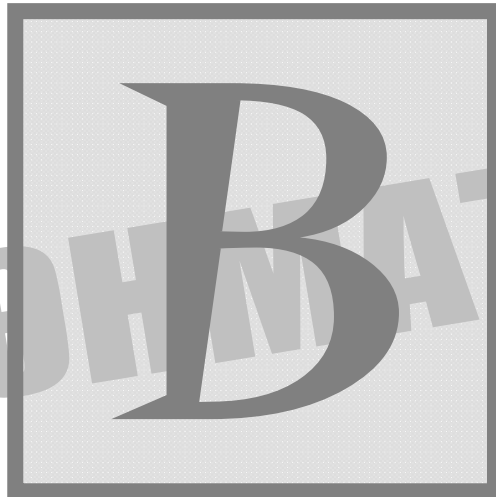


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΕΥΘΕΙΑ
ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Οι ασκήσεις βασίζονται στο αξιόλογο φυλλάδιο του Μαθηματικού **Μιλτ. Παπαρηγοράκη**, από τις σημειώσεις του για το **4ο Γενικό Λύκειο Χανίων** [2008-09 < Mathematica.gr], τον οποίο κι ευχαριστώ ιδιαίτερα για το ήθος και την ευχάριστη διάθεση, με την οποία συμβάλλει στην ελεύθερη διάθεση της γνώσης. Για την αντιγραφή: **Κόλλας Αντώνης**.

ΕΥΘΕΙΑ

1. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ϵ) αν:
 - α. διέρχεται απ' το σημείο $A (1, -1)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία (ϵ') : $2x + y - 1 = 0$.
 - β. διέρχεται απ' το σημείο $A (2, -3)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία (ϵ') : $x = -3$.
2. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ϵ) αν:
 - α. διέρχεται απ' το σημείο $A (1, -1)$ και είναι κάθετη στην ευθεία (ϵ') : $2x + y + 1 = 0$.
 - β. διέρχεται απ' το σημείο $A (4, -3)$ και είναι κάθετη στην ευθεία (ϵ') : $2x + 1 = 0$.
3. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ϵ) αν:
 - α. διέρχεται απ' το σημείο $A (-2, 3)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\varphi = 30^\circ$.
 - β. διέρχεται απ' το σημείο $A (4, -5)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ ορθή γωνία.
4. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ϵ) αν τέμνει τους άξονες στα σημεία:
 - α. $A (4, 0)$ και $B (0, 4)$
 - β. $A (-3, 0)$ και $B (0, 1)$
5. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ϵ) αν γνωρίζουμε ότι είναι μεσοπαράλληλη των παραλλήλων ευθειών:
 - α. (ϵ_1) : $3x - y + 1 = 0$ και (ϵ_2) : $-6x + 2y - 3 = 0$
 - β. (ϵ_1) : $x = 4$ και (ϵ_2) : $x = -6$
6. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ϵ) αν:
 - α. απέχει απόσταση $d = \sqrt{2}$ από την ευθεία (ϵ') : $2x + y - 1 = 0$.
 - β. απέχει απόσταση $d = 4$ από την ευθεία (ϵ') : $y = 3$.
7. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ϵ) αν είναι μεσοκάθετη σε τμήμα AB με:

α. $A(-2, 1)$ και $B(2, 3)$

β. $A(3, 0)$ και $B(0, -5)$

8. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ϵ) αν είναι άξονας συμμετρίας του τμήματος AB με:

α. $A(1, -1)$ και $B(-1, 3)$

β. $A(-3, 4)$ και $B(4, -3)$

9. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ϵ) αν:

α. διέρχεται από το σημείο $A(3, -2)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{v} = (0, 1)$.

β. διέρχεται από το σημείο $A(-2, -3)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{v} = (2, 3)$.

10. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ϵ) αν:

α. διέρχεται από το σημείο $A(5, -2)$ και είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{v} = (-1, 3)$.

β. διέρχεται από το σημείο $A(-2, 2)$ και είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{v} = (0, 4)$.

11. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ϵ) αν:

α. διέρχεται απ' το σημείο $A(-1, 2)$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο σταθερού εμβαδού $E = 3$ τ.μ.

β. διέρχεται απ' το σημείο $A(-1, 0)$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο σταθερού εμβαδού $E = \sqrt{2}$ τ.μ.

12. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ϵ) αν:

α. διέρχεται απ' το σημείο $A(3, -1)$ και απέχει απόσταση $d = \sqrt{2}$ από το σημείο $B(2, 2)$.

β. διέρχεται απ' το σημείο $A(2, 1)$ και απέχει απόσταση $d = 1$ από το σημείο $B(0, 0)$.

13. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών: $3x + 4y - 11 = 0$ και $2x - 3y + 21 = 0$ και είναι:

α. παράλληλη προς την ευθεία $x + 2y + 1 = 0$.

β. κάθετη προς την ευθεία $3x - y + 5 = 0$.

- γ. διέρχεται από την αρχή των αξόνων .
- δ. παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- ε. παράλληλη στον άξονα $y'y$.
- στ. παράλληλη στη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων .
- ζ. παράλληλη στη $y = -x$.
- η. σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 32 τ.μ.

14. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες προς την ευθεία $(\varepsilon) : 2x - 3y - 12 = 0$ και ορίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 12 τ.μ.

15. Έστω οι ευθείες $(\varepsilon_1) : 2x - 3y + 1 = 0$, $(\varepsilon_2) : -x + 4y + 3 = 0$ και το σημείο $A (1, -2)$. Να βρεθεί σημείο M της ε_1 , ώστε το μέσο του AM να ανήκει στην ε_2 .

16. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2y^2 - 3xy - 2x^2 = 0$ παριστάνει ζεύγος δύο ευθειών. Ποια είναι η σχετική θέση των δύο ευθειών που βρήκατε;

17. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A (-1, 2)$, $B (3, -2)$ και $\Gamma (1, 4)$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες:

- α. του ορθόκεντρου
- β. του βαρύκεντρου
- γ. του έκκεντρου
- δ. του περίκεντρου

18. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$, η κορυφή του $A (1, 2)$ και οι εξισώσεις: $x - 3y + 1 = 0$ και $y - 1 = 0$ δύο διαμέσων του. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου.

19. Να βρείτε για ποιες τιμές του φ τα σημεία $A (\kappa \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi , \lambda \cdot \eta\mu\varphi)$, $B (\kappa \cdot \eta\mu\varphi , \lambda \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi)$ και $\Gamma (\kappa , \lambda)$, με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}^*$ και $0 < \varphi < \pi$, είναι συνευθειακά.

20. Φωτεινή ακτίνα διερχόμενη από το σημείο $\Sigma (2, 3)$ και προσπίπτουσα στην ευθεία $x + y + 1 = 0$, μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο $M (1, 1)$. Να βρεθούν οι εξισώσεις της προσπίπτουσας και της ανακλώμενης ακτίνας.

Παραμετρικές

21. Να βρείτε τις πραγματικές τιμές των παραμέτρων, ώστε καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις να είναι εξίσωση ευθείας:

α. $(\lambda^2 - 4)x + (\lambda^2 - 3\lambda + 2)y + 5 - \lambda = 0$

β. $(\alpha^2 - \alpha - \beta + 1)x + (\beta^2 - \beta - \alpha + 1)y + \alpha\beta + 1 = 0$

γ. $(\lambda^2 - 2)x - (\lambda^2 + 2\lambda - 3)y + \lambda^2 - 9 = 0$

22. Για ποιες τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ οι ευθείες $(\varepsilon_1) : (\mu + 1)x - 2\mu y = \lambda$ και $(\varepsilon_2) : (\mu - 1)x - 3y = 2\lambda - 1$:

α. τέμνονται.

β. είναι παράλληλες.

γ. συμπίπτουν.

23. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1) : (\mu + 1)x + (\mu + 2)y = 0$ και $(\varepsilon_2) : \mu x - (3\mu + 2)y + 7 = 0$. Να βρείτε το μ , ώστε η γωνία των ε_1 και ε_2 να είναι ορθή.

24. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να αποδείξετε ότι οι ευθείες, που περιγράφονται από την αντίστοιχη εξίσωση, διέρχονται από σταθερό σημείο για κάθε τιμή των παραμέτρων:

α. $(x + y - 5) + \lambda(2x + y - 7) = 0$

β. $(\lambda^2 + 3\lambda - 2)x + (2\lambda^2 + 3\lambda - 1)y = 7\lambda^2 + 12\lambda - 5$

γ. $(3\lambda^2 + \lambda + 2)x - (5\lambda^2 + \lambda + 1)y + 7\lambda^2 + \lambda = 0$

δ. $ax + by + \gamma = 0$ με $a + \beta + \gamma = 0$

25. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma\alpha)x + (\gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma)y + 2\alpha\beta\gamma = 0$$

με $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \neq 0$, παριστάνει ευθεία γραμμή.

26. Δίνονται οι εξισώσεις ($\lambda \in \mathbb{R}$):

$$(\varepsilon) : (\lambda + 1)x + (\lambda - 4)y + \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda) : (\lambda + 2)x + 3\lambda y + \lambda - 4 = 0$$

α. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις αυτές παριστάνουν ευθεία, για κάθε τιμή του λ .

- β.** Να βρείτε τις τιμές του λ , έτσι ώστε οι ευθείες να είναι κάθετες.
- γ.** Για ποιες τιμές του λ η (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων;
- δ.** Για ποιες τιμές του λ η (ε) είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$;
- ε.** Να αποδείξετε ότι η (η) διέρχεται από σταθερό σημείο.

27. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- α.** $M(\lambda - 2, \lambda + 2), \lambda \in \mathbb{R}$
- β.** $M(2, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$
- γ.** $M(2, \lambda^2 + 1), \lambda \in \mathbb{R}$
- δ.** $M(2, \eta \mu t), t \in \mathbb{R}$

28. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 - y^2 - 4\lambda y - 2\lambda x - 3\lambda^2 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής των δύο αυτών ευθειών.

29. Να εξετάσετε αν η ευθεία $x + 1998y = 4$ ανήκει στην οικογένεια ευθειών που έχει εξίσωση: $(x + y - 4) + \lambda(x - 3y - 4) = 0$.

30. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(5, 3), B(0, 0)$ και $\Gamma(6, 0)$. Φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς τη $B\Gamma$, που τέμνει τις ευθείες AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Δ , αντιστοίχως. Να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινείται το σημείο τομής των $B\Delta$ και ΓE .

31. Οι συντεταγμένες δύο πλοίων Π_1, Π_2 είναι $\Pi_1(t - 1, t + 2)$ και $\Pi_2(3t, 3t - 1)$ για κάθε χρονική στιγμή t με $t > 0$.

- α.** Να βρεθούν οι γραμμές πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο πλοία.
- β.** Να εξεταστεί αν υπάρχουν τιμές του t , στις οποίες τα δύο πλοία συναντώνται.
- γ.** Να βρεθεί η απόσταση των δύο πλοίων τη χρονική στιγμή $t = 3$.

32. Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y - \lambda^2 - 2\lambda - \gamma = 0$, όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- α.** Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ η εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή.
- β.** Αν $\gamma = -1$, να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την παραπάνω εξίσωση διέρχονται από το ίδιο σημείο.
- γ.** Αν $\gamma \neq -1$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων εκείνων που από το καθένα διέρχεται μόνο μια ευθεία, η οποία επαληθεύει την παραπάνω εξίσωση.

Απόσταση & Εμβαδόν

- 33.** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων, τα οποία ισαπέχουν από τις ευθείες $3x - 2y + 4 = 0$ και $3x - 2y + 6 = 0$.
- 34.** Ένα σημείο P του επιπέδου κινείται πάνω στην ευθεία $y = x$. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό σημείο P' του P ως προς την ευθεία $x + 2y - 1 = 0$ κινείται πάνω στην ευθεία $7x - y - 2 = 0$.
- 35.** Το σημείο $A (3, -1)$ είναι κορυφή του τετραγώνου, του οποίου μία πλευρά έχει εξίσωση $3x - 2y - 5 = 0$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των άλλων πλευρών του.
- 36.** Οι εξισώσεις των πλευρών ενός τριγώνου είναι : $3x + 4y - 7 = 0$, $x + y + 2 = 0$ και $2x + 3y - 5 = 0$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου και το εμβαδόν του.
- 37.** Δίνεται η ευθεία (ϵ) με εξίσωση $x + y = 1$. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $P (2, 3)$ ως προς άξονα συμμετρίας την (ϵ) .
- 38.** Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα αξόνων η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο $A (2, 6)$ και η θέση ενός πλοίου με το σημείο $\Pi (\lambda - 1, 2 + \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- α.** Για ποιες τιμές του λ το σημείο Π έχει τετμημένη μικρότερη από την τετμημένη του A ;
 - β.** Να εξετάσετε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι A , όταν κινείται ευθύγραμμα.
 - γ.** Ποια θα είναι η ελάχιστη απόσταση της πορείας του πλοίου από το λιμάνι;
- 39.** Δίνονται οι ευθείες $(\epsilon) : 5x - 12y + 10 = 0$ και $(\zeta) : 5x - 12y - 20 = 0$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) , η οποία είναι παράλληλη προς την (ϵ) και η απόσταση των (η) και (ϵ) είναι διπλάσια από την απόσταση των (η) και (ζ) .

