ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Οι ασκήσεις βασίζονται στο αξιόλογο φυλλάδιο του Μαθηματικού **Μιλτ. Παπαγρηγοράκη**, από τις σημειώσεις του για το **4ο Γενικό Λύκειο Χανίων** [2008-09 < Mathematica.gr] , τον οποίο κι ευχαριστώ ιδιαίτερα για το ήθος και την ευχάριστη διάθεση, με την οποία συμβάλλει στην ελεύθερη διάθεση της γνώσης. Για την αντιγραφή: **Κόλλας Αντώνης**.

Δ Ι Α Ν Υ Σ Μ Α Τ Α

Ορισμός Διανύσματος
Αντίθετα Διανύσματα
Γωνία Διανυσμάτων
Πρόσθεση & Αφαίρεση Διανυσμάτων

1. Για τα σημεία Α, Β, Γ, Δ να αποδείξετε ότι:

α. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{\Delta B}-\overrightarrow{\Gamma A}$ **β.** $\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{B\Delta}$

2. Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ που ανά τρία δεν είναι συνευθειακά. Αν $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{O\Delta}$ για κάθε σημείο Ο, να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε ώστε $\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{A\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Δ, Ε είναι συνευθειακά.

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το μέσο Μ της ΑΓ. Θεωρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{\Gamma B}$ και $\overrightarrow{M\Lambda}=\overrightarrow{BA}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Α, Λ είναι συνευθειακά.

5. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Να σημειώσετε:

α. δύο ζεύγη ίσων διανυσμάτων.

β. δύο κάθετα διανύσματα.

γ. δύο μη συγγραμμικά διανύσματα, με ίσα μέτρα.

δ. δύο ζεύγη αντίθετων διανυσμάτων.

6. Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A\Delta}$. Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιές του ΑΓ και ΒΔ διχοτομούνται.

7. Τι συμπεραίνετε για τις διαγώνιες ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, στο οποίο ισχύει ότι: $\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{O\Gamma}\right|=\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{O\Delta}\right|$ για κάθε σημείο Ο;

8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Ρ της πλευράς ΒΓ. Αν Μ είναι σημείο τέτοιο, ώστε: $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{P\Gamma}$, να αποδείξετε ότι το ΑΒΜΓ είναι παραλληλόγραμμο.

9. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε σημείο Δ, ώστε να ισχύει $\overrightarrow{ΑΔ} = \overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΑΓ}$ και να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{ΜΒ} + \overrightarrow{ΜΓ} = \overrightarrow{ΜΔ} + \overrightarrow{ΜΑ}$ για κάθε σημείο Μ.

10. Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ του χώρου, για τα οποία ισχύει ότι: $\overrightarrow{ΑΓ} + \overrightarrow{ΔΕ} = \overrightarrow{ΔΓ} + \overrightarrow{ΒΕ}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α και Β ταυτίζονται.

11. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Ρ του χώρου. Να αποδειχθεί ότι: $\overrightarrow{ΡΑ} + \overrightarrow{ΡΓ} = \overrightarrow{ΡΒ} + \overrightarrow{ΡΔ}$.

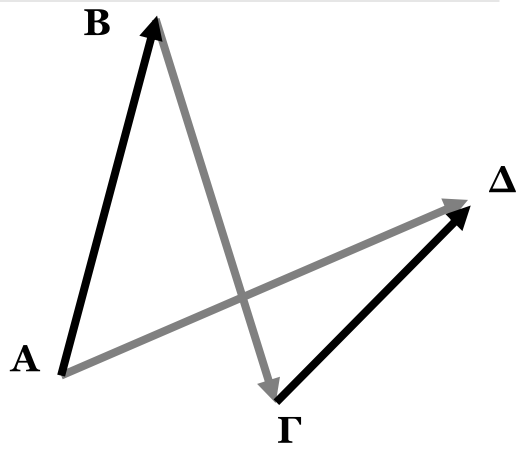
12. Εξωτερικά ενός τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμα ΑΒΔΕ, ΑΛΚΓ, ΒΓΝΜ. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{ΕΛ} + \overrightarrow{ΚΝ} + \overrightarrow{ΜΔ} = \vec{0}$.

13. Με βάση το διπλανό σχήμα να εκφράσετε:

α. το διάνυσμα $\overrightarrow{ΑΒ}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{ΑΔ}$, $\overrightarrow{ΒΓ}$ και $\overrightarrow{ΓΔ}$.

β. το διάνυσμα $\overrightarrow{ΓΒ}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{ΑΔ}$, $\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΓΔ}$.

γ. το διάνυσμα $\overrightarrow{ΓΔ}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{ΑΔ}$, $\overrightarrow{ΒΓ}$ και $\overrightarrow{ΒΑ}$.



Γινόμενο Αριθμού με Διάνυσμα
Διανυσματική Ακτίνα Μέσου Ευθύγραμμου Τμήματος

14. Να σχεδιάσετε διανύσματα, έτσι ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

α. $\overrightarrow{ΑΒ} - \overrightarrow{ΓΒ} = \overrightarrow{ΑΓ}$ **β.** $\overrightarrow{ΑΒ} = 2\overrightarrow{ΚΛ}$

γ. $\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΓ} = 3\overrightarrow{ΑΔ}$ **δ.** $\vec{α} + \vec{β} = -\vec{γ}$

15. Έστω Ο, Α, Β, Γ, Δ σημεία τέτοια, ώστε $\overrightarrow{ΟΑ} = \vec{α}$, $\overrightarrow{ΟΒ} = \vec{β}$, $\overrightarrow{ΟΓ} = \vec{α} + 2\vec{β}$ και $\overrightarrow{ΟΔ} = 2\vec{α} - \vec{β}$. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΑΒ}$, $\overrightarrow{ΒΓ}$, $\overrightarrow{ΓΔ}$, $\overrightarrow{ΑΓ}$, $\overrightarrow{ΒΔ}$ με τη βοήθεια των $\vec{α}$ και $\vec{β}$.

16. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και ένα εσωτερικό του σημείο Δ τέτοιο, ώστε ΑΔ = 2/5·ΔΒ . Αν τα διανύσματα θέσης των Α και Β είναι $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$, να δείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta}=\frac{2}{7}(\vec{\beta}-\vec{\alpha})$ και $\overrightarrow{O\Delta}=\frac{5\vec{\alpha}+2\vec{\beta}}{7}$.

17. Σε ένα παραλληλόγραμμο ΟΑΒΓ είναι $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{\gamma}$. Ένα σημείο Δ βρίσκεται στην πλευρά ΑΒ, έτσι ώστε ΔΒ = 2·ΑΔ . Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma B}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{O\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$, $\vec{\gamma}$.

18. Έστω ένα τραπέζιο ΟΑΒΓ με $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma B}=2\cdot\overrightarrow{OA}$. Αν Δ, Ε είναι τα μέσα των ΑΒ και ΓΒ αντίστοιχα, να βρείτε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma A}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{E\Delta}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$, $\vec{\gamma}$ και να δείξετε ότι $\overrightarrow{\Gamma A}=2\cdot\overrightarrow{E\Delta}$.

19. Αν για τα σημεία Ο, Α, Β, Γ ισχύει $3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}=7\overrightarrow{O\Gamma}$ τότε:

α. Να γράψετε τη σχέση χρησιμοποιώντας το Α ως σημείο αναφοράς.

β. Να δείξετε ότι τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά και ότι το Γ βρίσκεται μεταξύ των Α και Β.

20. Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ με διανύσματα θέσης, ως προς σημείο αναφοράς το Ο, τα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$, $\overrightarrow{O\Gamma}=3\vec{\gamma}-2\vec{\beta}$, όπου $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ μη συγγραμμικά. Να υπολογίσετε τα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και να αποδείξετε ότι τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

21. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ της ΑΓ , ώστε ΑΕ = ΖΓ = 1/4·ΑΓ . Αν $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{B\Gamma}=\vec{\beta}$ τότε να εκφράσετε τα $\overrightarrow{\Delta E}$, $\overrightarrow{\Delta Z}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και να αποδείξετε ότι το ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

22. Αν $2\overrightarrow{A\Lambda}+3\overrightarrow{B\Lambda}+2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BK}$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{K\Lambda}\uparrow\downarrow\overrightarrow{M\Lambda}$.

23. Αν Κ, Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{B\Delta}=2\overrightarrow{K\Lambda}$.

24. Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ ενός τετράπλευρου ΑΒΓΔ, τότε να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=2\overrightarrow{MN}$.

25. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ένα σημείο Δ τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{A\Delta}=x\cdot\overrightarrow{AB}+y\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$, με $x + y = 1$. Να αποδείξετε ότι το Δ είναι σημείο της ευθείας ΒΓ.

26. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ τέτοιο, ώστε να ισχύει $\overrightarrow{AM}=\lambda\cdot\overrightarrow{AB}+\mu\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{BM}=\lambda\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+\mu\cdot\overrightarrow{BA}$ με λ, μ $\in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι $\lambda = \mu = 1/2$.

27. Αν για τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε ισχύει ότι $3\overrightarrow{EB}+5\overrightarrow{AB}+7\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{A\Delta}-10\overrightarrow{E\Gamma}=\vec{0}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά.

28. Δίνονται τα μη συγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και τα σημεία Α, Β, Γ, Ο. Αν $\overrightarrow{OA}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$, $\overrightarrow{OB}=5\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, $\overrightarrow{O\Gamma}=11\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$, τότε να αποδείξετε ότι τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά και ότι ΒΓ = 2ΑΒ.

29. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ ώστε: $3\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{\Gamma E}=\overrightarrow{B\Gamma}$ και $5\overrightarrow{AZ}=3\overrightarrow{A\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι τα Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά.

30. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και ένα μεταβλητό σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\alpha}=\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{M\Gamma}-3\overrightarrow{M\Delta}$ είναι σταθερό.

31. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, το κέντρο του Κ και Μ το μέσο του ΚΓ. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}=4\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{A\Gamma}$.

32. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρεθεί σημείο Μ, ώστε: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}+\overrightarrow{M\Delta}=\vec{0}$.

33. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να προσδιοριστεί σημείο Ρ, ώστε να ισχύει: $\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{\Gamma P}$.

34. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου, ώστε να ισχύει:

α. $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|$

β. $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right|$

γ. $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{M\Gamma}\right|$

35. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά και ισχύει ότι $\kappa \cdot \vec{\alpha} + \lambda \cdot \vec{\beta} = \vec{0}$, τότε να αποδείξετε ότι κ = λ = 0 .

36. Να βρείτε μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς κ, λ, μ έτσι ώστε να ισχύει: $\kappa\vec{\alpha} + \lambda(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) + \mu(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \vec{0}$ για κάθε ζεύγος διανύσματων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

37. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διάμεσος ΑΜ και σημείο Δ στην πλευρά ΑΓ, ώστε: ΓΔ = 2·ΔΑ . Οι ΒΔ, ΑΜ τέμνονται στο Ε. Να αποδείξετε ότι το Ε είναι μέσο της ΑΜ και ΒΕ = 3·ΕΔ .

38. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν Ε είναι σημείο της ΑΒ, ώστε $3\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB}$ και Σ το σημείο τομής των ΑΓ, ΔΕ να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{A\Gamma} = 4\overrightarrow{A\Sigma}$.

Συντεταγμένες Διανύσματος
Μέτρο & Συντελεστής Διεύθυνσης Διανύσματος

39. Δίνεται σημείο Α $(\lambda^2 - 4\lambda + 3, \lambda^2 - \lambda - 6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε:

α. το Α να είναι σημείο του άξονα x'x.

β. το Α να είναι σημείο του άξονα y'y.

40. Θεωρούμε τα σημεία Α (–2, 1), Β (4, 0) και Γ (6, 1). Να βρεθούν οι συντεταγμένες των συμμετρικών:

α. του Α ως προς το Β.

β. του Γ ως προς το μέσο του ΑΒ.

41. Έστω το σημείο Α (–2, 3). Να βρείτε το σημείο Β όταν:

α. τα Α, Β είναι συμμετρικά ως προς το Κ (0, 1).

β. τα Α, Β είναι αντιδιαμετρικά του κύκλου με κέντρο το Κ(–1, 0).

42. Να βρείτε τα κ, $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε τα σημεία Α $(-\kappa + 1, 2)$, Β $(-\lambda + 2, \lambda)$ να είναι συμμετρικά ως προς:

α. το $O(0, 0)$ **β.** τον άξονα $x'x$ **γ.** την ευθεία $y = x$

43. Οι τετμημένες των σημείων Α και Β είναι ρίζες της εξίσωσης: $x^2 - (\lambda^2 - 3\lambda + 2)x - 199 = 0$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ να έχει τετμημένη ίση με 3.

44. Έστω σημείο Α $(-1, 2)$. Να βρείτε:

α. το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ όταν Β $(-3, 0)$.

β. το σημείο Γ όταν $\overrightarrow{A\Gamma} = (-3, -5)$.

γ. το σημείο Δ όταν $2\overrightarrow{A\Delta} = 3\overrightarrow{\Delta E}$ και Ε $(3, -1)$.

45. Για το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (x^2 - 5x + 6, x^2 - 9)$, να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε:

α. $\vec{\alpha} = \vec{0}$ **β.** $\vec{\alpha} \,//\, x'x$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$

46. Έστω τα σημεία Α $(3, 2)$, Β$(7, -4)$. Να βρείτε:

α. σημείο Μ της ευθείας $y = x + 1$, ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι ισοσκελές με κορυφή το Μ.

β. σημείο Ν του $x'x$, ώστε το τρίγωνο ΝΑΒ να είναι ορθογώνιο στο Ν.

47. Αν $\vec{\alpha} = (-2, 5)$, $\vec{\beta} = (3, 4)$, $\vec{\gamma} = (-1, 2)$ τότε να βρείτε:

α. τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, $\vec{v} = -\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - \vec{\gamma}$

β. τα μέτρα των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$

48. Να γραφτεί το διάνυσμα $\vec{u} = (-2, 6)$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{v} = (2, -1)$ και $\vec{w} = (3, 1)$.

49. Δίνονται τα σημεία Α $(2, 9)$, Β $(3, 4)$, Γ $(5, 7)$ και το διάνυσμα $\vec{x} = (\kappa - 2, \lambda - 5)$.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

β. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών κ, λ για τις οποίες ισχύει: $\vec{x} = \overrightarrow{ΒΓ} - 2\overrightarrow{ΑΒ}$.

γ. Να υπολογίσετε το μέτρο του $\overrightarrow{ΒΓ} - 2\overrightarrow{ΑΒ}$.

δ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Γ.

50. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x, 1)$ και $\vec{\beta} = (9, x)$ να είναι αντίρροπα.

51. Να βρείτε τα $x, y \in \mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x^3 + y^3, x + y)$ και $\vec{\beta} = (-7, -1)$ να είναι αντίθετα.

52. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{\beta}$ αντίρροπο του διανύσματος $\vec{\alpha} = (-6, 8)$ με μέτρο τριπλάσιο από το $|\vec{\alpha}|$.

53. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

$$(\alpha - 3)\vec{i} - \beta\vec{j} \parallel y'y \quad \text{και} \quad (\alpha + 1)\vec{i} + \beta\vec{j} \parallel \vec{i} + \vec{j}$$

54. Αν τα σημεία Α (–3, 5), Β (1, 7) είναι οι διαδοχικές κορυφές παραλληλογράμμου και Μ (1, 1) το σημείο τομής των διαγωνίων του, να βρείτε τις άλλες κορυφές του.

55. Να βρείτε τις τιμές $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε τα σημεία Α (1, 0), Β $(-\mu^2, 3)$, Γ $(-5\mu, 9)$ να είναι συνευθειακά.

56. Να βρείτε τη γωνία φ, την οποία σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{ΑΒ}$ με τον $x'x$, όταν Α (2, 4) και Β (4, 2).

57. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha}$, για το οποίο ισχύει ότι: $\vec{\alpha} = (|\vec{\alpha}| - 4, 8)$.

58. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v}$ αν είναι γνωστό ότι σχηματίζει μη κυρτή γωνία με τον ημιάξονα Οx, έχει $|\vec{v}| = 10$ και είναι παράλληλο προς το διάνυσμα $\vec{u} = (3, -4)$.

59. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ όπου $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{6}$, $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}|=2\sqrt{2}$ να βρεθούν τα:

α. $\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2$ **β.** $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2$ **γ.** $(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$

60. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$.

61. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, με $|\vec{\alpha}|=\sqrt{3}$, $|\vec{\beta}|=1$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{6}$. Να βρείτε το $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$.

62. Αν $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$, $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, τότε να βρείτε το $|\vec{\gamma}|$ και το διάνυσμα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$.

63. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουν ίσα μέτρα και είναι κάθετα, τότε να αποδείξετε ότι και τα διανύσματα $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ είναι κάθετα και έχουν ίσα μέτρα.

64. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}|=2|\vec{\alpha}|$ και $\vec{\alpha}\perp(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$.

Να αποδείξετε ότι $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$.

65. Αν $\vec{\alpha}=(\sqrt{3}(x-1),\ 2x)$ και $\vec{\beta}=(-\sqrt{3},\ 1)$, τότε να βρείτε το x, ώστε $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$.

66. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $2|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=2\sqrt{5}$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{2\pi}{3}$ και $\vec{v}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε το $|\vec{v}|$, καθώς και τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{v}$ και $\vec{\alpha}$.

67. Αν $\vec{\alpha}$ = (1, 2) και $\vec{\beta}$ = (3, 4) να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{p}$ και $\vec{q}$ ώστε να ισχύουν συγχρόνως:

α. $\vec{\alpha}=\vec{p}+\vec{q}$ **β.** $\vec{p}//\vec{\beta}$ **γ.** $\vec{q}\perp\vec{\beta}$

68. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ = (–9, 19) σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες η μία να έχει διεύθυνση ίδια με τη διεύθυνση του $\vec{\alpha}$ = (5, –3) .

69. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ = (4, 3) σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\beta}$ = (3, 1) .

70. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$. Να βρείτε το $\vec{x}$ αν $\vec{x}//(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$ και $\vec{\beta}\perp(\vec{\alpha}+\vec{x})$.

71. Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\perp(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=2$, τότε να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}|=\sqrt{3}$ και $|\vec{\beta}|=1$.

72. Αν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$, τότε να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|\sqrt{3}$.

73. Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου, για τα οποία ισχύει καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις:

α. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

β. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

γ. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{AM}=\vec{0}$

74. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\alpha} = \dfrac{\vec{\beta}\cdot\vec{x}}{\vec{\beta}^2}\cdot\vec{\beta} - \vec{x}$ είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$ για κάθε διάνυσμα $\vec{x}$.

75. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μη συγγραμμικά διανύσματα, τότε να αποδείξετε ότι είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση:

$$\left(1+\left(\vec{\alpha}\right)^2\right)x^2 - 2\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|x + \left(1+\left(\vec{\beta}\right)^2\right) = 0$$

76. Αν $\vec{\alpha} = (2, 3)$ και $\vec{\beta} = (-1, 4)$, να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha}$ στο $\vec{\beta}$.

77. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{\delta}$ με $\left|\vec{\delta}\right| = 2\sqrt{10}$ που έχει αναλυθεί σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία είναι η (4, 2) .

78. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ με $\vec{\alpha} = 1$, $\vec{\beta} = 2$, $\vec{\gamma} = 3$. Αν ισχύει ότι $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} - 3\cdot\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha} = -1$.

79. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $6\left|\vec{\alpha}\right| = 3\left|\vec{\beta}\right| = 2\left|\vec{\gamma}\right|$, τότε να αποδείξετε ότι το $\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{\beta}$ και το $\vec{\beta}$ αντίρροπο με το $\vec{\gamma}$.

80. Αν $1 + \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε να λύσετε ως προς $\vec{x}$ την εξίσωση:

$$\vec{x} + (\vec{x}\cdot\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta} = \vec{\gamma}$$

81. **α.** Αποδείξτε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει: $\left|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right| \leq \left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|$.

β. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $A = 6x - 8y$ αν $x^2 + y^2 = 36$.

82. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-3, 4)$, $\vec{\beta} = (2, -5)$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$ ώστε $\vec{x}\cdot\vec{\alpha} = 5$ και $\vec{x}\cdot\vec{\beta} = -8$.

83. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$. Αν $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$, $|\vec{\gamma}|=5$, $2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}-\vec{\gamma}=\vec{0}$ να βρείτε το $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}|$.

84. Έστω τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. Αν τα διανύσματα $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}$, $\vec{\delta}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ σχηματίζουν γωνία $2\pi/3$ να βρείτε την γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

85. Σε πλαγιογώνιο σύστημα αξόνων τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ = (1, 2), $\vec{\beta}$ = (3, 0) είναι κάθετα. Να βρείτε την γωνία των μοναδιαίων διανυσμάτων των αξόνων.

86. Έστω ΑΔ διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ. Αν ισχύει ότι: $(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma})\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=(\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{B\Gamma})\cdot\overrightarrow{AB}$ να αποδείξετε ότι το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με κορυφή το Α.

87. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{B\Delta}$, όπου Δ είναι η προβολή του Α στη ΒΓ τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Α.

88. Αποδείξτε διανυσματικά ότι αν οι διαγώνιες παραλληλογράμμου είναι κάθετες τότε αυτό είναι ρόμβος.

89. Θεωρούμε τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

α. Να δειχθεί ότι: $\left|\frac{1}{|\vec{\alpha}|}\vec{\alpha}\right|=1$.

β. Να δειχθεί ότι το διάνυσμα $\frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}+\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$ είναι παράλληλο στη διχοτόμο της γωνίας των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

90. Δίνονται τα σταθερά σημεία Α, Β με $|\overrightarrow{AB}|=8$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=9$.

91. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. Να δειχθεί ότι το διάνυσμα $\vec{x}=\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\vec{\beta}+\left|\vec{\beta}\right|\cdot\vec{\alpha}$ είναι συγγραμμικό με τη διχοτόμο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

92. Δίνονται τα σημεία $A(-3, 5)$ και $B(4, -2)$. Τότε:

α. Να βρείτε το σημείο Μ του άξονα $y'y$, το οποίο ισαπέχει από τα Α και Β.

β. Να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$ στο $\overrightarrow{MB}$.

γ. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, μια από τις οποίες έχει τη διεύθυνση του $\overrightarrow{MB}$.

93. Αν $\left|\vec{\alpha}\right|=1$, $\left|\vec{\beta}\right|=2$, $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, τότε να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{x}+(\vec{x}\cdot\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=\vec{\gamma}$ και $\vec{x}+(\vec{x}\cdot\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=\vec{\gamma}$.

94. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x+1, 2)$ και $\vec{\beta}=(x, 2x+1)$ με $x\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα δεν είναι συγγραμμικά για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β. Αν $x=-3$, τότε να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$.

γ. Αν $x=-1$, τότε να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}=3\vec{i}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

δ. Αν $x=-2$, τότε να βρείτε ένα διάνυσμα αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ με μέτρο $\sqrt{10}$.

95. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\overrightarrow{AB}=3\vec{\alpha}-4\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=12\vec{\alpha}-5\vec{\beta}$, όπου $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ γνωστά μοναδιαία διανύσματα κάθετα μεταξύ τους.

α. Να εκφραστεί το $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και να υπολογιστούν τα μήκη των πλευρών του τριγώνου.

β. Να εκφραστεί η διάμεσος $\overrightarrow{AM}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και να υπολογιστεί το μήκος της.

96. Θεωρούμε δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ώστε να ισχύουν $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = 4\vec{\beta}$ και $4 \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \vec{\alpha}$. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \left(2\vec{\beta}\right)^2$ και $\left|\vec{\alpha}\right| = 4 \cdot \left|\vec{\beta}\right|$.