ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

B

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Οι ασκήσεις βασίζονται στο αξιόλογο φυλλάδιο του Μαθηματικού **Μιλτ. Παπαγρηγοράκη**, από τις σημειώσεις του για το **4ο Γενικό Λύκειο Χανίων** [2008-09 < Mathematica.gr] , τον οποίο κι ευχαριστώ ιδιαίτερα για το ήθος και την ευχάριστη διάθεση, με την οποία συμβάλλει στην ελεύθερη διάθεση της γνώσης. Για την αντιγραφή: **Κόλλας Αντώνης**.

Κ Υ Κ Λ Ο Σ

1. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Αν έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με $A(1, 3)$ και $B(-3, 5)$.

β. Αν έχει κέντρο το σημείο $(8, -6)$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

2. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Αν έχει κέντρο το σημείο $(-3, 2)$, εφάπτεται στον άξονα $y'y$ και διέρχεται από το σημείο $(-6, 2)$.

β. Αν έχει κέντρο το σημείο $(3, 3)$ και εφάπτεται των αξόνων $x'x$ και $y'y$.

γ. Αν έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται της ευθείας $3x + y = 10$.

δ. Αν έχει κέντρο το σημείο $(-3, 1)$ και εφάπτεται στην ευθεία $4x - 3y + 5 = 0$.

ε. Αν έχει ακτίνα 4, εφάπτεται στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $(5, 4)$.

στ. Αν διέρχεται από τα σημεία $(3, 1)$, $(-1, 3)$ και έχει κέντρο πάνω στην ευθεία $y = 3x - 2$.

ζ. Αν περνά από τα σημεία $(2, 1)$, $(1, 2)$, $\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

3. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στην ευθεία $y = x$ και είναι ομόκεντρος του κύκλου: $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

4. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων:

α. του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $x + y = 0$.

β. του κύκλου $x^2 + y^2 = 9$ που γράφονται από το σημείο $(0, 6)$.

5. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, ο οποίος είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο που σχηματίζει η ευθεία $x + y - 6 = 0$ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

6. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το σημείο $(1, 0)$ και εφάπτεται στις ευθείες $3x + y + 6 = 0$ και $3x + y - 12 = 0$.

7. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ και η ευθεία $y = x - 3$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία εφάπτεται του κύκλου και στη συνέχεια να βρείτε το σημείο επαφής.

8. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει το κέντρο του στην ευθεία $(\varepsilon) : 2x + y + 1 = 0$ και διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 2)$ και $B(3, -1)$.

9. Να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων, οι οποίοι εφάπτονται στον κύκλο $x^2 + y^2 = 25$ στο σημείο $A(3, 4)$ και έχουν ακτίνα $R = 10$.

10. Θεωρούμε τον κύκλο $C : x^2 + y^2 + 4y = 0$ και το σημείο $A(-1, -1)$. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας, που ορίζει στον κύκλο χορδή με μέσο το σημείο A.

11. Να αποδειχθεί ότι οι κύκλοι:

$$C_1 : (x - 2)^2 + y^2 = 4 \text{ και } C_2 : x^2 - 2x + y^2 = 0$$

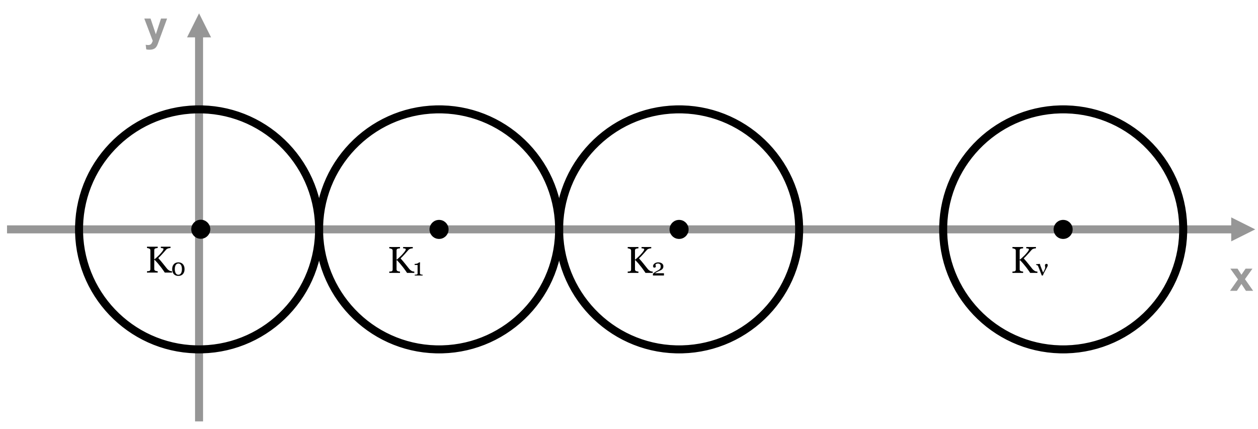
εφάπτονται εσωτερικά.

12. Στο παρακάτω σχήμα ο πρώτος κύκλος C_0 έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$ και όλοι οι κύκλοι είναι ίσοι. Να βρεθούν:

α. οι εξισώσεις των κύκλων $C_1, C_2, \ldots, C_\nu$ συναρτήσει του ρ.

β. το άθροισμα των αποστάσεων των κέντρων $K_1, K_2, \ldots, K_\nu$ από το κέντρο O.

γ. οι κοινές εφαπτόμενες όλων των κύκλων.



13. Δίνεται ο κύκλος C : $x^2 + y^2 = 4$ και το σημείο A (8, –6) . Να βρείτε σημείο M του κύκλου C τέτοιο, ώστε η απόσταση (AM) να είναι ελάχιστη.

14. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο:

α. των σημείων M για τα οποία ισχύει $|\overrightarrow{MA}| = 2$, όπου A (2, 1) .

β. των σημείων M για τα οποία ισχύει $MA \perp MB$, όπου A (1, 0) και B (–1, 0) .

γ. των σημείων M για τα οποία ισχύει (MA) = 2 (MB) , όπου A (1, 2) και B (3, 1) .

δ. των μέσων M των ευθύγραμμων τμημάτων AB μήκους 8 , των οποίων τα άκρα A και B κινούνται στους άξονες x΄x και y΄y .

15. **A.** Είναι $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-1)x+(2-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})y+4=0$ (1) , με $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ $\in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι όλες οι παραπάνω ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο.

β. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ μοναδιαία διανύσματα και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\dfrac{\pi}{3}$, τότε να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που παριστάνει η (1).

B. Δίνεται ο κύκλος $(x – \kappa)^2 + (y + 2)^2 = 1/10$. Να βρείτε την τιμή του κ , έτσι ώστε η ευθεία του ερωτήματος (β) να εφάπτεται του παραπάνω κύκλου.

16. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\varphi\in\mathbb{R}$ τα σημεία M (2 + 3συνφ , 3ημφ – 4) βρίσκονται σε κύκλο και να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του.

17. Από τυχαίο σημείο M του επιπέδου Oxy φέρνουμε τη $MA \perp y΄y$ και τη MB κάθετη στην ευθεία y = x . Αν (AB) = 4 να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου M.

18. Δίνεται κύκλος C : $x^2 + y^2 = 4$ και σημείο K (5, 0) . Από το K φέρνουμε τυχαία ευθεία που τέμνει τον C στα σημεία A και B. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών AB.

19. να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x = 0$ παριστάνει κύκλο, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}^*$. Να βρεθεί η γραμμή πάνω στην οποία βρίσκονται τα κέντρα αυτών των κύκλων.

20. Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in [-1, 1]$, οι ευθείες $\lambda x + \left(\sqrt{1-\lambda^2}\right)y = 1$, εφάπτονται σε σταθερό κύκλο.

21. Δίνεται η εξίσωση $C : x^2 + y^2 + (\lambda - 2)x - 2(\lambda + 2)y + 13\lambda - 20 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Να βρείτε το κέντρο του παραπάνω κύκλου και να αποδείξετε ότι αυτό κινείται σε μία ευθειά, καθώς το λ μεταβάλλεται.

γ. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C διέρχεται από δύο σταθερά σημεία.

22. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$C : x^2 + y^2 - 16 + \lambda\cdot(x^2 + y^2 - 8x - 8y + 16) = 0$$

παριστάνει κύκλο, για κάθε $\lambda \neq -1$, ο οποίος διέρχεται από τα σημεία τομής των κύκλων:

$$C_1 : x^2 + y^2 = 16 \quad \text{και} \quad C_2 : (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$$

23. **Α.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$, όπου μ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή των μ και λ, η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλου που διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο.

Β. Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς μ και λ ισχύει η σχέση $3\mu + 2\lambda = 0$.

α. Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι, που ορίζονται από την εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$ για τις διάφορες τιμές των μ και λ, έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β. Να βρείτε τα μ, λ έτσι, ώστε αν Α, Β είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία $x + y + 2 = 0$, να ισχύει $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$.

γ. Για τις τιμές των μ, λ που βρήκατε στο ερώτημα (β) να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ.

24. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon) : y = x + 2$ και ο κύκλος $C : x^2 + y^2 + \lambda x - \lambda y = 0$. Να προσδιορίσετε το λ, ώστε:

α. η (ε) να τέμνει τον κύκλο C.

β. η χορδή που ορίζει η (ε) στον κύκλο C να φαίνεται από την αρχή των αξόνων υπό ορθή γωνία.

25. Δίνεται η εξίσωση $C : x^2 + y^2 + 2x - 3y - 1 + \kappa\cdot(x + y - 2) = 0$.

α. Να αποδείξετε ότι η C παριστάνει κύκλο, για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$ και να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του κέντρου του, καθώς και την ακτίνα του.

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων.

γ. Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι διέρχονται απο δύο σταθερά σημεία.

26. **Α.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x - 2\alpha y + 2\alpha = 4$ παριστάνει κύκλο, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

Β. Για ποια τιμή του α ο παραπάνω κύκλος εφάπτεται:

α. του άξονα $x'x$.

β. της ευθείας $y = -x$.

27. Θεωρούμε τον κύκλο $C : x^2 + y^2 = 4$ και την ευθεία $(\varepsilon) : y = 2x + 5$.

α. Να δείξετε ότι ο κύκλος και η ευθεία δεν έχουν κοινό σημείο.

β. Από ένα σημείο Μ της ευθείας (ε) φέρνουμε τις εφαπτόμενες στον κύκλο και ονομάζουμε Α και Β τα σημεία επαφής. Να δείξετε ότι, όταν το σημείο Μ διαγράφει την ευθεία (ε), η ευθεία ΑΒ διέρχεται από ένα σταθερό σημείο.

28. Δίνονται οι κύκλοι:

$$C_1 : x^2 + y^2 = 1 \quad \text{και} \quad C2 : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

α. Να δείξετε ότι δεν έχουν κοινό σημείο.

β. Να βρείτε την εξίσωση της διακέντρου.

γ. Από όλα τα ζεύγη σημείων (Α, Β) , όπου το Α ανήκει στον C_1 και το Β στον C_2 , να βρεθεί αυτό για το οποίο τα Α, Β απέχουν τη μικρότερη απόσταση.

δ. Να βρεθεί, αναλόγως, το ζεύγος σημείων (Γ, Δ) , όπου το Γ ανήκει στον C_1 και το Δ στον C_2 , με τη μεγαλύτερη απόσταση.

29. Δίνονται τα σημεία $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$ και $M_1(1, \sqrt{3})$.

α. Να δείξετε ότι $M_1A \perp M_1B$.

β. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου, που περνά από τα σημεία A, B, M_1 .

γ. Να δείξετε ότι το σημείο $M_2\ (-1,\ \sqrt{3}\,)$ ανήκει στον κύκλο και ότι $M_2A \perp M_2B$.

δ. Να δείξετε ότι κάθε σημείο $M\ (x_0,\ y_0)$ για το οποίο ισχύει $MA \perp MB$, ανήκει στον κύκλο του ερωτήματος (β).

30. Ο κύκλος $C : x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ έχει το κέντρο του στην ευθεία $y = x$ μόνο όταν $\alpha = \beta$.

31. Οι κύκλοι:

$$C_1 : x^2 + y^2 = \alpha^2 \quad \text{και} \quad C_2 : (x-5)^2 + (y-12)^2 = 64$$

εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο, που βρίσκεται μεταξύ της αρχής O και του κέντρου K του C_2 . Να βρείτε το α και τις συντεταγμένες του σημείου επαφής.

32. **α.** Να βρείτε για ποιες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ η εξίσωση:

$$C : x^2 + y^2 - 2\kappa x - 4(\kappa+1)y + 3\kappa + 14 = 0$$

παριστάνει κύκλο. Να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του.

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων C.

Π Α Ρ Α Β Ο Λ Η

1. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή το (0, 0) στις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Αν είναι συμμετρική ως προς το θετικό ημιάξονα Οx και έχει παράμετρο $p = 5$.

β. Αν είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Οx και διέρχεται από το σημείο (–1, 4) .

γ. Αν είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Οy και δειέρχεται από το σημείο (2, 2) .

δ. Αν έχει άξονα συμμετρίας τον Οy και εστία Ε (0, –4) .

ε. Αν έχει εστία Ε (–2, 0) και διευθετούσα $\delta : x - 2 = 0$.

στ. Αν έχει άξονα συμμετρίας τον Οx και εφάπτεται της ευθείας $y = 4x + 1$.

2. Ισόπλευρο τρίγωνο ΟΑΒ είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή $y^2 = 4px$ με κορυφή το Ο. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

3. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$. Να βρείτε:

α. την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής.

β. τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\sqrt{2}/2$.

γ. την εξίσωση της εφαπτόμενης της παραβολής, που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x - 1$.

4. Από το σημείο (–2, 3) προς την παραβολή $y^2 = 8x$ γράφονται δύο εφαπτόμενες ευθείες.

α. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων αυτών ευθειών.

β. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές ευθείες είναι κάθετες.

5. Να βρεθεί η σχετική θέση της ευθείας $x + y + 1 = 0$ ως προς την παραβολή $y^2 = 2x$.

6. Αν $\alpha \neq 0$, να αποδείξετε ότι το σημείο $M\left(\frac{2\alpha}{\lambda^2}, \frac{2\alpha}{\lambda}\right)$, με α σταθερό, κινείται σε παραβολή, όταν το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}^*$.

7. Έστω η παραβολή $C : y^2 = 2px$ και μια χορδή της ΑΒ παράλληλη με τον άξονα $y'y$, η οποία περνάει από την εστία. Να αποδειχθεί ότι:

α. (ΑΒ) = 2(ΕΚ), όπου Κ το σημείο που τέμνει ο άξονας $x'x$ τη διευθετούσα.

β. οι εφαπτόμενες στα Α και Β διέρχονται από το Κ.

8. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και η ευθεία $(\varepsilon) : y = x - 1$.

α. Να δείξετε ότι η (ε) περνά από την εστία της παραβολής.

β. Να βρείτε τα κοινά σημεία Α, Β της (ε) και της παραβολής.

γ. Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία Α, Β είναι κάθετες.

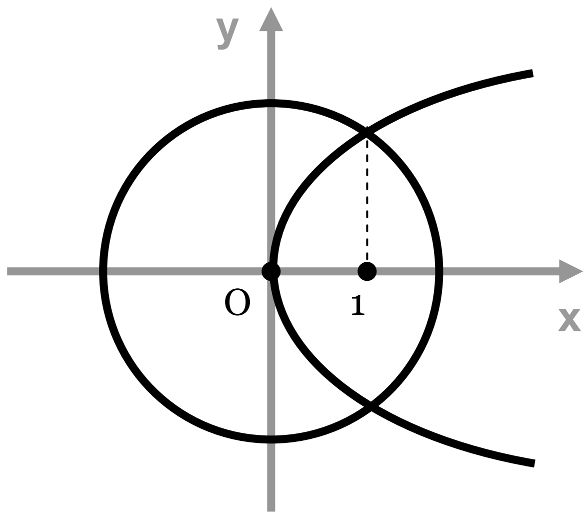
δ. Να δείξετε ότι κάθε ευθεία, που περνά από την εστία και τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία έχει την ιδιότητα (γ).

9. Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $(x, y) = (2p\kappa^2, 2p\kappa)$ με $\kappa \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία αυτά ανήκουν σε μία παραβολή.

β. Αν $A(2p\kappa_1^2, 2p\kappa_1)$, $B(2p\kappa_2^2, 2p\kappa_2)$ είναι δύο σημεία της παραβολής αυτής, να αποδειχθεί ότι αν η ΑΒ διέρχεται από την εστία, είναι $4\kappa_1 \cdot \kappa_2 = -1$.

10. Ο κύκλος του διπλανού σχήματος διέρχεται από την εστία της παραβολής. Να βρεθούν οι εξισώσεις του κύκλου και της παραβολής.



11. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$ και δύο χορδές ΟΒ, ΟΓ, ώστε η γωνία ΒΟΓ να είναι ορθή. Να αποδειχθεί ότι η ΒΓ διέρχεται από σταθερό σημείο.

12. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής ΑΒ της παραβολής $y^2 = 8x$, η οποία έχει ως μέσο το Μ (4, 1) .

13. Δίνεται σταθερό σημείο Α και ευθεία (ε), που δε διέρχεται από το Α. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων, που διέρχονται από το Α και εφάπτονται στην (ε), είναι παραβολή.

Ε Λ Λ Ε Ι Ψ Η

1. Να βρεθεί η εκκεντρότητα και οι εστίες καθεμίας από τις ελλείψεις:

α. $x^2 + 4y^2 = 4$ β. $4x^2 + 9y^2 = 36$

γ. $9x^2 + 25y^2 = 225$

2. Ο κύκλος με κέντρο το Ο (0, 0) και ακτίνα β διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, με $\alpha > \beta$. Να βρεθεί η εκκεντρότητά της.

3. Να αποδείξετε ότι οι ελλείψεις $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $\frac{\kappa^2x^2}{\alpha^2}+\frac{\kappa^2y^2}{\beta^2}=1$ έχουν την ίδια εκκεντρότητα.

4. Να συγκριθούν οι εκκεντρότητες των ελλείψεων C_1 : $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και C_2 : $\frac{x^2}{\alpha^4}+\frac{y^2}{\beta^4}=1$, με $\alpha > \beta$.

5. Να βρεθεί η μορφή της εξίσωσης έλλειψης με εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ και η έλλειψη $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{6}=1$ (1) .

α. Να αποδείξετε ότι το σημείο $(1, -\sqrt{3})$ είναι κοινό τους σημείο και στη συνέχεια να βρείτε όλα τα κοινά σημεία.

β. Να αποδείξετε ότι τα κοινά τους σημεία είναι κορυφές ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

γ. Να βρεθούν τα σημεία Μ (x_0 , y_0) ώστε $x_0^2 + y_0^2 = 4$ και $(E'M) + (EM) = 2\sqrt{6}$, όπου Ε΄ και Ε οι εστίες της έλλειψης (1).

7. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της έλλειψης $9x^2 + 16y^2 = 144$ που είναι:

α. παράλληλες προς την ευθεία (ε) : $x + y = 0$.

β. κάθετες στην ευθεία (ε) .

Υ Π Ε Ρ Β Ο Λ Η

1. Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 16$ διέρχεται από τις κορυφές μιας υπερβολής C με εστίες στον άξονα $y'y$, της οποίας η μία ασύμπτωτη έχει εξίσωση $y = -\frac{4}{3}x$. Να βρεθούν:

α. οι εστίες της υπερβολής.

β. η εστιακή της απόσταση.

γ. η εξίσωσή της.

δ. το ορθογώνιο βάσης της υπερβολής.

ε. η εκκεντρότητά της.

2. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής, που έχει τις εστίες της στον άξονα $x'x$, συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων και ακόμα:

α. έχει εστιακή απόσταση $(E'E) = 7$ και $\varepsilon = 3/2$.

β. έχει εστιακή απόσταση $(E'E) = 20$ και εξισώσεις ασύμπτωτων $y = 4/3\,x$ και $y = -4/3\,x$.

γ. έχει εστιακή απόσταση $(E'E) = 4$ και ασύμπτωτες τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων.

3. Να βρείτε την υπερβολή, η οποία διέρχεται από τα σημεία Κ(3, 1) και Λ (9, 5) .

4. Έστω Μ τυχαίο σημείο της υπερβολής $y^2 - x^2 = \alpha^2$, (ε) η εφαπτόμενη στο Μ και Α, Β τα σημεία στα οποία η (ε) τέμνει τις ασύμπτωτες. Τότε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι σταθερό.

5. Δίνεται η υπερβολή C : $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, Μ (x_1 , y_1) ένα σημείο της διαφορετικό από τις κορυφές της και (ε) η εφαπτόμενη της C στο Μ. Αν η κάθετη (ε΄) της (ε) στο Μ τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$ στα Γ και Δ αντίστοιχα, τότε:

α. να βρεθεί, συναρτήσει των x_1 , y_1 , η εξίσωση της (ε΄).

β. να βρεθούν οι συντεταγμένες των Γ, Δ.

γ. να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου Ν του ΓΔ.

δ. να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος του Ν είναι μια υπερβολή C_1 .

ε. να αποδειχθεί ότι οι υπερβολές C και C_1 έχουν τις ίδιες εκκεντρότητες, αλλά τις εστίες σε διαφορετικούς άξονες.

6. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου, που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ και την ευθεία $y = 2$.

7. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $2x^2 - 4y^2 = 100$, που είναι παράλληλες προς την ευθεία $3x - y = 0$.

8. Να βρείτε την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής, που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

9. Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με κλάδους C_1 και C_2 και τυχαίο σημείο της $M (x_1 , y_1)$ στον κλάδο C_1 ($y_1 \neq 0$) .

α. Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτόμενης (ε) στο σημείο Μ και να βρείτε τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες.

β. Να δείξετε ότι η (ε) τέμνει τον $x'x$ σε σημείο μεταξύ των κορυφών της υπερβολής.

γ. Με δεδομένο ότι η (ε) τέμνει τον κλάδο C_2 στο $M' (x_2 , y_2)$, να δείξετε ότι $y_1 \cdot y_2 < 0$.

10. Έστω η υπερβολή $C : x^2 - y^2 = 1$ και η ευθεία $(\varepsilon) : x + 2y = \alpha$. Να βρεθούν οι τιμές του α, για τις οποίες η (ε) εφάπτεται στη C .

11. Δίνεται η παραβολή με εστία $E (2p, 0)$, $p > 0$.

α. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής, της οποίας η μία εστία της συμπίπτει με την εστία της παραβολής και η μία κορυφή της συμπίπτει με το μέσο ΕΟ, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

β. Να βρείτε την αμβλεία γωνία των ασύμπτωτων ευθειών της υπερβολής.

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της παραβολής και της υπερβολής.