Επαναληπτικά – συνδυαστικα θέματα

Θέμα 1ο

Α. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μη μηδενικά διανύσματα και ισχύει $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|+|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=1$, τότε να δείξετε ότι:

i. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\leq\frac{1}{4}$ και **ii.** Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ τότε ισχύει $\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2=\frac{1}{4}$.

Β. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε η εξίσωση $(\lambda^2+\lambda-2)x+(\lambda^2-4)y+\lambda(\lambda+2)=0$

i. Να παριστάνει ευθεία
ii. Να είναι παράλληλη στη $x'x$
iii. Να είναι παράλληλη στον $y'y$
iv. Να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Θέμα 2ο

Α. Αν $\vec{\beta}\neq 0$ και $\vec{\alpha}=\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$ με $\vec{\alpha}_1 // \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}_2\perp\vec{\beta}$ αποδείξτε ότι

$$\vec{\alpha}_1=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2}\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \vec{\alpha}_2=\vec{\alpha}-\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2}\vec{\beta}.$$

Β. Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις :

$$(\varepsilon_1): \alpha x+\beta y=1 \text{ και } (\varepsilon_2): 2\beta x+(\alpha-\beta)y=-2 \text{ με } \alpha,\beta\in R \text{ και } \beta\neq 0,\ \alpha\neq\beta.$$

i. Βρείτε σχέση μεταξύ των α, β ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.
ii. Υπάρχουν τιμές των α, β ώστε οι ευθείες να ταυτίζονται;
iii. Στην περίπτωση που οι ευθείες τέμνονται να αποδείξετε ότι το σημείο τομής τους κινείται σε σταθερή ευθεία.

Θέμα 3ο

Α. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ του επιπέδου, επαληθεύουν την σχέση $(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\vec{\beta}=\vec{\gamma}+\vec{x}$ (1).

i. Να αποδείξετε ότι: $(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}-1)(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})=\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$

ii. Εάν $\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}\neq 1$, να εκφράσετε το $\vec{x}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$.

Β. Να βρείτε ένα σημείο Μ της έλλειψης $c: \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, τέτοιο ώστε να ισχύει $E'\widehat{M}E=90^o$.

Θέμα 4ο

Α. Σε τρίγωνο ΑΒΓ οι κορυφές είναι $A(0,2)$, $B(2,2)$ και $\Gamma\left(3+\sqrt{3},3+\sqrt{3}\right)$. Να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου.

Β. Μεταβλητά σημεία Α και Β ολισθαίνουν πάνω στους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα έτσι ώστε $\dfrac{1}{(OA)}+\dfrac{1}{(OB)}=\lambda$, με λ σταθερό και $\lambda \in R^*$. Να δείξετε ότι η ευθεία ΑΒ διέρχεται από σταθερό σημείο.

Θέμα 5ο

Α. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ και ισχύει $(2+\kappa)\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}+(\kappa-\lambda)\overrightarrow{B\Gamma}=\vec{0}$, υπολογίστε τους πραγματικούς κ, λ.

Β. Βρείτε την υπερβολή με εστίες στον y΄y ,όταν διέρχεται από το σημείο $M\left(4,\sqrt{2}\right)$ και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y=\dfrac{1}{4}x$ και $y=-\dfrac{1}{4}x$.

Θέμα 6ο

Α. Αν $|\vec{\rho}|=1$, $|\vec{q}|=\sqrt{2}$ και η γωνία $(\vec{\rho},\vec{q})=45^o$, να βρείτε τη γωνία $\left(\widehat{\vec{\rho}-\vec{q},\vec{q}}\right)$.

Β. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: 4k^2x-4ky+30=0$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $k\in R^*$ εφάπτεται στην παραβολή $C_1: y^2=30x$, κατόπιν να βρεθούν οι κοινές εφαπτομένες της C_1 και του κύκλου $C_2: (x+1)^2+y^2=1$.

Θέμα 7ο

Ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ μια πλευρά βρίσκεται στην ευθεία $\varepsilon: x-2y+12=0$, το κέντρο του Κ είναι το σημείο $(1,-1)$ και μια κορυφή του είναι η $\Lambda(4,8)$. Να βρεθούν οι άλλες κορυφές του.

Θέμα 8ο

Α. Αν $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|=\sqrt{3}$, $|\vec{\gamma}|=2$ και $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\left(\vec{\beta},\vec{\gamma}\right)=\dfrac{\pi}{4}$, να βρεθεί το μέτρο του $2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+\vec{\gamma}$.

Β. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που εφάπτεται στην ευθεία $c: x-y+1=0$ και έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

Θέμα 9ο

Α. Αν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=2$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, να βρεθεί το μέτρο του $2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+\vec{\gamma}$.

Β. Να αποδειχθεί ότι ο λόγος των αποστάσεων τυχαίου σημείου Μ της έλλειψης $C: \dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ από την εστία Ε και την ευθεία $\delta: x=\dfrac{\alpha^2}{\gamma}$ είναι ίσος με $\dfrac{\gamma}{\alpha}$.

Θέμα 10ο

Α. Έστω $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = 60^o$. Προσδιορίστε το $x \in R$ στις παρακάτω περιπτώσεις.

i. Αν $(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})(\vec{\alpha}-x\vec{\beta}) = 2$ και **ii.** Αν $(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha}-x\vec{\beta})$

Β. Δίνεται η εξίσωση $\kappa(x+2y)+\lambda(x+2y)-3x-5y+1=0$, $\kappa,\lambda \in R$.

α. Να δειχθεί, ότι παριστάνει ευθεία για κάθε $\kappa,\lambda \in R$.

β. Να δειχθεί ότι όλες οι ευθείες της παραπάνω μορφής διέρχονται από σταθερό σημείο.

Θέμα 11ο

Α. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ του επιπέδου ισχύουν $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $3|\vec{\alpha}| = 4|\vec{\beta}| = 12|\vec{\gamma}|$, να αποδειχθεί ότι: i. $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ και ii. $\vec{\beta} \parallel \vec{\gamma}$.

Β. Οι κορυφές Α, Γ τετραγώνου ΟΑΒΓ βρίσκονται αντίστοιχα στους άξονας $x'x$ και $y'y$ συστήματος συντεταγμένων xOy και η διαγώνιος ΑΓ περνά από το σημείο $P(1,2)$. Υπολογίστε τις συντεταγμένες των κορυφών του τετραγώνου.

Θέμα 12ο

Α. Έστω $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$ με $12x_1 - 5y_1 + 1 = 0$ και $12x_2 - 5y_2 - 25 = 0$, να αποδειχθεί ότι:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \geq 4$$

Β. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 - 4\lambda y - 2\lambda x - 3\lambda^2 = 0$, $\lambda \in R$

α. Δείξτε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) κάθετες μεταξύ τους για κάθε $\lambda \in R$.

β. Αν Β και Γ σημεία των ευθειών ε_1 και ε_2 αντίστοιχα με τετμημένη $\lambda+1$,δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α και έχει σταθερό εμβαδόν , για κάθε $\lambda \in R$.

γ. Για κάθε $\lambda \in R$ δείξτε ότι το Α κινείται σε σταθερή ευθεία.

Θέμα 13ο

Δίνεται η εξίσωση $C: \dfrac{x^2}{\lambda+4} + \dfrac{y^2}{\lambda+5} = 1$.

α. Για ποιές τιμές των $\lambda \in R$ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει υπερβολή;

β. Για τις παραπάνω τιμές των λ να βρεθούν οι εστίες της.

Θέμα 14ο

Α. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ισχύει $|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot |\vec{\gamma}| = 1$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 \geq 3$.

Β. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τις ευθείες $\varepsilon_1 : x - \lambda y = 0$ και $\varepsilon_2 : x + 2y = 0$ είναι ίσος με 2.

Θέμα 15ο

Α. Στο σύστημα αναφοράς Οxy θεωρούμε τα σημεία $Α(3,2)$, $Β(1,0)$ και $Γ(0,4)$. Η ΑΓ τέμνει τον Οx στο Δ και η ΑΒ τον Οy΄ στο Ε.

α. Να βρείτε την τετμημένη του Δ και την τεταγμένη του Ε.

β. Αν Ι το μέσο του ΟΑ, Μ το μέσο του ΒΓ και Κ το μέσο του ΕΔ, να δείξετε ότι τα σημεία Ι, Μ, Κ είναι συνευθειακά.

Β. Μια μεταβλητή ευθεία $y=λx+β$ τέμνει την παραβολή $C: y^2=4x$ στα σημεία Α, Β. Να δειχθεί ότι οι συνεταγμένες του μέσου Μ της ΑΒ είναι $\left(\frac{2-λβ}{λ^2},\frac{2}{λ}\right)$. Κατόπιν να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του Μ στις παρακάτω περιπτώσεις :

i. όταν είναι $λ=1$ και $β\in R$ και **ii.** όταν $β=0$ και $λ\in R^*$.

Θέμα 16ο

Α. Έστω τα σημεία $Α(3,-4)$, $Β\left(-\frac{7}{2},-2\right)$, $Γ\left(0,-\frac{8}{5}\right)$, $Δ\left(-\frac{13}{4},-\frac{3}{5}\right)$

i. Να δείξετε ότι $\overrightarrow{ΑΒ}\,//\,\overrightarrow{ΓΔ}$

ii. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Ε, ώστε το ΟΒΑΕ να είναι παραλληλόγραμμο.

iii. Να δείξετε ότι το σημείο $Ζ\left(\frac{13}{5},-\frac{12}{5}\right)$ βρίσκεται πάνω στην ευθεία ΓΔ.

Β. Βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ, όταν $Α(4,1)$ και ένα ύψος του και μια διάμεσός του έχουν εξισώσεις $y=-x-1$ και $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ αντίστοιχα.

Θέμα 17ο

Α. Αν $\vec{v}_1=2\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{v}_2=2\vec{i}-5\vec{j}$, $\vec{v}_3=-5\vec{i}-\vec{j}$ να βρεθούν :

i. Οι συνεταγμένες, τα μέτρα και οι συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων:

$$\vec{w}_1=2\vec{v}_1+3\vec{v}_2\ ,\quad \vec{w}_2=2\vec{v}_2-3\vec{v}_3\ ,\quad \vec{w}_3=2\vec{v}_3+3\vec{v}_1\ .$$

ii. Το μέτρο $\left|\vec{w}_1-\vec{w}_2+\vec{w}_3\right|$.

Β. Ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ ($\hat{Α}=90^o$) είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή $C: y^2=2px$, $p>0$. Αν η κορυφή Α έχει συντεταγμένες $(2,p)$ να βρεθεί η εξίσωση της πλευράς ΑΒ.

Θέμα 18ο

Α. Έστω παρ/μο ΑΒΓΔ. Στις απέναντι πλευρές του ΑΔ και ΒΓ παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα τέτοια ώστε : $\overrightarrow{ΑΕ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{ΑΔ}$ και $\overrightarrow{ΒΖ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{ΒΓ}$. Αν $\overrightarrow{ΑΔ}=(3,0)$ και $\overrightarrow{ΑΒ}=(1,4)$, να βρεθούν οι συντεταγμένες του $\overrightarrow{ΑΡ}$, όταν $\overrightarrow{ΕΡ}=2\overrightarrow{ΡΖ}$.

Β. Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1): x+y-3=0\ ,\ (\varepsilon_2): 3x-y-1=0 \text{ και } (\varepsilon_3): (2\mu-1)x+(2-\mu)y+\mu=0$$

α. Να βρεθεί το $\mu\in R$, ώστε οι τρείς ευθείες να διέρχονται από το ίδιο σημείο.

β. Από όλες τις ευθείες του επιπέδου, που διέρχονται από το παραπάνω σημείο, να βρεθούν εκείνες που σχηματίζουν με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

Θέμα 19ο

Α. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ έχει το ίδιο μήκος με το διάνυσμα $\vec{\beta}=(8,-6)$ και την διεύθυνση του $\vec{\gamma}=(2,\ 2\sqrt{3})$. Να υπολογισθούν οι συντεταγμένες του.

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2+y^2+2xy-3x-3y+2=0$ παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες και στη συνέχεια να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου που σχηματίζουν οι ευθείες αυτές με τους άξονες.

Θέμα 20ο

Α. Έστω σημεία Α και Β της ευθείας $x-\frac{2}{3}y=\frac{7}{3}$ με $x_A=1$ και $x_B=2$. Να βρεθεί σημείο Μ τέτοιο ώστε $2\vec{MA}+3\vec{MB}=4\vec{AB}$.

Β. Ορθογώνιο ΟΑΒΓ έχει σταθερή περίμετρο 2κ και τις κορυφές του Α, Γ στους θετικούς ημιάξονες Οx, Oy αντίστοιχα. Δείξτε ότι η κάθετος από το Β στη διαγώνιο ΑΓ περνά από σταθερό σημείο.

Θέμα 21ο

Α. Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(x,y)$ με $x=3+\sigma\upsilon\nu 2\theta$ και $y=1+\sigma\upsilon\nu 2\theta$, $\theta\in R$ βρίσκεται για κάθε $\theta\in R$ πάνω σε ευθειά.

Β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x_0,y_0)$ των οποίων η απόσταση από τον $y'y$ ισούται με το μήκος της εφαπτόμενης ΜΑ στον κύκλο $C:(x-1)^2+y^2=1$.

Θέμα 22ο

Α. Δίδονται τα σημεία $A(2,3)$ και $B(1,-4)$. Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων για τα οποία ισχύει $\vec{MA}^2-\vec{MB}^2=5$.

Β. α. Η προβολή της αρχής των αξόνων στην ευθεία (ε), είναι το σημείο $(2,3)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε.

β. Δίνεται η ευθεία (ε) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ και το σημείο $A(3,1)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού του Α ως προς την ευθεία (ε).

Θέμα 23ο

Α. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει κορυφή $A(1,2)$ και οι εξισώσεις των δύο διαμέσων του είναι $y=1$ και $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του.

Β. Αν ο κύκλος $c:(x+8)^2+(y-6)^2=\rho^2$ εφάπτεται στον κύκλο c_1 που έχει κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ, να βρείτε :

α. Την ακτίνα ρ.

β. Τα σημεία της ευθείας $y=2x-5$ απο τα οποία οι εφαπτόμενες προς τον κύκλο c_1 είναι κάθετες.

(**Απ.: α.** $\rho=5$, **β.** $(-1,-7),(5,5)$)

Θέμα 24ο

Α. Οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται οι πλευρές ενός ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2, λ_3. Να αποδείξετε ότι $\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1=-3$.

Β. Θεωρούμε την έλλειψη $c:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ και έστω Μ ένα τυχαίο σημείο της. Να δειχτεί ότι ο γεωμετρικός τόπος ορθόκεντρων των τριγώνων A_1MA_2 (A_1, A_2 είναι σημεία τομής της έλλειψης με τον άξονα x΄x) είναι επίσης έλλειψη.

Θέμα 25ο

Α. Αν $B(2,6)$ και οι εξισώσεις του ύψους και της διχοτόμου της γωνίας που φέρνουμε από την ίδια κορυφή είναι αντίστοιχα $y=\frac{1}{7}x+\frac{15}{7}$ και $y=-7x-5$. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου.

Β. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής: $y^2=2px$ $(p>0)$ που εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: 3x-2y+3=0$.

Θέμα 26ο

Α. Έστω $M(\alpha,\beta)$ με $\alpha, \beta\neq 0$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Μ και τέμνει τους άξονες σε σημεία τα οποία ορίζουν ευθύγραμμο τμήμα που έχει μέσο το Μ.

Β. Δίνονται τα σημεία $K(\sqrt{7},0)$ και $\Lambda(-\sqrt{7},0)$. Να βρεθούν τα σημεία $M(x,y)$ που απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση $\frac{12\sqrt{2}}{5}$ και για τα οποία ισχύει $(MK)+(M\Lambda)=8$. Κατόπιν να βρεθεί το είδος του τετραπλεύρου που αυτά ορίζουν.

Θέμα 27ο

Α. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ, όταν $A(-4,-5)$ και τα δύο ύψη του έχουν εξισώσεις $y=-x+1$ και $y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$.

Β. Δίνεται η παραβολή $C: y^2=12x$ και το σημείο $A(4,2)$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ε που περνάει από το Α και τέμνει τη C στα Β, Γ έτσι ώστε το Α να είναι μέσο του ΒΓ.

Θέμα 28ο

Α. Βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ αν $A(1,2)$ και οι εξισώσεις του ύψους και της διαμέσου που φέρνουμε από την ίδια κορυφή, είναι αντίστοιχα $y=2x+4$ και $y=-x+1$.

Β. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2\lambda x+(\lambda-1)y+3\kappa+2=0$, $\varepsilon_2: (1-2\lambda)x-(\lambda+2)y+\lambda=0$. Να βρεθούν οι $\kappa,\lambda\in R$ ώστε οι ευθείες ε_1 και ε_2

α. Να τέμνονται **β.** Να είναι παράλληλες.

Θέμα 29ο

Α. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας που περνάει από το $A(3,0)$ και η οποία τέμνει τις ευθείες με εξισώσεις $y=2x-2$ και $y=-x-3$ στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα, έτσι ώστε το Α να είναι μέσον του ΒΓ.

Β. Έστω παραβολή $C_1: y^2=2px$. Να βρεθεί ο τύπος που δίνει την απόσταση τυχαίου σημείου Μ της παραβολής από τη εστία Ε. Κατόπιν να αποδειχθεί ότι, ο κύκλος με διάμετρο τυχαία χορδή ΑΒ της παραβολής, που διέρχεται από την εστία, εφάπτεται της διευθετούσας.

Θέμα 30ο

Α. Οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) που διέρχονται από την αρχή των αξόνων και έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα, τέμνουν την ευθεία $(\varepsilon): y=\alpha$ στα σημεία Α και Β, αντίστοιχα. Οι κάθετες στις (ε_1) και (ε_2) στα Α και Β αντίστοιχα τέμνονται στο Γ.

Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του Γ είναι $\left(\frac{\alpha(\lambda_1+\lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2}, \frac{\alpha(\lambda_1\lambda_2-1)}{\lambda_1\lambda_2}\right)$.

Β. Έστω τρίγωνο ΑΟΒ ορθογώνιο (κορυφής Ο) και ισοσκελές. Αν το ΑΟΒ είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή $C: y^2=2x$, να βρεθούν οι συντεταγμένες των Α και Β.

Θέμα 31ο

Α. Οι δύο πλευρές ενός παραλληλογράμμου έχουν εξισώσεις: $y = 2x + 5$ και $y = \frac{1}{2}x + 2$. Το δε σημείο τομής των διαγωνίων του έχει συντεταγμένες $(1, 4)$. Να βρείτε:

α. Τις εξισώσεις των άλλων πλευρών και των διαγωνίων.

β. Τις εξισώσεις των υψών του.

Β. Έστω $C: y^2 = 2px$ και $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ σημεία της. Να αποδειχθεί ότι η ΑΒ περνά από την εστία Ε της C αν και μόνο αν ισχύει $y_1 y_2 = -p^2$. Κατόπιν να υπολογισθεί το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$.

Θέμα 32ο

Α. Οι συντεταγμένες των σημείων $A(\alpha, 2)$, $B(\beta, 3)$ και $\Gamma(\gamma, 1)$ με την σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Να τοποθετήσετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερό τους συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών ΑΒ, ΓΒ και ΑΓ.

Β. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τον περιγεγραμμένο κύκλο του με κέντρο Ο και ακτίνα R. Να αποδείξετε ότι $\text{συν}2A + \text{συν}2B + \text{συν}2\Gamma \geq -\frac{3}{2}$.

Θέμα 33ο

Α. Θεωρούμε τα σημεία $B(\alpha, \beta)$ και $\Gamma(\gamma, \beta)$ με α, β, γ ακέραιους και $\gamma > \alpha$. Αν $A(\kappa, \lambda)$ είναι σημείο του καρτεσιανού επιπέδου, τέτοιο ώστε $|\vec{AB}| = |\vec{B\Gamma}| = |\vec{\Gamma A}|$, να αποδείξετε ότι οι κ και λ δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα ακέραιοι.

Β. Έστω η παραβολή $C: y^2 = 4x$ και $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ σημεία της για τα οποία ισχύει $y_1 + y_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Να δειχθεί ότι η ΑΒ σχηματίζει σταθερή γωνία με τον $x'x$ και να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Μ της ΑΒ.

Θέμα 34ο

Α. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in R$ τις σχετικές θέσεις των ευθειών:

$$\varepsilon_1 : x + y = 1,\ \varepsilon_2 : x + y = \kappa,\ \varepsilon_3 : \kappa x + y = 1.$$

Β. Στην έλλειψη $x^2 + 5y^2 = 20$, να βρείτε σημεία της Μ τέτοια ώστε: $ME' \perp ME$ όπου Ε και Ε΄ είναι οι εστίες της έλλειψης.

Θέμα 35ο

Α. Για ποια τιμή του $\kappa \in R$ οι ευθείες: $\varepsilon_1 : \kappa x + y + 1 = 0$, $\varepsilon_2 : x + \kappa y + 1 = 0$, $\varepsilon_3 : x + y + \kappa = 0$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

i. Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών: $\varepsilon_1 : \lambda x-(\lambda+1)y-1=0$ και $\varepsilon_2 : x-2y+\lambda-2=0$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in R$.

ii. Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται, να αποδείξετε ότι το σημείο τομής της Α κινείται σε σταθερή ευθεία.

B. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $\lambda x^2-\lambda y^2+(1-\lambda^2)xy-(\lambda+1)x+(\lambda-1)y+1=0$ παριστάνει δύο κάθετες μεταξύ τους ευθείες ,για κάθε $\lambda\in R$.

Θέμα 36ο

A. Να βρείτε τις τιμές των $\lambda,\mu\in R$ για τις οποίες οι ευθείες: $\varepsilon_1 : x+\mu y+1=0$ και $\varepsilon_2 : 2\mu x+2y+\lambda=0$ είναι παράλληλες και η απόστασή τους είναι ίση με $2\sqrt{2}$.

B. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ που έχει κορυφές τις ευθείες της έλλειψης $c:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ και έχει εστίες τις κορυφές της έλλειψης.

Θέμα 37ο

A. Δίνονται τα σημεία $A(4,2)$ και $B(3,-5)$ και η ευθεία $\varepsilon : 7x+y-23=0$. Να βρεθεί σημείο Μ της ε ώστε το τρίγωνο ΑΜΒ να είναι ορθογώνιο στο Μ.

B. Έστω $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=5$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{2\pi}{3}$. Αν $\vec{\delta}=5\vec{\alpha}+4\vec{\beta}$ να υπολογιστεί το $|\vec{\delta}|$.

Θέμα 38ο

A. Οι ευθείες $\varepsilon_1 : (\eta\mu\alpha)x-(\sigma\upsilon\nu\alpha)y+1=0$, $\varepsilon_2 : (\sigma\upsilon\nu\alpha)x+(\eta\mu\alpha)y-1=0$, $\varepsilon_3 : x+y=\sqrt{2}$ και $\varepsilon_4 : 2\kappa x+\lambda y=\kappa\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha$, $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ διέρχονται από το ίδιο σημείο. Να βρεθεί ποιά γραμμή διαγράφει το σημείο (κ,λ), όπου ταν $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

B. Δίνεται η παραβολή $C: y^2=4x$ και η ευθεία $\varepsilon : 4x-3y-6=0$. Να βρεθεί το σημείο της παραβολής που έχει τη μικρότερη απόσταση από την ευθεία.

Θέμα 39ο

A. Δίνονται οι ημιευθείες $y=\lambda x$ και $y=-\lambda x$ με $0<\lambda<1$ και $x>0$ και η ευθεία (ε) τις τέμνει στο σημείο Α και Β. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των Α και Β συναρτήσει των συντεταγμένων (x,y) του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ.

Β. Αν η ευθεία (ε) κινείται έτσι ώστε να ισχύει : $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1-\lambda^2$, να δείξετε ότι το σημείο Μ γράφει τον κλάδο μιας υπερβολής.

Θέμα 40ο

Κάθε χρονική στιγμή $t\geq 0$ δύο πλοία Π_1,Π_2 βρίσκονται στις θέσεις $\Pi_1(t,\ t+4)$ και $\Pi_2(1-2t,\ t+1)$ αντίστοιχα.

α. Υπάρχει περίπτωση τα πλοία να συγκρουσθούν;
β. Να βρεθεί η εξίσωση της πορείας κάθε πλοίου.
γ. Να βρεθεί η απόσταση των πλοίων την στιγμή που ξεκίνησαν και την χρονική στιγμή $t=2$.
δ. Οι πορείες των πλοίων συναντώνται;

Θέμα 41ο

Α. Δίδονται τα σημεία $A(3,\ 2)$, $B(-1,\ 1)$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,y)$ του επιπέδου ώστε $\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$.

Β. Να βρεθεί η αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες: $2x^2-7xy+3y^2=0$.

Θέμα 42ο

Α. Δίδονται τα σημεία $A(3,\ 4)$ και $B(5,\ -2)$. Βρείτε σημείο ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι ισοσκελές με εμβαδόν 10 τμ.

Β. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(1,\ 2)$. Αν οι ευθείες $(\varepsilon_1): x-y-2=0$ και $(\varepsilon_2): 3x+y+5=0$, είναι οι μεσοκάθετες των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, να βρεθούν οι κορυφές Β και Γ.

Θέμα 43ο

Α. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): \lambda x+(\lambda-1)y-\lambda=0$ και $(\varepsilon_2): \lambda x+\lambda y-\lambda-1=0$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής τους.

Β. i. Να βρεθεί $\mu\in R$ τέτοιο ώστε οι ευθείες με εξισώσεις $(\varepsilon_1): (\mu+3)x-\mu y+\mu-3=0$ και $(\varepsilon_2): (\mu+2)x+(3\mu+4)y-7\mu-10=0,\ \mu\in R$ να είναι κάθετο.

ii. Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 διέρχονται από το ίδιο σταθερό σημείο.

Θέμα 44ο

Ένα εκπαιδευόμενος πιλότος Α κινείται με το αεροσκάφος του σε τροχιά ως προς ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς ώστε κάθε χρονική στιγμή η θέση του να δίνεται από το σημείο $M(\lambda^2, 2\lambda)$, $\lambda\in R$

Α. i. Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς του.

ii. Ένας άλλος πιλότος Β κινείται στην ίδια τροχιά έτσι ώστε το άθροισμα των τεταγμένων των θέσεων του Α και του Β να είναι ίσο με $4\sqrt{3}$. Να δειχθεί ότι η ευθεία που διέρχεται από τις θέσεις τους κάθε χρονική στιγμή σχηματίζει σταθερή γωνία με τον άξονα xx΄.

B. i. Ο εκπαιδευτής τους κινείται έτσι ώστε να βρίσκεται στην ίδια ευθεία με τους δύο πιλότους Α και Β και σε ίση απόσταση από αυτούς. Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς του.

ii. Τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τεταγμένη του αεροσκάφους του πιλότου Α είναι 2, ο πιλότος εκτοξεύει ρουκέτα, με σκοπό να πλήξει στόχο με συντεταγμένες $\Sigma(-1,\,0)$. Αν θεωρηθεί ότι η τροχιά της ρουκέτας είναι ευθεία εφαπτόμενη στην τροχιά του αεροσκάφους εκείνη την χρονική στιγμή, να ελεγθεί αν ο πιλότος θα πλήξει το στόχο.

Θέμα 45ο

A. Έστω Α, Β σημεία της παραβολής $C: y^2 = 2px$ με $A \neq B$ και $M(x_0, y_0)$ το μέσον του ΑΒ με $y_0 \neq 0$. Να δειχθεί ότι η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή κατεύθυνσης ίσο με $\dfrac{p}{y_0}$.

B. Να βρεθεί η σχετική θέση των ευθειών :

$\varepsilon_1 : \lambda x + (\lambda - 2)y = \lambda + 1$ και $\varepsilon_2 : (\lambda + 1)x - (\lambda - 2)y = \lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$.

Θέμα 46ο

A. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και $(\varepsilon_2): A_2x + B_2y + \Gamma = 0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο $K(x_1, y_1)$. Να δειχθεί ότι οι ευθείες :

$\lambda(A_1x + B_1y + \Gamma_1) + \mu(A_2x + B_2y + \Gamma_2) = 0$, με $\lambda, \mu \in R^*$ διέρχονται από το σημείο Κ.

B. Να αποδείξετε ότι οι ελλείψεις $C_1 : \dfrac{x^2 \text{συν}}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $C_2 : \dfrac{x^2}{\alpha^2 + \lambda^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2 + \lambda^2} = 1$, $\alpha > \beta$ έχουν τις ίδιες εστίες για κάθε $\lambda \in R$.

Θέμα 47ο

Αν $\varepsilon : \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ και $M(x_1, y_1)$ τυχαίο σημείο του επιπέδου με $M'(x_2, y_2)$ το συμμετρικό του Μ ως προς την ευθεία ε να αποδειχθούν :

i. $\alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2) + 2\gamma = 0$ **ii.** $\beta(x_1 - x_2) - \alpha(y_1 - y_2) = 0$

Θέμα 48ο

A. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : \lambda\beta x - \alpha y = \lambda\alpha\beta$ και $\varepsilon_2 : \beta x + \lambda\alpha y = \alpha\beta$, όπου $\lambda \neq 0$ και τα σημεία $K\left(\sqrt{\alpha^2 - \beta}, 0\right)$, $\Lambda\left(-\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, 0\right)$, όπου $0 < \beta < \alpha$. Να δειχθεί ότι για το σημείο τομής Μ των ε_1, ε_2 ισχύει $(MK) + (M\Lambda) = 2\alpha$ για κάθε $\lambda \in R^*$.

B. Δίνεται η έλλειψη $C : \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ και το σημείο $M(x_0, y_0)$ που έχει μέσον το σημείο Μ. Κατόπιν να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του Μ αν η χορδή έχει σταθερό συντελεστή διεύθυνσης λ.

Θέμα 49ο

Έστω α, β ακέραιοι τέτοιοι ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = (2, 1-\beta)$ και είναι κάθετα.

Να αποδείξετε ότι:

α. Ο ακέραιος β είναι περιττός.

β. Αν $\delta \in Z_+^*$ και τέτοιος ώστε να ισχύουν: $\delta / 1 - \alpha\nu$ και $\delta / \nu\beta + 2$ με $\nu \in N^*$ να δείξετε ότι $\delta = 1$

(**Απ.:** $\beta = 2\alpha + 1$)

Θέμα 50ο

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : |\vec{\alpha}|^2 x + |\vec{\beta}|^2 y = 6\vec{\alpha}\vec{\beta}$. Αν σχηματίζει με τους άξονες του ορθοκανονικού συστήματος τρίγωνο με εμβαδόν 18, να δείξετε ότι $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$.

Θέμα 51ο

Να βρείτε σημεία της ευθείας $x - y + 4 = 0$, με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία να απέχουν από την ευθεία $3x - 4y + 14 = 0$ απόσταση που είναι αριθμός ακέραιος.

(**Απ.:** $M(5\kappa - 1, \quad 5\kappa + 3), \quad \kappa \in Z$)

Θέμα 52ο

Δίνεται το κλάσμα $\dfrac{4\nu + 9}{3\nu + 5}$ με ν θετικό ακέραιο. Δείξτε ότι οι τιμές του ν για τις οποίες το κλάσμα απλοποιείται είναι τεταγμένες σημείων της ευθείας με εξίσωση $7x - y - 4 = 0$.

(**Απ.:** $\nu = 7\lambda - 4, \quad \lambda \in N^*$)

Θέμα 53ο

Αν (k, λ) είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(4,5)$ και $B(2003,2004)$ με $k, \lambda \in Z$, τότε ο αριθμός $k \cdot \lambda$ είναι άρτιος.

Θέμα 54ο

Δίνονται τα παράλληλα διανύσματα $\vec{u} = (\mu, \nu)$ και $\vec{\upsilon} = (\kappa, \lambda)$, με κ, λ, μ, ν θετικούς ακεραίους. Να αποδείξετε οτι ο αριθμός $|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ είναι ακέραιος.