Μάθημα 13

Διαιρετότητα

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ορισμός

Έστω α,β δυο ακέραιοι με $\beta \neq 0$. Θα λέμε ότι **ο β διαιρεί τον α** και θα γράφουμε β/α όταν η διαίρεση του α με τον β είναι τέλεια. Δηλαδή όταν υπάρχει ακέραιος κ ώστε $\alpha = \kappa\beta$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ακόμη ότι:

- α διαιρείται με τον β
- α πολλαπλάσιο του β
- β είναι διαιρέτης του α
- β είναι παράγοντας του α

Αν β δεν διαιρεί τον α τότε γράφουμε $\beta \nmid \alpha$

Επισήμανση : Στο εξης όταν χρησιμοποιείται ο συμβολισμός β/α οι αριθμοί α,β είναι ακέραιοι και $\beta \neq 0$, αν αυτό δεν αναφέρεται.

Συνέπειες του ορισμού

- Αν β/α τότε $-\beta/\alpha$
- $\pm 1/\alpha$, $\alpha \in Z$, $\pm\alpha/\alpha, \alpha \in Z^*$
- β/0 για κάθε $\beta \in Z^*$
- β/α τότε κβ/κα, $\kappa \in Z^*$

Θεώρημα

Έστω α,β,γ ακέραιοι.Ισχύουν τα παρακάτω

- Αν α/β και β/α τότε $\alpha = \pm\beta$
- Αν α/β και β/γ τότε α/γ
- Αν α/β τότε α/λβ για κάθε $\lambda \in Z$
- Αν α/β και α/γ τότε $\alpha/(\beta+\gamma)$
- Αν α/β και $\beta \neq 0$ τότε $|\alpha| \leq |\beta|$

Σαν συνέπεια του πιο πάνω θεωρήματος ισχύει:

Αν α/β και α/γ τότε $\alpha / (\kappa\beta + \lambda\gamma)$, για κάθε κ, $\lambda \in Z$

δηλ.ότι “αν ένας ακέραιος α διαιρεί δύο άλλους ακεραίους β και γ διαιρεί και ένα οποιοδήποτε γραμμικό συνδυασμό των β και γ. ”

Οι παρακάτω προτάσεις αναφέρονται σε σημαντικά και εύχρηστα συμπεράσματα. Όσα δεν αναφέρονται σαν προτάσεις στο σχολικό βιβλίο θα πρέπει να αποδεικνύονται.

Πρόταση 1

Θεωρούμε την ευκλείδεια διαίρεση του α με τον β και έστω κ και υ το πηλίκο και το υπόλοιπο αντίστοιχα.

i. Αν ένας ακέραιος x διαιρεί και τον α και τον β τότε διαιρεί και τον υ.

ii. Αν ένας ακέραιος x διαιρεί και τον β και τον υ τότε διαιρεί και τον α.

Απόδειξη

Η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης είναι $\alpha = \kappa\beta + \upsilon \Leftrightarrow \alpha - \kappa\beta = \upsilon$ (Τ)

i. Αφού x / α είναι $\alpha = \lambda x,\ \lambda \in Z$ (1)

x/β είναι $\beta = \mu x,\ \mu \in Z$ οπότε $\kappa\beta = \kappa\mu x$ (2)

Αφαιρώντας κατα μέλη από την (1) την (2) έχουμε

$\alpha - \beta\kappa = (\lambda - \kappa\mu)x$ ή λόγω της (Τ) $\upsilon = \rho x$ όπου $\rho = \lambda - \kappa\mu,\ \rho \in Z$. Οπότε x/υ.

ii. Αφου x/β είναι $\beta = \lambda x,\ \lambda \in Z$ οπότε $\kappa\beta = \lambda\kappa x$ (3)

x/υ είναι $\upsilon = \mu x,\ \mu \in Z$ (4)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (3) και (4) έχουμε $\kappa\beta + \upsilon = (\lambda\kappa + \mu)x$ ή λόγω της (Τ) προκύπτει ότι $\alpha = \rho x$ όπου $\rho = \lambda\kappa + \mu,\ \rho \in Z$. Αποδείξαμε ότι x/α.

Η απόδειξη των παραπάνω μπορεί να γίνει πιο σύντομα κάνοντας χρήση της ιδιότητας του γραμμικού συνδυασμού. Αποδεικνύουμε ενδεικτικά το i.

Αφου x / α και x / β τότε $x/\alpha + (-\kappa)\beta$ οπότε λόγω της (Τ) προκύπτει ότι x / υ.

Πρόταση 2

Έστω α, β, γ, x, y ακέραιοι. Αν γ / α και $\gamma/(x\alpha \pm y\beta)$ τότε $\gamma/y\beta$

Απόδειξη

Αφού γ / α είναι $\alpha = \kappa\gamma$ οπότε $x\alpha = x\kappa\gamma$ (1) ,με κ ακέραιο και $x\alpha + y\beta = \lambda\gamma,\ \lambda \in Z$ (2).

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε $y\beta = \lambda\gamma - \kappa x\gamma$ ή $y\beta = (\lambda - \kappa x)\gamma$ ή $y\beta = \rho\gamma$ όπου $\rho = \lambda - \kappa x,\ \rho \in Z$. Αποδείξαμε ότι $\gamma/y\beta$.

Ομοίως αποδεικνύεται για $\gamma / (x\alpha - y\beta)$.

Προσοχή!!

1. Αν $\gamma/y\beta$ δεν προκύπτει ότι γ/y ή γ/β (χωρίς να αποκλείεται βέβαια και αυτή η περίπτωση). Για παράδειγμα , $6/(36 = 4\cdot 9)$ ενω $6 \nmid 4$ και $6 \nmid 9$.

2. Αν $\gamma/y\beta$ και $\gamma \nmid y$ δεν προκύπτει ότι γ / β. Για παράδειγμα, $30/(60 = 5\cdot 12)$ και $30 \nmid 12$ χωρίς βέβαια $30 / 5$.

3. αν y / γ και β / γ δεν προκύπτει $y\beta/\gamma$.

Για παράδειγμα $6/12$ και $4/12$ ενω $(6\cdot 4) \nmid 12$

Πρόταση 3

Έστω $\alpha=\kappa_1\gamma+\upsilon_1$ και $\beta=\kappa_2\gamma+\upsilon_2$ η ευκλείδεια διαίρεση του α με τον γ και του β με τον γ αντίστοιχα, $\kappa_1,\kappa_2,\in Z$. Να δείξετε τις παρακάτω ισοδυναμίες:

i. $\gamma/(\alpha-\beta)\Leftrightarrow\upsilon_1=\upsilon_2$ **ii.** $\gamma/(\alpha+\beta)\Leftrightarrow\gamma/(\upsilon_1+\upsilon_2)$

iii. $\gamma/\alpha{\cdot}\beta\Leftrightarrow\gamma/\upsilon_1{\cdot}\upsilon_2$ **iv.** $\gamma/\alpha^\nu\Leftrightarrow\gamma/\upsilon_1{}^\nu$

Απόδειξη

(i) • Είναι $\alpha=\kappa_1\gamma+\upsilon_1$ και $\beta=\kappa_2\gamma+\upsilon_2$ $\kappa_1,\kappa_2,\in Z$ οπότε $\alpha-\beta=(\kappa_1-\kappa_2)\gamma+\upsilon_1-\upsilon_2$ (I)

Αφού $\gamma/(\alpha-\beta)$ από την υπόθεση είναι φανερό ότι $\upsilon_1-\upsilon_2=0\Leftrightarrow\upsilon_1=\upsilon_2$

• Αντίστροφα αν $\upsilon_1=\upsilon_2\Leftrightarrow\upsilon_1-\upsilon_2=0$ τότε από την (I) προκύπτει ότι $\alpha-\beta=(\kappa_1-\kappa_2)\gamma$ δηλαδή ότι $\gamma/(\alpha-\beta)$

(ii) • Έχουμε $\alpha+\beta=(\kappa_1+\kappa_2)\gamma+\upsilon_1+\upsilon_2$ (II)

Αφου $\gamma/(\alpha+\beta)$ από την υπόθεση τότε $\gamma/(\kappa_1+\kappa_2)\gamma+\upsilon_1+\upsilon_2$.

Όμως $\gamma/(\kappa_1+\kappa_2)\gamma$ (προφανές). Σύμφωνα με την πρόταση 2 ισχύει $\gamma/(\upsilon_1+\upsilon_2)$.

• Αντίστροφα αν $\gamma/(\upsilon_1+\upsilon_2)$, επειδή $\gamma/(\kappa_1+\kappa_2)\gamma$ σύμφωνα με την ιδιότητα του γραμμικού συνδυασμού έχουμε $\gamma/(\kappa_1+\kappa_2)\gamma+\upsilon_1+\upsilon_2$. Οπότε λόγω της σχέσης (II) είναι και $\gamma/(\alpha+\beta)$. Οι αποδείξεις των (ii), (iv) γίνονται με παρόμοιο τρόπο.

B. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία - Μέθοδος 1

Για την απόδειξη ισχυρισμών: A/B ή $B=\pi o\lambda A$ συνήθως χρησιμοποιούμε έναν από τους παρακάτω τρόπους.

- Παραγοντοποιούμε τον διαιρετέο Β έτσι ώστε να εμφανίσουμε τον Α ως παράγοντα της έκφρασης του Β.
- Κάνουμε χρήση της ευκλείδειας διαίρεσης του διαιρετέου Β με τον ακέραιο διαιρέτη Α. (ο οποίος εν γένει μπορεί να είναι μια παράσταση ακεραίων).
- Εφαρμόζουμε την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής
- Κάνουμε χρήση των γνωστών ταυτοτήτων με x, y ακέραιους και $\nu\in N^*$

(i) $x^\nu-y^\nu=(x-y)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}y+........+xy^{\nu-2}+y^{\nu-1})=\pi o\lambda.(x-y)$

(ii) $x^\nu+y^\nu=(x+y)(x^{\nu-1}-x^{\nu-2}y+........-xy^{\nu-2}+y^{\nu-1})=\pi o\lambda.(x+y)$, με ν περιττό

(iii) $x^\nu-y^\nu=x^{2k}-y^{2k}=(x^2)^k-(y^2)^k=(x^2-y^2)(x^{2(k-1)}+.....+y^{2(k-1)})$

$$=(x+y)(x-y)(x^{2(k-1)}+......+y^{2(k-1)})=\pi o\lambda.(x\pm y)$$, με ν άρτιο.

Παράδειγμα 1

Έστω $A = 3^{\nu+2} \cdot 7^{\nu} + 3^{\nu} \cdot 7^{\nu+2} - 5 \cdot 21^{\nu}$ **. Να δείξετε ότι 21/A και 53/A**

Λύση

Είναι $A = 3^{\nu} \cdot 3^2 \cdot 7^{\nu} + 3^{\nu} \cdot 7^{\nu} 7^2 - 5 \cdot 3^{\nu} \cdot 7^{\nu} =$

$= 3^{\nu} \cdot 7^{\nu}\left(3^2 + 7^2 - 5\right) = 3^{\nu} \cdot 7^{\nu}(9 + 49 - 5) = 3^{\nu} \cdot 7^{\nu} 53 = 21^{\nu} \cdot 53$.

Αφού $A = 21^{\nu} \cdot 53 = 21 \cdot \left(21^{\nu-1} \cdot 53\right)$ είναι φανερό ότι $21/A$ και $A = 21^{\nu} \cdot 53$, απ' όπου προκύπτει ότι $53/A$.

Παράδειγμα 2

Να δείξετε ότι $2\alpha(\alpha-2)(\alpha+2) = \pi o\lambda.3$ **, όπου** $\alpha \in Z$ **.**

Λύση

Η ευκλείδεια διαίρεση του α με το 3 είναι: $\alpha = 3\kappa + \upsilon$ με $\upsilon = 0,1,2$ $\kappa \in Z$.

Αν υ = 0 τότε α = 3κ δηλαδή $2\alpha(\alpha-2)(\alpha+2) =$

$$= 6\kappa(3\kappa-2)(3\kappa+2)$$
$$= 3\left[2\kappa(3\kappa-2)(3\kappa+2)\right] = \pi o\lambda 3$$

Αν υ = 1 τότε α = 3κ + 1 δηλαδή $2\alpha(\alpha-2)(\alpha+2) =$

$$= 2(3\kappa+1)(3\kappa-1)(3\kappa+3)$$
$$= 3\left[2(3\kappa+1)(3\kappa-1)(\kappa+1)\right] = \pi o\lambda.3$$

Αν υ = 2 τότε α = 3κ + 2 δηλαδή $2\alpha(\alpha-2)(\alpha+2) =$

$$= 2(3\kappa+2)3\kappa(3\kappa+4) = 3\left[2(3\kappa+2)\kappa(3\kappa+4)\right] = \pi o\lambda.3$$

Παράδειγμα 3

Να δείξετε ότι $3/\left(7^{\nu} + 3\nu - 1\right)$**, για κάθε** $\nu \in N^*$

Λύση

Έστω ο ισχυρισμός $P(\nu): 7^{\nu} + 3\nu - 41 = \pi o\lambda 3$

• Για ν = 1 είναι $7^1 + 3 \cdot 1 - 1 = 9 = \pi o\lambda 3$, που ισχύει δηλαδή ο P(1) είναι αληθής

• Έστω ότι ισχύει ο $P(\nu): 7^{\nu} + 3\nu - 1 = \pi o\lambda 3$ (1)

Θα δείξουμε ότι ισχύει ο $P(\nu+1)$ δηλαδή $7^{\nu+1} + 3(\nu+1) - 1 = \pi o\lambda.3$

Έχουμε $7^{\nu+1} + 3(\nu+1) - 1 = 7^{\nu} \cdot 7 + 3\nu + 3 - 1$ (από τη σχέση (1))

$$= (\pi o\lambda.3 - 3\nu + 1)7 + 3\nu + 2 =$$
$$= 7\pi o\lambda.3 - 21\nu + 7 + 3\nu + 2 =$$
$$= 7\pi o\lambda.3 - 18\nu + 9 =$$
$$= 7\pi o\lambda.3 + 3(-6\nu + 3) = \pi o\lambda.3$$

Άρα ο ισχυρισμός $P(\nu)$ ισχύει για κάθε $\nu \in N^*$

Παράδειγμα 4

Να δείξετε ότι:

α. $32 / (9^{2004} - 7^{2004})$ **β.** $130 / (9^{2004} - 7^{2004})$ **γ.** $16 / (9^{2003} + 7^{2003})$

Λύση

α. $9^{2004} - 7^{2004} = 81^{1002} - 49^{1002} =$ πολ.$(81 - 49) =$ πολ.32. Άρα $32/ (9^{2004} - 7^{2004})$.

β. $9^{2004} - 7^{2004} = 81^{1002} - 49^{1002} =$ πολ.$(81 + 49) =$ πολ.130. Άρα $130/ (9^{2004} - 7^{2004})$.

γ. $9^{2003} + 7^{2003} =$ πολ$(9 + 7) =$ πολ.16. Άρα $16 /(9^{2003} + 7^{2003})$.

Όλα τα παραπάνω είναι άμεση εφαρμογή της μεθόδου 1.

Κατηγορία - Μέθοδος 2

Σε ασκήσεις που ζητείται να βρεθούν οι πιθανοί κοινοί διαιρέτες δύο ακεραίων αριθμών βρίσκουμε τους διαιρέτες κατάλληλου γραμμικού συνδυασμού τους.

Παράδειγμα 1

α. Να βρεθούν οι πιθανοί ακέραιοι που διαιρούν τους ακέραιους αριθμούς $2\alpha + 3$ και $3\alpha + 4$ $(\alpha \in Z)$

β. Να δείξετε ότι το κλάσμα $\dfrac{2\alpha+3}{3\alpha+4}$ δεν απλοποιείται (είναι δηλαδή ανάγωγο)

Λύση

α. Έστω δ ο πιθανός κοινός διαιρέτης

Τότε $\left.\begin{array}{l}\delta/(2\alpha+3)\\ \delta/(3\alpha+4)\end{array}\right\}$ οπότε $\delta/\left[3(2\alpha+3)-2(3\alpha+4)\right]$ ή $\delta/(6\alpha+9-6\alpha-8)$ ή $\delta/1$.

Επομένως είναι $\delta = \pm 1$.

β. Από το πρώτο ερώτημα προκύπτει ότι οι μοναδικοί κοινοί διαιρέτες του αριθμητή $2\alpha + 3$ και του παρονομαστή $3\alpha + 4$ είναι ± 1. Δηλαδή το κλάσμα δεν απλοποιείται.

Κατηγορία - Μέθοδος 3

Ασκήσεις που ζητείται η εύρεση ακεραίου α όταν δίνεται συνθήκη διαιρετότητας της μορφής: $\lambda/f(\alpha)$ ή $f(\alpha)/\lambda, \lambda \in Z$ ή $f(\alpha)/g(\alpha)$

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν ακέραιοι αριθμοί α ώστε $3/(\alpha-7)$

Λύση

Αφού $\alpha \in Z$ τότε: $\alpha = 3\kappa$ ή $\alpha = 3\kappa + 1$ ή $\alpha = 3\kappa + 2$, $\kappa \in Z$

Αν $\alpha = 3\kappa$, $\kappa \in Z$ τότε $\alpha - 7 = 3\kappa - 7 \neq$ πολ3

Αν $\alpha = 3\kappa + 1$, $\kappa \in Z$ τότε $\alpha - 7 = 3\kappa - 6 = 3(\kappa - 2) =$ πολ3

Αν $\alpha = 3\kappa + 2$, $\kappa \in Z$ τότε $\alpha - 7 = 3\kappa - 5 \neq$ πολ3

Άρα οι ζητούμενοι ακέραιοι είναι της μορφής $\alpha = 3\kappa + 1$, $\kappa \in Z$

Παράδειγμα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι αριθμοί α ώστε $(2\alpha+5)/3$

Λύση

Οι διαιρέτες του 3 είναι: $\pm1,\pm3$

Άρα $2\alpha+5=1 \Leftrightarrow \alpha=-2$

ή $2\alpha+5=-1 \Leftrightarrow \alpha=-3$

ή $2\alpha+5=3 \Leftrightarrow \alpha=-1$

ή $2\alpha+5=-3 \Leftrightarrow \alpha=-4$

Παράδειγμα 3

Να βρείτε φυσικό αριθμό α ώστε $(\alpha+2)/(\alpha^2+1)$

Λύση

$$\begin{array}{r|l} \alpha^2+0\alpha+1 & \underline{\alpha+2} \\ \underline{-\alpha^2-2\alpha} & \alpha-2 \\ -2\alpha+1 & \\ \underline{+2\alpha+4} & \\ 5 & \end{array}$$

Σύμφωνα με την ταυτότητα της διαίρεσης των πολυωνύμων έχουμε:

$$\alpha^2+1=(\alpha+2)(\alpha-2)+5 \quad (1)$$

Αφού $(\alpha+2)/(\alpha^2+1)$ προκύπτει :

$$\frac{\alpha^2+1}{\alpha+2}\in Z \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{(\alpha+2)(\alpha-2)+5}{\alpha+2}\in Z \Leftrightarrow \left((\alpha-2)+\frac{5}{\alpha+2}\right)\in Z .$$

Όμως $(\alpha-2)\in Z$ οπότε πρέπει $\frac{5}{\alpha+2}\in Z$ δηλ. $(\alpha+2)/5$. Οι διαιρέτες του 5 είναι: $\pm1,\pm5$.

Αν $\alpha+2=5$ τότε $\alpha=3 \in N$ ή $\alpha+2=-5$ τότε $\alpha=-7 \notin N$

ή $\alpha+2=1$ τότε $\alpha=-1 \notin N$ ή $\alpha+2=-1$ τότε $\alpha=-3 \notin N$. Άρα $\alpha=3$.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Αν $\alpha,\beta\in N^*$ και $\beta|(4\alpha+3)$ και $\beta(|5\alpha+4)$ να δείξετε ότι β = 1

Λύση

Ισχύει ότι : $\left.\begin{array}{r}\beta|(4\alpha+3)\\ \text{και } \beta|(5\alpha+4)\end{array}\right\}$ οπότε $\beta|[5(4\alpha+3)-4(5\alpha+4)]$ ή

$\beta|(20\alpha+15-20\alpha-16)$ ή

$\beta|-1$

Γνωρίζουμε ότι οι διαιρέτες του -1 είναι οι ±1 και επειδή $\beta\in N^*$ είναι $\beta=1$.

Άσκηση 2

Έστω α, β, $\delta\in Z$ με $\delta|(5\alpha+17\beta)$ και $\delta|(2\alpha+7\beta)$.

Να δείξετε ότι $\delta|(\alpha+\beta)$, $\delta|(3\alpha+6\beta)$

Λύση

Ισχύει ότι $\left.\begin{array}{l}\delta|(5\alpha+17\beta)\\ \delta|(2\alpha+7\beta)\end{array}\right\}$ οπότε $\delta|[2(5\alpha+17\beta)-5(2\alpha+7\beta)]$ ή

$\delta|[10\alpha+34\beta-10\alpha-35\beta]$ ή

$\delta|-\beta$

Άρα και $\delta|\beta$

Επίσης $\left.\begin{array}{l}\delta|5\alpha+17\beta\\ \delta|2\alpha+7\beta\end{array}\right\}$ οπότε $\delta|7(5\alpha+17\beta)-17(2\alpha+7\beta)$ ή

$\delta|35\alpha+119\beta-34\alpha-119\beta$ ή

$\delta|\alpha$

$\left.\begin{array}{l}\text{Αφου } \delta|\alpha\\ \text{και } \delta|\beta\end{array}\right\}$ ισχύει ότι $\delta|\alpha+\beta$ και $\delta|3\alpha+6\beta$ ως γραμμικός συνδυασμό των α, β.

Άσκηση 3

Να δείξετε ότι για κάθε $\nu\in Z$ ισχύει $(\nu^2-\nu+1)|(\nu^4+\nu^2+1)$

Λύση

Είναι $\nu^4+\nu^2+1=\nu^4+2\nu^2-\nu^2+1=(\nu^4+2\nu^2+1)-\nu^2=(\nu^2+1)^2-\nu^2=$

$(\nu^2+1+\nu)(\nu^2+1-\nu)=(\nu^2+\nu+1)(\nu^2-\nu+1)$

Άρα $(\nu^4+\nu^2+1)=(\nu^2+\nu+1)(\nu^2-\nu+1)$ οπότε $(\nu^2-\nu+1)|(\nu^4+\nu^2+1)$.

Άσκηση 4

Να βρείτε τον φυσικό αριθμό ν για τον οποίο ισχύει : $(2\nu+1) \mid \nu^2+\nu-2$ **.**

Λύση

Έχουμε ότι
$$\begin{aligned}&(2\nu+1) \mid 4(\nu^2+\nu-2) \Leftrightarrow\\&(2\nu+1) \mid 4\nu^2+4\nu-8 \Leftrightarrow\\&(2\nu+1) \mid (4\nu^2+4\nu+1)-9 \Leftrightarrow\\&(2\nu+1) \mid (2\nu+1)^2-9\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{ομως } (2\nu+1) \mid (2\nu+1)^2\\ \text{και } \quad (2\nu+1) \mid (2\nu+1)^2-9\end{array}\right\} \text{ οπότε πρέπει } (2\nu+1) \mid 9 .$$

$$\text{Αφού } (2\nu+1) \mid 9 \text{ τότε } \begin{cases}2\nu+1=1 \Leftrightarrow 2\nu=0 \Leftrightarrow \nu=0 & \in N\\ 2\nu+1=-1 \Leftrightarrow 2\nu=-2 \Leftrightarrow \nu=-1 & \notin N\\ 2\nu+1=3 \Leftrightarrow 2\nu=2 \Leftrightarrow \nu=1 & \in N\\ 2\nu+1=-3 \Leftrightarrow 2\nu=-4 \Leftrightarrow \nu=-2 & \notin N\\ 2\nu+1=9 \Leftrightarrow 2\nu=8 \Leftrightarrow \nu=4 & \in N\\ 2\nu+1=-9 \Leftrightarrow 2\nu=-10 \Leftrightarrow \nu=-5 & \notin N\end{cases}$$

Άρα $\nu = 0, 1, 4$.

Άσκηση 5

Να βρείτε τους κοινούς διαιρέτες των αριθμών 2κ – 1 και 2κ + 1 όπου $\kappa \in Z$

Λύση

Έστω δ κοινός διαιρέτης των $2\kappa - 1$ και $2\kappa + 1$ τότε:

$$\text{και } \left.\begin{array}{l}\delta/(2\kappa-1)\\ \delta/(2\kappa+1)\end{array}\right\} \text{ Οπότε } \delta/((2\kappa-1)-(2\kappa+1)) \text{ ή } \delta/(2\kappa-1-2\kappa-1), \text{ οπότε } \delta/-2 .$$

Άρα οι πιθανοί κοινοί διαιρέτες των $2\kappa-1$ και $2\kappa+1$ είναι οι διαιρέτες του -2, δηλαδή $\delta = \pm1, \pm2$.

Όμως οι $2\kappa - 1$ και $2\kappa + 1$ είναι περιττοί αριθμοί οπότε δεν μπορούν να έχουν για διαιρέτες, τους ±2. Άρα οι κοινοί διαιρέτες των $2\kappa - 1$ και $2\kappa + 1$ είναι οι: ± 1.

Άσκηση 6

Έστω το κλάσμα $\dfrac{\nu^2+3}{\nu+2}, \nu \in N$

α. Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς ν ώστε το κλάσμα να απλοποιείται.

β. Να βρεθεί ο φυσικός αριθμός ν ώστε το κλάσμα να είναι ακέραιος.

Λύση

α. Για να απλοποιείται πρέπει να υπάρχει (ακέραιος) κοινός διαιρέτης δ του αριθμητή και του παρονομαστή (με $\delta \neq \pm 1$) ώστε $\left.\begin{array}{l}\delta/(\nu^2+3)\\ \delta/(\nu+2)\end{array}\right\}$ οπότε $\delta/\left((\nu^2+3)-\nu(\nu+2)\right)$

ή $\delta/(3-2\nu)$

Τότε: $\left.\begin{array}{l}\delta/(\nu+2)\\ \delta/(3-2\nu)\end{array}\right\}$ οπότε $\delta/\left(2(\nu+2)+(3-2\nu)\right)$ ή $\delta/7$. Άρα $\delta=\pm1, \pm7$

Αφού το κλάσμα απλοποιείται και $\delta \neq \pm 1$, πρέπει $\delta = \pm 7$.

Δηλαδή $\nu+2=7\cdot\kappa$ ή $\nu=7\kappa-2\in Z$.

Αφού $\nu\in N$ πρέπει $\nu\geq 0$ οπότε $7\kappa-2\geq 0 \Leftrightarrow \kappa\geq\frac{2}{7}(\kappa\in Z)$. Άρα $\kappa\geq 1$.

Επίσης $\nu^2+3=(7\kappa-2)^2+3=49\kappa^2-28\kappa+4+3=7(7\kappa^2-4\kappa+1)=\pi o\lambda 7$.

Επομένως $\nu=7\kappa-2$ με $\kappa\in Z$ και $\kappa\geq 1$.

β.

$$\begin{array}{rrr|l} \nu^2 + 0\nu & + & 3 & \nu + 2 \\ \cline{4-4} -\nu^2 - 2\nu & & & \nu - 2 \\ \cline{1-3} -2\nu & + & 3 & \\ 2\nu & + & 4 & \\ \cline{1-3} & & 7 & \end{array}$$

Από την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης έχουμε $\nu^2+3=(\nu+2)(\nu-2)+7$.

Έτσι έχουμε $\frac{\nu^2+3}{\nu+2}\in Z\Leftrightarrow\frac{(\nu+2)(\nu-2)+7}{(\nu+2)}\in Z\Leftrightarrow\left(\nu-2+\frac{7}{\nu+2}\right)\in Z$ και αφού $(\nu-2)\in Z$

πρέπει $\frac{7}{\nu+2}\in Z$ δηλαδή $(\nu+2)/7$. Όμως διαιρέτες του 7 είναι ± 1, ± 7

Άρα πρέπει $\nu+2$ να ισούται με ±1 ή ±7

Αν $\nu+2=1$ τοτε $\nu=-1\notin N$

Αν $\nu+2=-1$ τοτε $\nu=-3\notin N$

Αν $\nu+2=7$ τοτε $\nu=5\in N$

Αν $\nu+2=-7$ τοτε $\nu=-9\notin N$

Ώστε πρέπει $\nu=5$ για να είναι το κλάσμα ακέραιος.

Άσκηση 7

Για τους ακέραιους α,β να δείξετε ότι $\alpha^2 \cdot \beta - \alpha\beta^2 = \pi o\lambda 2$

Λύση

Είναι $\alpha = 2\kappa_1 + \upsilon_1$ με $\upsilon_1 = 0$ ή $\upsilon_1 = 1$, $\kappa_1 \in Z$

και $\beta = 2\kappa_2 + \upsilon_2$ με $\upsilon_2 = 0$ ή $\upsilon_2 = 1$, $\kappa_2 \in Z$

Ισχύει:

$$\begin{aligned}
&\alpha^2\beta - \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha-\beta) = \\
&= (2\kappa_1+\upsilon_1)(2\kappa_2+\upsilon_2)(2\kappa_1+\upsilon_1-2\kappa_2-\upsilon_2) = \\
&= (4\kappa_1\kappa_2+2\kappa_1\upsilon_2+2\kappa_2\upsilon_1+\upsilon_1\upsilon_2)(2\kappa_1-2\kappa_2+\upsilon_1-\upsilon_2) = \\
&= \left[2(2\kappa_1\kappa_2+\kappa_1\upsilon_2+\kappa_2\upsilon_1)+\upsilon_1\upsilon_2\right]\left[2(\kappa_1-\kappa_2)+\upsilon_1-\upsilon_2\right] = \\
&= (2\lambda+\upsilon_1\upsilon_2)(2\mu+\upsilon_1-\upsilon_2) \text{ με } \lambda = 2\kappa_1\kappa_2+\kappa_1\upsilon_2+\kappa_2\upsilon_1,\ \lambda \in Z \text{ και } \mu = \kappa_1-\kappa_2,\ \mu \in Z
\end{aligned}$$

υ_2 \ υ_1	0	1
0	$\upsilon_1 \cdot \upsilon_2 = 0$ $\upsilon_1 - \upsilon_2 = 0$	$\upsilon_1 \cdot \upsilon_2 = 0$ $\upsilon_1 - \upsilon_2 = 1$
1	$\upsilon_1 \cdot \upsilon_2 = 0$ $\upsilon_1 - \upsilon_2 = -1$	$\upsilon_1 \cdot \upsilon_2 = 1$ $\upsilon_1 - \upsilon_2 = 0$

Με την βοήθεια του πίνακα διαπιστώνουμε ότι σε κάθε περίπτωση επειδή ή $\upsilon_1 \cdot \upsilon_2 = 0$ ή $\upsilon_1 - \upsilon_2 = 0$ οπότε ο ακέραιος $\alpha^2\beta - \alpha\beta^2 = \pi o\lambda.2$

Άσκηση 8

Έστω α, β $\in Z$ με 9/(5α + 4β), να αποδείξετε ότι 9/(4α + 5β)

Λύση

Έχουμε $9/(5\alpha+4\beta)$ (1)

Όμως $9/9$ οπότε $9/9(\alpha+\beta)$ ή $9/(9\alpha+9\beta)$ (2)

Από (1) και (2) ισχύει ότι $9/\left[(9\alpha+9\beta)-(5\alpha+4\beta)\right]$ ή $9/(9\alpha+9\beta-5\alpha-4\beta)$ ή $9/(4\alpha+5\beta)$

Άσκηση 9

Αν 17/(3α + 2β) με α,β$\in Z$ να δείξετε ότι: 17/(5α + 9β)

Λύση

Αφού $17/(3\alpha+2\beta)$ τότε

$$3\alpha+2\beta = 17\kappa, \kappa \in Z \Leftrightarrow 2\beta = 17\kappa - 3\alpha \Leftrightarrow 2\beta = 16\kappa - 2\alpha + \kappa - \alpha \Leftrightarrow \beta = 8\kappa - \alpha + \frac{\kappa-\alpha}{2} \quad (1)$$

Επειδή $\beta \in Z$ τότε $\dfrac{\kappa-\alpha}{2} \in Z$ δηλαδή $\dfrac{\kappa-\alpha}{2} = \lambda,\ \lambda \in Z \Leftrightarrow \kappa-\alpha = 2\lambda \Leftrightarrow \alpha = \kappa-2\lambda$ (2)

Η (1) λόγω της (2) γίνεται $\beta = 8\kappa-(\kappa-2\lambda)+\lambda \Leftrightarrow \beta = 8\kappa-\kappa+2\lambda+\lambda \Leftrightarrow \beta = 7\kappa+3\lambda$ (3)

Λόγω των (2) και (3) έχουμε $5\alpha+9\beta = 5(\kappa-2\lambda)+9(7\kappa+3\lambda) = 5\kappa-10\lambda+63\kappa+27\lambda =$

$= 68\kappa+17\lambda = 17(4\kappa+\lambda) = \pi o\lambda 17$

Άρα $17/(5\alpha+9\beta)$

Άσκηση 10

Αν $A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots\dots\dots + 3^{40}$ να δειχθεί ότι :

α. 3/Α **β. 4/Α** **γ. 40/Α**

Λύση

α. $A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots\dots\dots + 3^{40}$

$= 3(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots\dots + 3^{39})$

$=$ πολ.3 Άρα 3/Α

β. $A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots\dots\dots + 3^{40}$

$= 3(1 + 3) + 3^3(1+3) + \dots\dots + 3^{39}(1 + 3)$

$= 3\cdot 4 + 3^3\cdot 4 \dots\dots\dots\dots + 3^{39}\cdot 4$

$= 4(3 + 3^3 + \dots\dots\dots + 3^{39})$

$=$πολ.4 Άρα 4/Α

γ. $A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8 \dots\dots\dots + 3^{40}$

$= 3(1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^5(1 + 3 + 3^2 + 3^3) + \dots\dots\dots + 3^{37}(1 + 3 + 3^2 + 3^3)$

$= 3\cdot 40 + 3^5\cdot 40 + \dots\dots + 3^{37}\cdot 40$

$= 40(3 + 3^5 + \dots\dots\dots + 3^{37})$

$=$ πολ.40 Άρα 40/Α

Άσκηση 11

Αν οι ακέραιοι x και y δεν είναι πολλαπλάσια του 3 να δείξετε ότι

α. $x^2 = 3\kappa + 1,\ \kappa \in Z$

β. $9/(x^6 - y^6)$

Λύση

α. Είναι $\begin{array}{c|c} x & 3 \\ \hline \upsilon & p \end{array}$ οπότε $x = 3p + \upsilon,\ p \in Z$ και $\upsilon = 0,1,2$

Αφού το x δεν είναι πολλαπλάσιο του 3 το $\upsilon \neq 0$

- Αν $\upsilon = 1$ τότε $x = 3p + 1$ οπότε $x^2 = 9p^2 + 6p + 1 \Leftrightarrow x^2 = 3(3p^2 + 2p) + 1$ ή $x^2 = 3\kappa + 1,\ \kappa \in Z$
- Αν $\upsilon = 2$ τότε $x = 3p + 2$ οπότε $x^2 = 9p^2 + 12p + 4 \Leftrightarrow x^2 = 9p^2 + 12p + 3 + 1 \Leftrightarrow x^2 = 3(3p^2 + 4p + 1) + 1$

Άρα $x^2 = 3\kappa + 1,\ \kappa \in Z$

β. Από το α. αφού $x \neq \pi o\lambda 3$ τότε $x^2 = 3\kappa + 1,\ \kappa \in Z$

οπότε $x^6 = (x^2)^3 = (3\kappa + 1)^3 = 27\kappa^3 + 27\kappa^2 + 9\kappa + 1 = 9(3\kappa^3 + 3\kappa^2 + \kappa) + 1 = 9\lambda + 1,\ \lambda \in Z$

Ομοίως $y^6 = 9\mu + 1,\ \mu \in Z$

Έτσι $x^6 - y^6 = (9\lambda + 1) - (9\mu + 1) = 9\lambda + 1 - 9\mu - 1 = 9(\lambda - \mu) = \pi o\lambda 9$
οπότε $9/(x^6 - y^6)$

Άσκηση 12

Αν ο ακέραιος α δεν διαιρείται με το 4, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $2\alpha^2 + 3\alpha$ δεν διαιρείται με το 4.

Λύση

Εφόσον ο ακέραιος α δεν διαιρείται με το 4, θα είναι της μορφής : 4κ+1 , 4κ+2 , 4κ+3 με $\kappa \in Z$

- Αν $\alpha = 4\kappa + 1$ τότε: $2\alpha^2 + 3\alpha = 2(4\kappa + 1)^2 + 3(4\kappa + 1)$
$= 2(16\kappa^2 + 8\kappa + 1) + 12\kappa + 3$
$= 32\kappa^2 + 16\kappa + 2 + 12\kappa + 3$
$= 32\kappa^2 + 28\kappa + 5$
$= 4(8\kappa^2 + 7\kappa + 1) + 1 = 4\mu + 1 \neq \pi o\lambda 4$
- Αν $\alpha = 4\kappa + 2$ τότε: $2\alpha^2 + 3\alpha = 2(4\kappa + 2)^2 + 3(4\kappa + 2)$
$= 2(16\kappa^2 + 16\kappa + 4) + 12\kappa + 6$
$= 32\kappa^2 + 32\kappa + 8 + 12\kappa + 6$
$= 32\kappa^2 + 44\kappa + 14$
$= 4(8\kappa^2 + 11\kappa + 3) + 2 = 4\mu + 2 \neq \pi o\lambda 4$
- Αν $\alpha = 4\kappa + 3$ τότε: $2\alpha^2 + 3\alpha = 2(4\kappa + 3)^2 + 3(4\kappa + 3)$
$= 2(16\kappa^2 + 24\kappa + 9) + 12\kappa + 9$
$= 32\kappa^2 + 48\kappa + 18 + 12\kappa + 9$
$= 32\kappa^2 + 60\kappa + 27$
$= 4(8\kappa^2 + 15\kappa + 6) + 3 = 4\mu + 3 \neq \pi o\lambda 4$

Άρα ο $2\alpha^2 + 3\alpha$ δεν διαιρείται με το 4 όταν ο α δεν διαιρείται με το 4.

Άσκηση 13

Να δείξετε ότι , για κάθε $\nu \in N^*$, ισχύει : $3^{2\nu+1} + 2^{\nu+2} = \pi o\lambda\ 7$.

Λύση

1^ος^ τρόπος:

Για κάθε $\nu \in N^*$ έχουμε:
$3^{2\nu+1} + 2^{\nu+2} = 3^{2\nu} \cdot 3 + 2^{\nu} \cdot 2^2 = 3 \cdot 9^{\nu} + 4 \cdot 2^{\nu} =$
$= 3 \cdot 9^{\nu} + 7 \cdot 2^{\nu} - 3 \cdot 2^{\nu} = 3(9^{\nu} - 2^{\nu}) + 7 \cdot 2^{\nu} =$
$= 3 \cdot \pi o\lambda(9 - 2) + 7 \cdot 2^{\nu} = 3 \cdot \pi o\lambda\ 7 + 2^{\nu} \cdot \pi o\lambda\ 7 = \pi o\lambda\ 7$.

Ισχύει $\boxed{\alpha^{\nu} - \beta^{\nu} = \pi o\lambda(\alpha - \beta) \text{ αν } \nu \in N^*}$

2^ος^ τρόπος:

Έστω P(ν) ο προς απόδειξη ισχυρισμός

- Για ν =1 ισχύει $3^{2\cdot 1+1} + 2^{1+2} = 35 = \pi o\lambda\ 7$
- Έστω ότι ισχύει ο P(ν) δηλαδή $3^{2\nu+1} + 2^{\nu+2} = \pi o\lambda\ 7$ (1)
- Θα δείξουμε ότι ισχύει ο P(ν + 1) δηλαδή $3^{2(\nu+1)+1} + 2^{(\nu+1)+2} = \pi o\lambda\ 7$

Πράγματι είναι $3^{2(\nu+1)+1} + 2^{(\nu+1)+2} = 3^{2\nu+2+1} + 2^{\nu+3} = 3^{2\nu+1} \cdot 3^2 + 2^{\nu} \cdot 2^3$ (από (1))

$= (πολ7 - 2^ν \cdot 4)\cdot 9 + 2^ν \cdot 8$
$= 9πολ7 - 36\cdot 2^ν + 8\cdot 2^ν$
$= 9πολ7 - 28\cdot 2^ν$
$= 9πολ7 - 7\cdot(4\cdot 2^ν)$
$= πολ7$

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να δειχθεί ότι $3/ν(ν+1)(2ν+1)$, όπου ν θετικός ακέραιος.
(**Υπ.:** Ευκλείδεια Διαίρεση)

2. Αν $ν \in N^*$ να δειχθεί ότι $9/(3\cdot 4^{ν+2}+10^ν+5)$.

3. Να δείξετε ότι $9/\left(2^{4ν+1}-2^{2ν}-1\right)$ για κάθε $ν \in N^*$.

4. Να δείξετε ότι για κάθε $ν \in N^*$ ισχύει: $7^{2ν+1}-48ν-7 = πολ48$

5. Να δείξετε ότι για κάθε $ν \in N^*$ ισχύει: $5|\left(16\cdot 2^ν + 9\cdot 27^ν\right)$

6. Να δειχθεί ότι για κάθε ν θετικό ακέραιο ισχύει : $2^ν/(ν+1)\cdot(ν+2)\ldots..(2ν)$.

7. Να δειχθεί ότι $7^{222} + 2^{333} = πολ57$

8. Αν $7/(α+5)$ και $7/(40-β)$ με $μ \in α,β$ ακέραιους να δείξετε ότι $7/(α+β)$ (θέμα 2001)

9. Δίνεται ο αριθμός $α = ν^2+ν+5$. Να εξετάσετε αν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί ν ώστε $3/α$.

10. Να βρεθούν οι ακέραιοι α ($α \neq 3$) ώστε το κλάσμα $\dfrac{α^2-4α+4}{α-3}$ να είναι ακέραιος

11. Να δείξετε ότι το κλάσμα $κ = \dfrac{5ν+4}{6ν+5}, ν \in N^*$ δεν απλοποιείται για καμμία τιμή του ν.

12. Αν $α,β \in Z$ για τους οποίους ισχύει: $3|(2α+β)$ και $3|(5α+3β)$ να δείξετε ότι: $9|α\cdot β$.

13. Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς $α \in N$ ώστε να ισχύει: $(α+2)|\left(α^2+4\right)$

14. Αν $\alpha \in N^*$ και $\alpha \mid (3x^3 - 2x)$ και $\alpha \mid (x+1)$ να δείξετε ότι $\alpha = 1$

15. Αν οι αριθμοί ν,κ είναι ακέραιοι με $\nu/(\kappa^2 + 1)$ και $\nu/(\kappa^3 + 2)$, να βρεθούν οι πιθανές τιμές του ν.

16. Να δείξετε ότι για κάθε $2003 \mid 2002^{2002} + 2003^{2003}$

17. Αν α, β, γ περιττοί ακέραιοι αριθμοί να δείξετε ότι $16 \mid \alpha^4 + \beta^4 - 2$

(**Απ.:** $\alpha^4 + \beta^4 - 2 = \alpha^4 + \beta^4 - 1 - 1 = (\alpha^4 - 1) + (\beta^4 - 1) = \ldots\ldots\ldots$)

18. Αν $x, y \in Z$ και $x \mid y$ να δείξετε ότι $(8^x - 1) \mid (8^4 - 1)$

19. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in Z$ και ισχύει $\alpha + \beta + \gamma = 0$ να δείξετε ότι οι α, β, γ διαιρούν τον αριθμό $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

(**Υπ.:** ταυτότητα Euler: $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$)

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Να δείξετε ότι : $6 / \alpha^3 - 6\alpha^2 - 7\alpha$, για κάθε ακέραιο α.

(Υπ.: $\alpha^3 - 6\alpha^2 - 7\alpha = \ldots = \alpha(\alpha+1)(\alpha-1) - 6\alpha(\alpha+1)$)