Μάθημα 12

Η Ευκλείδεια διαίρεση

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Θεώρημα

Αποδεικνύεται ότι για οποιουσδήποτε ακέραιους α και β, $\beta \neq 0$, ισχύει το παρακάτω θεώρημα και διατυπώνεται ως εξής :

Αν α και β ακέραιοι με $\beta \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι κ και υ τέτοιοι ώστε

$$\alpha = \kappa\beta + \upsilon, \quad 0 \leq \upsilon < |\beta|$$

- Η διαδικασία εύρεσης των κ, υ λέγεται **ευκλείδεια ή αλγοριθμική διαίρεση του α με τον β** και συμβολίζουμε $\alpha : \beta$.
- Η ισότητα $\alpha = \kappa\beta + \upsilon$ με $0 \leq \upsilon < |\beta|$, λέγεται **ταυτότητα της αλγοριθμικής διαίρεσης του α με τον β.**
- Ο κ λέγεται **πηλίκο** και ο υ **υπόλοιπο** της διαίρεσης αυτής, ενω ο α **διαιρετέος** και ο β **διαιρέτης**.
- Η διαίρεση λέγεται **τέλεια** αν το υπόλοιπο είναι ίσο με 0.

Παρατηρήσεις και συνέπειες του θεωρήματος

α. Οι δυνατές τιμές του υπολοίπου υ της ευκλείδειας διαίρεσης του ακέραιου α με τον μη μηδενικό ακέραιο β είναι $0,1,2,3.......,|\beta|-1 \quad (0 \leq \upsilon \leq |\beta|-1)$.

β. Είναι πλέον φανερό ότι για την διαίρεση του ακεραίου α με τον ακέραιο 2 ισχύει:

$$\alpha = 2 \cdot \kappa + \upsilon, \; 0 \leq \upsilon < 2.$$

Οι δυνατές τιμές του υ είναι 0 ή 1.

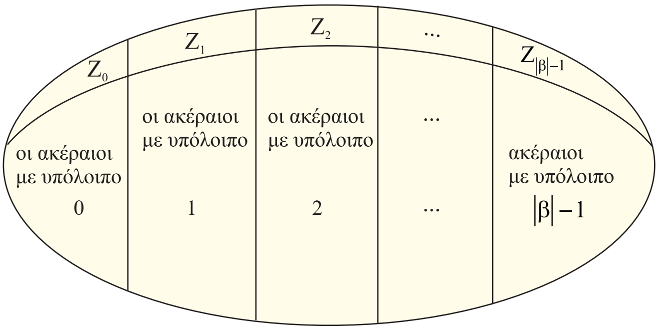
Αν $\upsilon = 0$ τότε $\alpha = 2\kappa$, $\kappa \in Z$ **(άρτιοι αριθμοί)**

Αν $\upsilon = 1$ τότε $\alpha = 2\kappa + 1$, $\kappa \in Z$ **(περιττοί αριθμοί)**

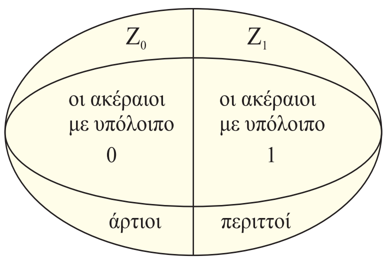
γ. Λόγω της μοναδικότητας του πηλίκου και του υπολοίπου σε μια ευκλείδεια διαίρεση η ισότητα $\alpha = \beta \cdot \lambda + \mu$ με $0 \leq \mu < |\beta|$, εκφράζει την ευκλείδεια διαίρεση του ακεραίου α με τον ακέραιο $\beta \neq 0$ με πηλίκο λ και υπόλοιπο μ.

δ. Οι ακέραιοι αριθμοί ταξινομούνται σε κατηγορίες ανάλογα με την τιμή του υπολοίπου της διαίρεσής τους με έναν ακέραιο έστω $\beta \neq 0$. (ισοϋπόλοιποι)

Ισχύει $\alpha = \kappa\beta + \upsilon$ με $\upsilon = 0,1,2,...,|\beta| - 1$ όπου $\alpha \in Z$ (τυχαίος) και $\beta \in Z^*$ (συγκεκριμένος). Τότε:



Ειδικά για την διαίρεση με τον 2 έχουμε:



Σχόλιο

Για την αντιμετώπιση αρκετών προβλημάτων στην θεωρία αριθμών χρειάζεται να διακρίνουμε τους ακέραιους σε δύο μεγάλες “πολυπληθείς” ομάδες, τους άρτιους και τους περιττούς δηλαδή της μορφής $\alpha = 2\kappa$ ή $\alpha = 2\kappa + 1$, $\kappa \in Z$ αντίστοιχα.

Άλλες φορές πάλι η λύση των προβλημάτων ή η απόδειξη ιδιοτήτων των ακέραιων απαιτεί τη διάκρισή τους σε μεγάλου πλήθους “ολιγομελείς” ομάδες δηλαδή της μορφής

$$\alpha = \kappa\beta\ ,\ \alpha = \kappa\beta + 1\ ,\ \alpha = \kappa\beta + 2\ , ...,\ \alpha = \kappa\beta + (|\beta| - 1)\ ,\ \kappa \in Z\ .$$

Στην παρακάτω πρόταση αναφέρονται σημαντικά και εύχρηστα συμπεράσματα. Όσα δεν αναφέρονται σαν προτάσεις στο σχολικό βιβλίο ,θα πρέπει να αποδεικνύονται.

Βασικές προτάσεις

Το άθροισμα ή η διαφορά δύο άρτιων είναι άρτιος.
Το άθροισμα ή η διαφορά δύο περιττών είναι άρτιος.
Αν η διαφορά δύο ακέραιων είναι άρτιος τότε και το άθροισμα είναι άρτιος και αντίστοιχα, αν η διαφορά δύο ακέραιων είναι περιττός τότε και το άθροισμα είναι περιττός.
Το άθροισμα ή η διαφορά ενός άρτιου και ενός περιττού είναι περιττός.
Το γινόμενο δύο άρτιων είναι άρτιος.
Το γινόμενο δύο περιττών είναι περιττός.

Το γινόμενο ενός άρτιου και ενός περιττού είναι άρτιος.
Το γινόμενο δύο διαδοχικών ακέραιων είναι άρτιος.

Αν α άρτιος τότε α^{ν} , $\nu \in \mathbb{N}^{*}$ είναι άρτιος.

Αν α περιττός τότε α^{ν} , $\nu \in \mathbb{N}^{*}$ είναι περιττός .
Το άθροισμα πεπερασμένου πλήθους άρτιων είναι άρτιος.
Το άθροισμα άρτιου πλήθους περιττών είναι άρτιος.
Το άθροισμα περιττού πλήθους περιττών είναι περιττός.
Το γινόμενο δύο ή περισσοτέρων ακέραιων είναι άρτιος , αν και μόνο αν, ένας τουλάχιστον παράγοντας είναι άρτιος.
Το γινόμενο δύο ή περισσοτέρων ακεραίων είναι περιττός, αν και μόνο αν, όλοι οι παράγοντες είναι περιττοί.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία - Μέθοδος 1

Για την εύρεση της ταυτότητας της αλγοριθμικής διαίρεσης του α με τον β αρχικά κάνουμε την διαίρεση του $|\alpha|$ με τον $|\beta|$ και στη συνέχεια διαμορφώνουμε τα πρόσημα των δύο μελών ώστε να εμφανίσουμε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του α με τον β.
Συχνά χρειάζεται και η προσθαφαίρεση του β (διαιρέτη) ώστε να εμφανίσουμε την ταυτότητα της διαίρεσης.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του α με τον β όταν:

i. $\alpha = 23$, $\beta = 4$ **ii.** $\alpha = -23$, $\beta = 4$ **iii.** $\alpha = 23$, $\beta = -4$ **iv.** $\alpha = -23$, $\beta = -4$

v. $\alpha = 4$, $\beta = 23$ **vi.** $\alpha = -4$, $\beta = 23$ **vii.** $\alpha = 4$, $\beta = -23$ **viii.** $\alpha = -4$, $\beta = -23$

Λύση

i. Είναι φανερό ότι $23 = 5 \cdot 4 + 3$

ii. Ισχύει λόγω του i. $23 = 5 \cdot 4 + 3$ ή $-23 = -5 \cdot 4 - 3$ ή $-23 = -5 \cdot 4 + 4 - 4 - 3$ ή $-23 = (-6)4 + 1$

iii. Ισχύει $23 = 5 \cdot 4 + 3$ ή $23 = (-5)(-4) + 3$

iv. Είναι $23 = 5 \cdot 4 + 3$ ή $-23 = -5 \cdot 4 - 3$ ή $-23 = -5 \cdot 4 - 4 + 4 - 3$ ή $-23 = (6)(-4) + 1$.

v. Είναι προφανές ότι $4 = 0 \cdot 23 + 4$.

vi. Ισχύει $4 = 0 \cdot 23 + 4$ ή $-4 = -0 \cdot 23 - 4$ ή $-4 = -0 \cdot 23 - 23 + 23 - 4$ ή $-4 = (-1)23 + 19$.

vii. Είναι $4 = 0 \cdot 23 + 4$ ή $4 = 0 \cdot (-23) + 4$.

viii. Ισχύει $4 = 0 \cdot 23 + 4$ ή $-4 = -0 \cdot 23 - 4$ ή $-4 = -0 \cdot 23 - 23 + 23 - 4$ ή $-4 = 1(-23) + 19$.

Ο πολλαπλασιασμός και των δύο μελών σε αρκετές από τις παραπάνω ισότητες όπως και η προσθαφαίρεση του διαιρέτη και στα δύο μέλη σκοπό έχει να “δημιουργήσουμε” υπόλοιπο υ θετικό και μικρότερο της απόλυτης τιμής του διαιρέτη.

Παράδειγμα 2

Δίνεται η ισότητα $143 = 11 \cdot 12 + 11$ (Ι).

α. Να ελέγξετε ποιων ακεραίων αποτελεί ταυτότητα αλγοριθμικής διαίρεσης.

β. Να προσδιορίσετε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του 143 με τον 11 με τη βοήθεια της ισότητας (Ι).

Λύση

α. Αποτελεί ταυτότητα ευκλείδειας διαίρεσης του 143 με τον 12 ,αφού ισχύει: $\alpha = \kappa\beta + \upsilon$ με $0 \le \upsilon < |\beta|$,όπου $\alpha = 143$, $\kappa = 11$, $\beta = 12$ και $\upsilon = 11$ με $0 \le 11 < 12$ ενώ δεν αποτελεί ταυτότητα ευκλείδειας διαίρεσης του 143 με τον 11, διότι δεν ισχύει $0 \le 11 < 11$.

β. Λόγω του i. ερωτήματος η ισότητα (Ι) δεν είναι ταυτότητα ευκλείδειας διαίρεσης του 143 με τον 11.

Έχουμε $143 = 11 \cdot 12 + 11$ ή $143 = 11 \cdot 12 + 11 - 11 + 11$ ή $143 = 13 \cdot 11 + 0$.

Άρα το πηλίκο είναι 13 το υπόλοιπο 0 και η διαίρεση είναι τέλεια.

Παράδειγμα 3

α. Να δείξετε ότι κάθε αριθμός της μορφής $2\kappa - 1$ **είναι περιττός,** $\kappa \in Z$.

β. Να δείξετε ότι κάθε αριθμός της μορφής $2\kappa + 2$ **είναι άρτιος,** $\kappa \in Z$.

γ. Να δείξετε ότι κάθε περιττός αριθμός είναι της μορφής $4\kappa \pm 1$, $\kappa \in Z$.

Λύση

α. Έστω ακέραιος αριθμός $\alpha = 2\kappa - 1$, $\kappa \in Z$. Είναι $\alpha = 2\kappa - 1 = 2\kappa - 2 + 1 = 2(\kappa - 1) + 1$.

Θέτουμε $\kappa - 1 = \lambda$ οπότε $\alpha = 2\lambda + 1$, $\lambda \in Z$. Άρα ο $\alpha = 2\kappa - 1$, $\kappa \in Z$ είναι περιττός.

β. Έστω ακέραιος αριθμός $\alpha = 2\kappa + 2$, $\kappa \in Z$.

Είναι $\alpha = 2\kappa + 2 = 2(\kappa + 1) = 2\lambda$, $\lambda \in Z$. Άρα ο $\alpha = 2\kappa + 2$, $\kappa \in Z$ είναι άρτιος.

γ. Έστω ένας περιττός ακέραιος $\alpha = 2\lambda + 1$, $\lambda \in Z$. Ο ακέραιος λ είναι ή άρτιος ή περιττός.

Αν $\lambda = 2\kappa$ τότε $\alpha = 2(2\kappa) + 1 = 4\kappa + 1$, $\kappa \in Z$.

Ενώ,αν $\lambda = 2\mu + 1$ τότε :

$$\alpha = 2(2\mu + 1) + 1 = 4\mu + 3 = 4\mu + 4 - 1 = 4(\mu + 1) - 1 = 4\kappa - 1,\ \kappa = \mu + 1 \in Z.$$

Παράδειγμα 4

Α. Το τετράγωνο ενός ακεραίου α παίρνει τις μορφές:

α. $\alpha^2 = 3\lambda$ **ή** $\alpha^2 = 3\lambda + 1,\ \lambda \in Z$

β. $\alpha^2 = 4\kappa$ **ή** $\alpha^2 = 4\kappa + 1,\ \kappa \in Z$

γ. $\alpha^2 = 5\rho$ **ή** $\alpha^2 = 5\rho - 1$ **ή** $\alpha^2 = 5\rho + 1,\ \rho \in Z$

Β. Το τετράγωνο ενός περιττού ακεραίου α παίρνει τις μορφές:

δ. $\alpha^2 = 8\lambda + 1\ \lambda \in Z$ **ε.** $\alpha^2 = 4\rho + 1$ **ή** $\alpha^2 = 4\rho - 1,\ \rho \in Z$

Γ. Το τετράγωνο ενός άρτιου ακέραιου α παίρνει την μορφή : $\zeta \cdot \alpha^2 = 4\kappa,\ \kappa \in Z$.

Λύση

Α.α. Είναι γνωστό ότι η ευκλείδεια διαίρεση του ακέραιου α με τον 3 έχει δυνατά υπόλοιπα. $\upsilon = 0,1,2$ οπότε ο α είναι της μορφής:

$$\alpha = 3\kappa,\ \alpha = 3\kappa+1,\ \alpha = 3\kappa+2,\ \kappa\in Z.$$

- Αν $\alpha = 3\kappa$ τότε $\alpha^2 = (3\kappa)^2 = 9\kappa^2 = 3(3\kappa^2) = 3\lambda,\ \lambda\in Z$.
- Αν $\alpha = 3\kappa+1$ τότε $\alpha^2 = (3\kappa+1)^2 = 9\kappa^2+6\kappa+1 = 3(3\kappa^2+2\kappa)+1 = 3\lambda+1$.
- Αν $\alpha = 3\kappa+2$ τότε $\alpha^2 = (3\kappa+2)^2 = 9\kappa^2+12\kappa+4 = 9\kappa^2+12\kappa+3+1 =$
  $$= 3(3\kappa^2+4\kappa+1)+1 = 3\lambda+1, \lambda\in Z$$

Σχόλιο:

Επιπλέον αναφέρουμε ότι $\alpha = 3\kappa+2 = 3\kappa+3-1 = 3(\kappa+1)-1 = 3\lambda-1, \lambda\in Z$

οπότε οι δεκτές μορφές του α είναι : $\alpha = 3\kappa,\ \alpha = 3\kappa-1,\ \alpha = 3\kappa+1,\ \kappa\in Z$.

β. Σύμφωνα με την ταυτότητα ευκλείδειας διαίρεσης του α με τον 4 είναι

$$\alpha = 4\kappa,\ \alpha = 4\kappa+1,\ \alpha = 4\kappa+2,\ \alpha = 4\kappa+3,\ \kappa\in Z.$$

- Αν $\alpha = 4\kappa$ είναι $\alpha^2 = 16\kappa^2 = 4(4\kappa^2) = 4\lambda^*,\ \lambda\in Z$.
- Αν $\alpha = 4\kappa+1$ είναι $\alpha^2 = (4\kappa+1)^2 = 16\kappa^2+8\kappa+1 = 4(4\kappa^2+2\kappa)+1 = 4\lambda+1,\ \lambda\in Z$.
- Αν $\alpha = 4\kappa+2$ είναι $\alpha^2 = (4\kappa+2)^2 = 16\kappa^2+16\kappa+4 = 4(4\kappa^2+4\kappa+1) = 4\lambda,\ \lambda\in Z$.
- Αν $\alpha = 4\kappa+3$ είναι $\alpha^2 = (4\kappa+3)^2 = 16\kappa^2+24\kappa+9 = 16\kappa^2+24\kappa+8+1 =$
  $$= 4(4\kappa^2+6\kappa+2)+1 = 4\lambda+1,\ \lambda\in Z$$

γ. Ισχύει $\alpha = 5\kappa+\upsilon$ με $0\le\upsilon<5,\ \kappa\in Z$ οπότε

$$\alpha^2 = (5\kappa+\upsilon)^2 = 25\kappa^2+10\kappa\upsilon+\upsilon^2 = 5(5\kappa^2+2\upsilon\kappa)+\upsilon^2 = 5\rho+\upsilon^2,\ \rho\in Z.$$

Αν $\upsilon = 0$ τότε $\alpha^2 = 5\rho$, $\rho\in Z$

$\upsilon = 1$ τότε $\alpha^2 = 5\rho+1,\ \rho\in Z$

$\upsilon = 2$ τότε $\alpha^2 = 5\rho+4 = 5\rho+5-1 = 5(\rho+1)-1 = 5\lambda-1,\ \lambda\in Z$

$\upsilon = 3$ τότε $\alpha^2 = 5\rho+9 = 5\rho+10-1 = 5(\rho+2)-1 = 5\lambda-1,\ \lambda\in Z$

$\upsilon = 4$ τότε $\alpha^2 = 5\rho+16 = 5\rho+15+1 = 5(\rho+3)+1 = 5\lambda+1,\ \lambda\in Z$

Άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει : $\alpha^2 = 5\rho$ ή $\alpha^2 = 5\rho - 1$ ή $\alpha^2 = 5\rho + 1$.

---

* Όταν ζητείται να αποδείξουμε $\alpha = 4\kappa$ ή $\alpha = 4\lambda$ ή $\alpha = 4\rho$ κ. λ.π. και αποδείξουμε ότι $\alpha = 4\mu$ είναι το ίδιο πράγμα αφού όλα τα παραπάνω σημαίνουν ότι ο α είναι πολλαπλάσιο του 4.

Β.δ. Έστω ακέραιος περιττός $\alpha = 2\kappa+1,\ \kappa \in Z$.

Τότε $\alpha^2 = (2\kappa+1)^2 = 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 = 4\kappa(\kappa+1)+1 = 4\cdot 2\lambda + 1 = 8\lambda + 1, \lambda \in Z$

Κάναμε χρήση του συμπεράσματος "Το γινόμενο δύο διαδοχικών ακέραιων είναι άρτιος". Οι αποδείξεις των υπολοίπων είναι ανάλογες.

Κατηγορία - Μέθοδος 2

Όταν γνωρίζουμε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $\Delta_1(\alpha)$ με $\delta_1(\beta)$ και ζητούμε το πηλίκο ή το υπόλοιπο της διαίρεσης $\Delta_2(\alpha)$ με $\delta_2(\beta)$ μετασχηματίζουμε κατάλληλα την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του $\Delta_1(\alpha)$ με τον $\delta_1(\alpha)$ ώστε να εμφανίσουμε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του $\Delta_2(\alpha)$ με τον $\delta_2(\beta)$.
Ο μετασχηματισμός περιλαμβάνει πολλαπλασιασμούς και προσθαφαιρέσεις ειδικών παραστάσεων των α, β και ιδιαίτερα προσοχή στον περιορισμό του υπολοίπου.

Παράδειγμα 1

Θεωρούμε την ευκλείδεια διαίρεση των θετικών ακέραιων α, β, με πηλίκο κ και υπόλοιπο υ. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του ακέραιου $x\alpha + y\beta$ με τον β όπου x, y ακέραιοι.

Λύση

Ισχύει $\alpha = \kappa\beta + \upsilon$ με $0 \le \upsilon < \beta$.

Οπότε $x\alpha = \kappa x\beta + x\upsilon$ ή $x\alpha + y\beta = \kappa x\beta + y\beta + x\upsilon$ (1)

α. Αν $0 \le x\upsilon < \beta$ τότε η (1) γράφεται $x\alpha + y\beta = (\kappa x + y)\beta + x\upsilon$ και αποτελεί την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του $x\alpha + y\beta$ με τον β με πηλίκο $\kappa x + y$ και υπόλοιπο xυ.

β. Αν $x\upsilon \ge \beta$ τότε η (1) γράφεται :

$$x\alpha + y\beta = \kappa x\beta + y\beta + \lambda\beta + (x\upsilon - \lambda\beta),\ \text{με } \lambda \in Z \text{ έτσι ώστε } 0 \le x\upsilon - \lambda\beta < \beta$$

Οπότε

$x\alpha + y\beta = (\kappa x + y + \lambda)\beta + (x\upsilon - \lambda\beta)$ και αποτελεί την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του $x\alpha + y\beta$ με τον β με πηλίκο $\kappa x + y + \lambda$ και υπόλοιπο $x\upsilon - \lambda\beta$.

Ο προσδιορισμός του λ γίνεται από την επίλυση του συστήματος :

$$\begin{cases} x\upsilon - \lambda\beta \ge 0 \Leftrightarrow x\upsilon \ge \lambda\beta \Leftrightarrow \lambda \le \dfrac{x\upsilon}{\beta} \\ \text{και} \\ x\upsilon - \lambda\beta < \beta \Leftrightarrow x\upsilon - \beta < \lambda\beta \Leftrightarrow \dfrac{x\upsilon - \beta}{\beta} < \lambda \Leftrightarrow \lambda > \dfrac{x\upsilon - \beta}{\beta} \end{cases}$$

δηλαδή $\dfrac{x\upsilon - \beta}{\beta} < \lambda \le \dfrac{x\upsilon}{\beta}$.

Κατηγορία - Μέθοδος 3

Για να αποδείξουμε ή να ελέγξουμε ότι ένα κλάσμα της μορφής $\frac{\Pi(\alpha)}{\nu}$ παριστάνει ακέραιο ($\Pi(\alpha)$ είναι μια παράσταση του ακέραιου α) συνήθως εκφράζουμε τον ακέραιο $\alpha = \kappa\nu + \upsilon$ με $\upsilon = 0,1,2,...,\nu-1$ δηλαδή $\alpha = \kappa\nu$, $\alpha = \kappa\nu + 1$, ..., $\alpha = \kappa\nu + (\nu-1)$ και εξετάζουμε την τιμή του κλάσματος $\frac{\Pi(\alpha)}{\nu}$, για κάθε μια μορφή του α.

Παράδειγμα 1

Θεωρούμε το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $-\frac{x}{7}+\frac{y}{4}=1$ (Ι).

α. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ είναι ευθεία.

β. Να προσδιορίσετε το σύνολο των σημείων της ευθείας του α. ερωτήματος που έχουν συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς.

γ. Να ελέγξετε αν τα σημεία του επιπέδου με ακέραιες συντεταγμένες των οποίων η τεταγμένη διαιρούμενη με τον αριθμό 4 δίνει υπόλοιπο 1 ή 3 βρίσκονται πάνω στην ευθεία του α. ερωτήματος.

δ. Να ελέγξετε αν το σημείο με συντεταγμένες ακέραιους και τεταγμένη $4(2003)^{2004}+5$ βρίσκεται επί της ευθείας (Ι).

Λύση

α. Ισχύει $-\frac{x}{7}+\frac{y}{4}=1 \Leftrightarrow 4x-7y=-28 \Leftrightarrow 4x-7y+28=0$ οπότε η σχέση (Ι) έχει τη μορφή $Ax+By+\Gamma=0$ με $|A|+|B|\neq 0$ και επομένως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,y)$ που επαληθεύουν την (Ι) είναι ευθεία.

β. Η εξίσωση $4x-7y+28=0$ γίνεται $4x=7y-28 \Leftrightarrow x=\frac{-28+7y}{4} \Leftrightarrow x=-7+\frac{7y}{4}$.

Επειδή ο x είναι ακέραιος πρέπει και $-7+\frac{7y}{4}$ να είναι ακέραιος. Γνωρίζουμε ότι τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης του y με τον 4 είναι 0, 1, 2, 3 ,οπότε ο ακέραιος y έχει μία από τις μορφές : $y=4\kappa$ ή $y=4\kappa+1$ ή $y=4\kappa+2$ ή $y=4\kappa+3$, $\kappa\in Z$.

- Αν $y=4\kappa$, $\kappa\in Z$ τότε : $-7+\frac{7y}{4}=-7+\frac{7\cdot 4\kappa}{4}=-7+7\kappa=7(\kappa-1)\in Z$.
- Αν $y=4\kappa+1$, $\kappa\in Z$ τότε : $-7+\frac{7y}{4}=-7+\frac{7(4\kappa+1)}{4}=-7+\frac{7\cdot 4\kappa}{4}+\frac{7}{4}=-7+7\kappa+\frac{7}{4}\notin Z$
- Αν $y=4\kappa+2$ $\kappa\in Z$ τότε :

$$-7+\frac{7y}{4}=-7+\frac{7(4\kappa+2)}{4}=-7+\frac{7\cdot 4\kappa}{4}+\frac{14}{4}=-7+7\kappa+\frac{7}{2}\notin Z$$

• Αν $y=4\kappa+3$, $\kappa\in Z$ τότε :

$$-7+\frac{7y}{4}=-7+\frac{7(4\kappa+3)}{4}=-7+\frac{7\cdot 4\kappa}{4}+\frac{21}{4}=-7+7\kappa+\frac{21}{4}\notin Z$$

Τα σημεία της ευθείας με εξίσωση $4x-7y+28=0$ που έχουν συντεταγμένες ακέραιους είναι $M(x,y)$ με $x=7(\kappa-1)$ και $y=4\kappa$, $\kappa\in Z$.

γ. Έστω $\Sigma(x,y)$ τα σημεία του επιπέδου με x, y ακέραιους. Επειδή ο y διαιρούμενος με τον 4 δίνει υπόλοιπο 1 ή 3 έχει την μορφή $y=4\kappa+1$ ή $y=4\kappa+3$, σύμφωνα με το συμπέρασμα του β. ερωτήματος τα σημεία $\Sigma(x,y)$ δεν αποτελούν σημεία της ευθείας $4x-7y+28=0$.

δ. Η τεταγμένη $4(2003)^{2004}+5$ του σημείου γίνεται:

$4(2003)^{2004}+4+1=4\left[(2003)^{2004}+1\right]+1=4\kappa+1$, όπου $\kappa=[(2003)^{2004}+1]\in Z$ οπότε λόγω του συμπεράσματος του ερωτήματος γ. το σημείο δεν ανήκει στην ευθεία.

Παράδειγμα 2

Έστω α ακέραιος αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί της μορφής $\frac{\alpha(\alpha^2+2)}{3}$ είναι ακέραιοι.

β. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A=\frac{\alpha^3+(\alpha+1)^3+(\alpha+2)^3}{9}$ είναι ακέραιος.

Λύση

α. Επειδή τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης του α με τον 3 είναι 0, 1, 2 ο α έχει μια από τις μορφές $\alpha=3\kappa$ ή $\alpha=3\kappa+1$ ή $\alpha=3\kappa+2$, $\kappa\in Z$.

• Αν $\alpha=3\kappa$, $\kappa\in Z$ τότε: $\frac{\alpha(\alpha^2+2)}{3}=\frac{3\kappa[(3\kappa)^2+2]}{3}=\kappa(9\kappa^2+2)\in Z$.

• Αν $\alpha=3\kappa+1$, $\kappa\in Z$ τότε:

$$\frac{\alpha(\alpha^2+2)}{3}=\frac{(3\kappa+1)[(3\kappa+1)^2+2]}{3}=(3\kappa+1)(3\kappa^2+2\kappa+1)\in Z.$$

• Αν $\alpha=3\kappa+2$, $\kappa\in Z$ τότε:

$$\frac{\alpha(\alpha^2+2)}{3}=\frac{(3\kappa+2)[(3\kappa+2)^2+2]}{3}=(3\kappa+2)(3\kappa^2+4\kappa+2)\in Z.$$

β. Είναι $A=\frac{\alpha^3+(\alpha+1)^3+(\alpha+2)^3}{9}=\frac{\alpha^3+(\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1)+(\alpha^3+6\alpha^2+12\alpha+8)}{9}=$

$$\frac{3\alpha^3+9\alpha^2+15\alpha+9}{9}=\frac{\alpha^3+3\alpha^2+5\alpha+3}{3}=\frac{\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+2\alpha+3}{3}=$$

$$\frac{(3\alpha^2+3\alpha+3)+(\alpha^3+2\alpha)}{3}=\frac{3(\alpha^2+\alpha+1)}{3}+\frac{\alpha(\alpha^2+2)}{3}=(\alpha^2+\alpha+1)+\frac{\alpha(\alpha^2+2)}{3}\in Z,$$

λόγω (α.) ερωτήματος.

Κατηγορία - Μέθοδος 4

Στην περίπτωση που αναζητούμε τους ακέραιους που διαιρούμενοι με γνωστό αριθμό δίνουν πηλίκο $\Pi(\lambda)$ και υπόλοιπο $\upsilon(\lambda)$ εκμεταλευόμαστε την ανισοτική σχέση, από την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης, που αφορά στο υπόλοιπο δημιουργώντας ανισοτική σχέση για το λ. Απο την ανισοτική αυτή σχέση προσδιορίζουμε το λ (αφού λ ακέραιος) και στη συνέχεια βρίσκουμε τους ζητούμενους ακέραιους.

Παράδειγμα 1

Να προσδιορίσετε (αν υπάρχει) ακέραιος α ο οποίος διαιρούμενος με τον –12 δίνει πηλίκο λ - 163 και υπόλοιπο $\lambda^3+3\lambda^2-4\lambda$.

Λύση

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι $\alpha=(-12)(\lambda-163)+(\lambda^3+3\lambda^2-4\lambda)$.

Πρέπει $0\le\lambda^3+3\lambda^2-4\lambda<|-12|$ δηλαδή $\lambda^3+3\lambda^2-4\lambda-12<0$ (1) και

$\lambda^3+3\lambda^2-4\lambda\ge0$ (2).

Επίλυση της ανίσωσης (1).

Έχουμε $\lambda^3+3\lambda^2-4\lambda-12<0$

$\Leftrightarrow \lambda^2(\lambda+3)-4(\lambda+3)<0\Leftrightarrow$

$(\lambda^2-4)(\lambda+3)<0$

$\Gamma_1=(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda+3)<0\Leftrightarrow$

$\lambda\in(-\infty,-3)\cup(-2,2)$

λ	-∞	-3		-2		2	+∞
λ - 2	-		-		-		+
λ + 2	-		-		+		+
λ + 3	-		+		+		+
Γ_1	-		+		-		+

Επίλυση της ανίσωσης (2).

Έχουμε

$\lambda^3+3\lambda^2-4\lambda\ge0\Leftrightarrow\lambda(\lambda^2+3\lambda-4)\ge0$

$\Leftrightarrow\Gamma_2=\lambda(\lambda+4)(\lambda-1)\ge0$

$\lambda\in[-4,0]\cup[1,+\infty)$

λ	-∞	-4		0		1	+∞
λ	-		-		+		+
λ + 4	-		+		+		+
λ -1	-		-		-		+
Γ_2	-		+		-		+

Από την επαλήθευση των ανισώσεων (1) και (2) και επειδή $\lambda\in Z$ προκύπτουν,

$\lambda=-4$ ή $\lambda=0$ ή $\lambda=1$.

Για $\lambda = -4$ είναι $\alpha = (-12)(-4-163)+0 = 2004$

Για $\lambda = 0$ είναι $\alpha = (-12)(0-163)+0 = 1956$

Για $\lambda = 1$ είναι $\alpha = (-12)(1-163)+0 = 1944$.

Παράδειγμα 2

α. Να προσδιορίσετε τους θετικούς ακέραιους α και β αν το πηλίκο της διαίρεσης του α με τον β είναι 8 και το υπόλοιπο 3 , δεδομένου ότι $\alpha < 43$.

β. Να προσδιορίσετε τους φυσικούς αριθμούς α, β αν ισχύει $363 = 15\alpha + 29\beta$ και $\alpha + \beta < 14$.

Λύση

α. Ισχύει $\alpha = 8\beta + 3$ με $0 \leq 3 < \beta$ δηλαδή $\beta > 3$ (1).

Επίσης είναι $\alpha < 43 \Leftrightarrow 8\beta + 3 < 43 \Leftrightarrow 8\beta < 40 \Leftrightarrow \beta < 5$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) και επειδή β ακέραιος είναι $\beta = 4$.

Άρα $\alpha = 8 \cdot 4 + 3$ δηλαδή $\alpha = 35$.

β. Έχουμε $363 = 15\alpha + 29\beta = 14\alpha + 28\beta + \alpha + \beta = 14(\alpha + 2\beta) + \alpha + \beta$ και επειδή $0 \leq \alpha + \beta < 14$ μπορούμε να θεωρήσουμε το $\alpha + 2\beta$ ως πηλίκο και το $\alpha + \beta$ υπόλοιπο της διαίρεσης $363 : 14$. Όμως $363 = 14 \cdot 25 + 13$ και επειδή το πηλίκο και το υπόλοιπο στην ευκλείδεια διαίρεση είναι μοναδικά πρέπει να ισχύουν: $\begin{cases} \alpha + 2\beta = 25 \\ \alpha + \beta = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 1$ και $\beta = 12$.

Παράδειγμα 3

Να προσδιορίσετε τους ακέραιους αριθμούς κ, λ, μ για τους οποίους ισχύει :

$$\kappa + 4\lambda + 80\mu = 583 \text{ με } 0 \leq \kappa < 4 \text{ και } \lambda < 6 .$$

Λύση

Είναι $\kappa + 4\lambda + 80\mu = 583$ ή $\kappa + 4(\lambda + 20\mu) = 583$ (1).

Επειδή $0 \leq \kappa < 4$ και το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης δύο ακέραιων είναι μοναδικοί αριθμοί, από την (1) προκύπτει ότι το κ ισούται με το υπόλοιπο και το $\lambda + 20\mu$ με το πηλίκο της διαίρεσης του 583 με τον 4 δηλαδή $\kappa = 3$ και $\lambda + 20\mu = 145$ (2) αφού $583 = 4 \cdot 145 + 3$.

Η σχέση (2) δηλαδή $\lambda + 20\mu = 145$ αφού $\lambda < 6$ εκφράζει την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του 145 με τον 20 η οποία είναι $145 = 20 \cdot 7 + 5$ και για τους ίδιους με τη παραπάνω περίπτωση λόγους ο $\lambda = 5$ και ο $\mu = 7$ ως μοναδικά, υπόλοιπο και πηλίκο της διαίρεσης του 145 με τον 20 αντίστοιχα.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

α. Να βρείτε τις τιμές του ακέραιου αριθμού κ ώστε ο αριθμός $\alpha=\frac{5\kappa+4}{3}$ να είναι ακέραιος

β. Να βρείτε τις τιμές του $\kappa\in Z$ ώστε ο αριθμός $\alpha=\frac{6\kappa-3}{4}$ να είναι ακέραιος

Λύση

α. Η διαίρεση του κ με το 3 δίνει: $\kappa=3\lambda+\upsilon$ με $\upsilon=0,1,2$.

- Αν $\upsilon=0$ τότε $\kappa=3\lambda$ οπότε $\alpha=\frac{5\kappa+4}{3}=\frac{5\cdot3\lambda+4}{3}=\frac{15\lambda+4}{3}=5\lambda+\frac{4}{3}\notin Z$
- Αν $\upsilon=1$ τότε $\kappa=3\lambda+1$ οπότε $\alpha=\frac{5(3\lambda+1)+4}{3}=\frac{15\lambda+9}{3}=5\lambda+3\in Z$
- Αν $\upsilon=2$ τότε $\kappa=3\lambda+2$ οπότε $\alpha=\frac{5(3\lambda+2)+4}{3}=\frac{15\lambda+14}{3}=5\lambda+\frac{14}{3}\notin Z$

άρα ο αριθμός $\alpha=\frac{5\kappa+4}{3}$ είναι ακέραιος όταν $\kappa=3\lambda+1,\ \lambda\in Z$.

β. Από την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του κ με το 4 προκύπτει:

$\kappa=4\lambda+\upsilon$ με $0\le\upsilon<4$ δηλαδή $\upsilon=0,1,2,3$.

- Αν $\upsilon=0$ τότε $\kappa=4\lambda$ οπότε $\alpha=\frac{6\cdot4\lambda-3}{4}=\frac{24\lambda-3}{4}=6\lambda-\frac{3}{4}\notin Z$.
- Αν $\upsilon=1$ τότε $\kappa=4\lambda+1$ οπότε $\alpha=\frac{6\cdot(4\lambda+1)-3}{4}=\frac{24\lambda+3}{4}=6\lambda+\frac{3}{4}\notin Z$.
- Αν $\upsilon=2$ τότε $\kappa=4\lambda+2$ οπότε $\alpha=\frac{6(4\lambda+2)-3}{6}=\frac{24\lambda+9}{6}=4\lambda+\frac{3}{2}\notin Z$.
- Αν $\upsilon=3$ τότε $\kappa=4\lambda+3$ οπότε $\alpha=\frac{6(4\lambda+3)-3}{4}=\frac{24\lambda+15}{4}=4\lambda+\frac{15}{4}\notin Z$.

Άρα δεν υπάρχει $\kappa\in Z$ τέτοιο ώστε το $\alpha\in Z$.

Άσκηση 2

Αν ο ακέραιος κ διαιρούμενος με 4 δίνει υπόλοιπο 2 να δείξετε ότι ο αριθμός $\alpha=\kappa^2+2\kappa+3$ διαιρούμενος με 4 δίνει υπόλοιπο 3.

Λύση

Αφού ο κ διαιρούμενος με 4 δίνει υπόλοιπο 2 τότε είναι της μορφής $\kappa=4\lambda+2,\ \lambda\in Z$.

Είναι $\alpha=\kappa^2+2\kappa+3=(4\lambda+2)^2+2(4\lambda+2)+3=16\lambda^2+16\lambda+4+8\lambda+4+3=$

$$16\lambda^2+24\lambda+11=16\lambda^2+24\lambda+8+3=4(4\lambda^2+6\lambda+2)+3=4\rho+3.$$

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του α με 4 είναι 3.

Άσκηση 3

Αν σε μια διαίρεση ο διαιρετέος είναι ο 532 και το πηλίκο ο 19 να βρείτε τον διαιρέτη και το υπόλοιπο.

Λύση

Είναι $532 = 19\cdot\delta + \upsilon,\ 0 \le \upsilon < \delta$. Οπότε $532 = 19\cdot\delta + \upsilon \Leftrightarrow 532 - 19\cdot\delta = \upsilon$ (1)

Επίσης $0 \le \upsilon < \delta \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 0 \le 532 - 19\delta < \delta \begin{cases} 532 - 19\delta < \delta \Leftrightarrow 532 < 20\delta \Leftrightarrow \delta > \dfrac{532}{20} \\ 0 \le 532 - 19\delta \Leftrightarrow 19\delta \le 532 \Leftrightarrow \delta \le \dfrac{532}{19} \end{cases}$

Άρα $\dfrac{532}{20} < \delta \le \dfrac{532}{19} \Leftrightarrow 26,6 < \delta \le 28$, οπότε το δ παίρνει τις τιμές 27,28.

- Αν $\delta = 27$ τότε από την (1) είναι $\upsilon = 532 - 19\cdot 27 \Leftrightarrow \upsilon = 19$.
- Αν $\delta = 28$ τότε από την (1) είναι $\upsilon = 532 - 19\cdot 28 \Leftrightarrow \upsilon = 0$.

Άσκηση 4

Αν ο α είναι περιττός ακέραιος να δείξετε ότι ο αριθμός $\dfrac{\alpha^4 - 1}{16} \in Z$

Λύση

1ος τρόπος

Αφού ο α είναι είναι περιττός γράφεται με τη μορφή : $\alpha = 2\lambda + 1,\ \lambda \in Z$.

Τότε $\dfrac{\alpha^4 - 1}{16} = \dfrac{(\alpha^2)^2 - 1}{16} = \dfrac{(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 + 1)}{16} = \dfrac{(\alpha - 1)(\alpha + 1)(\alpha^2 + 1)}{16} =$

$$= \frac{(2\lambda + 1 - 1)(2\lambda + 1 + 1)(4\lambda^2 + 4\lambda + 1 + 1)}{16} = \frac{2\lambda(2\lambda + 2)(4\lambda^2 + 4\lambda + 2)}{16} =$$

$$= \frac{2\lambda\cdot 2(\lambda + 1)\cdot 2(2\lambda^2 + 2\lambda + 1)}{16} = \frac{8\lambda(\lambda + 1)(2\lambda^2 + 2\lambda + 1)}{16} =$$

$$= \frac{\lambda(\lambda + 1)(2\lambda^2 + 2\lambda + 1)}{2} \overset{(*)}{=} \frac{2\rho(2\lambda^2 + 2\lambda + 1)}{2} = \rho(2\lambda^2 + 2\lambda + 1) \in Z$$

(*) $\lambda, \lambda + 1$ είναι διαδοχικοί ακέραιοι οπότε $\lambda(\lambda + 1) = 2\rho$

2ος τρόπος

(Από την εφαρμογή (2) του Σχολ. βιβλίου "Μαθηματικά Θετικής Κατευθυνσης"

ii) Το τετράγωνο κάθε περιττού αριθμού είναι της μορφής $\alpha^2 = 8\lambda + 1,\ \lambda \in Z$.

Είναι $\dfrac{\alpha^4 - 1}{16} = \dfrac{(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 + 1)}{16} = \dfrac{(8\lambda + 1 - 1)(8\lambda + 1 + 1)}{16} = \dfrac{8\lambda(8\lambda + 2)}{16} = \dfrac{16\lambda(4\lambda + 1)}{16} =$

$= \lambda(4\lambda + 1) \in Z$.

Άσκηση 5

Αν ο ακέραιος αριθμός α δεν είναι πολλαπλάσιο του 3 να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του α^2+1 με το 3.

Λύση

Ο ακέραιος α γράφεται: $\alpha = 3\lambda + \upsilon,\ \upsilon = 0,1,2$.

Δηλαδή: $\alpha = 3\lambda$

$\alpha = 3\lambda + 1$

$\alpha = 3\lambda + 2$

Αφού το α δεν είναι πολ/σιο του 3 είναι $\begin{cases} \alpha = 3\lambda+1 \\ \quad\text{ή} \\ \alpha = 3\lambda+2 \end{cases}$

• Αν α = 3λ + 1 τότε $\alpha^2+1 = (3\lambda+1)^2+1 = 9\lambda^2+6\lambda+2 = 3\underbrace{(3\lambda^2+2\lambda)}_{\rho}+2 = 3\rho+2$, οπότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του α^2+1 με 3 είναι 2.

• Αν α = 3λ + 2 τότε

$$\alpha^2+1 = (3\lambda+2)^2+1 = 9\lambda^2+12\lambda+5 = 9\lambda^2+12\lambda+3+2 = 3\underbrace{(3\lambda^2+4\lambda+1)}_{\rho}+2 = 3\rho+2$$

οπότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του α^2+1 με 3 είναι 2.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του α με τον β στις παρακάτω περιπτώσεις:
i. α = 103, β = 12, **ii.** α = -59, β = 6 **iii.** α = 127, β = -7 **iv.** α = -98, β = -3

2. Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς α, β, γ, δ για τους οποίους ισχύουν:

α. $\alpha+6\beta+24\gamma+72\delta = 658$

β. $\alpha<6,\ \beta<4,\ \gamma<3$

3. Να εξετάσετε πότε ο αριθμός $\alpha = \dfrac{\nu^2+2}{3}$ να είναι ακέραιος αν $\nu \in Z$

4. Να βρείτε οι τιμές του $\rho \in Z$ ώστε ο αριθμός $\alpha = \dfrac{5\rho+3}{6}$ να είναι ακέραιος.

5. Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha \in Z$ ο αριθμός $\dfrac{\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)}{6}$ είναι ακέραιος

6. Αν α περιττός ακέραιος να δείξετε ότι:

α. ο αριθμός $\frac{3\alpha^2+6\alpha+3}{12}$ είναι ακέραιος

β. ο αριθμός $\frac{(\alpha^2+11)(\alpha^2+15)}{32}$ είναι θετικός ακέραιος

7. Δίνεται το κλάσμα $\kappa=\frac{\nu^2+\nu+1}{\nu^3+\nu^2+2}$, $\nu\in N^*$ το οποίο απλοποιείται με τον αριθμό 7.

Να δείξετε ότι ο ν διαιρούμενος με 7 δίνει υπόλοιπο 2.

8. Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς ν ώστε ο αριθμός $\alpha=\frac{\nu^2+\nu+2}{3}$ να είναι ακέραιος.

9. Έστω α, β, γ διαδοχικοί περιττοί ακέραιοι. Να δείξετε ότι αν ένας απ' αυτούς διαιρείται με τον αριθμό 3 δίνει υπόλοιπο μηδέν (υ = 0)

10. Αν $\alpha\in Z$ και ο α δεν είναι πολλαπλάσιο του 4 να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του α^2 με τον 4.

11. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2=1+8y$ έχει λύση στο σύνολο των ακεραίων Z.

12. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ όπου οι συντελεστές α, β και ο σταθερός όρος γ είναι περιττοί ακέραιοι αριθμοί. Να δείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει ρητές ρίζες.

13. Έστω f(x) πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές για το οποίο ισχύει ότι $f(4)\cdot f(5)$ είναι περιττός αριθμός. Να δείξετε ότι το f(x) δεν έχει ακέραια ρίζα.

14. Να εξετάσετε αν είναι δυνατόν ο αριθμός 3541 να γραφεί ως άθροισμα 600 φυσικών αριθμών που επιλέγονται από το σύνολο $A=\{1,3,5,7,9\}$

15. Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς x, y ώστε να ισχύει η σχέση $189=13\alpha+25\beta$ με $\alpha+\beta<12$.

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

1. **Έστω πολυώνυμο** $P(x)=x^3+x-\lambda$, $\lambda\in Z$, $x\in R$ **και ακέραιος α ο οποίος διαιρούμενος με τον 9 δίνει πηλίκο** $-\lambda+1$ **και υπόλοιπο τον** $P(2)$.

α. Να προσδιορίσετε το πολυώνυμο $P(x)$ **και τον ακέραιο α αν το πηλίκο είναι περιττός ακέραιος.**

β. Να δείξετε ότι οι ακέραιοι α του πρώτου ερωτήματος αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

2. α. Να δείξετε ότι για κάθε $\kappa,\lambda,\ \mu\in Z,\ \nu\in N^*$ **ισχύει ότι:** $(\kappa\lambda+\mu)^\nu=\pi o\lambda\kappa+\mu^\nu$

β. Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού 9^{2003}.

(**Υπ.: α.** $P(x)=(x-2)\Pi(x)+P(2)$, $\alpha=(-\lambda+1)+P(2)$

β. Είναι $9=2\cdot4+1$ και χρησιμοποιήστε το α)