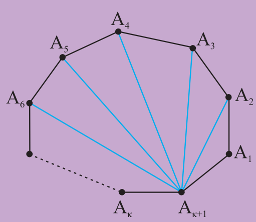
4^{o} Κεφάλαιο

11^{o} μάθημα

Επαγωγή



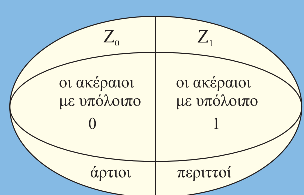
12^{o} μάθημα

Διαιρετότητα

υ_1 / υ_2	0	1
0	$\upsilon_1 \cdot \upsilon_2 = 0$ $\upsilon_1 - \upsilon_2 = 0$	$\upsilon_1 \cdot \upsilon_2 = 0$ $\upsilon_1 - \upsilon_2 = 1$
1	$\upsilon_1 \cdot \upsilon_2 = 0$ $\upsilon_1 - \upsilon_2 = -1$	$\upsilon_1 \cdot \upsilon_2 = 1$ $\upsilon_1 - \upsilon_2 = 0$

13^{o} μάθημα

Ευκλείδεια διαίρεση



Μάθημα 11 Μαθηματική Επαγωγή

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο των προόδων έχει αποδειχθεί ότι ο ισχυρισμός

$$P(\nu): 1+2+3+\ldots+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}, \ \nu\in\mathbb{N}^*$$

είναι αληθής (ως άθροισμα ν πρώτων όρων αριθμητικής προόδου με $\alpha_1=1$ και $\omega=1$) δηλαδή.

$$1=\frac{1(1+1)}{2}\Leftrightarrow 1=1 \qquad \text{(προφανές)}$$

$$1+2=\frac{2(2+1)}{2}\Leftrightarrow 3=3 \qquad \text{(προφανές)}$$

$$1+2+3=\frac{3(3+1)}{2}\Leftrightarrow 6=6 \qquad \text{(προφανές)}$$

....

....

$$1+2+3+\ldots+(\nu-1)+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2} \qquad \text{(ισχύει όπως έχει αποδειχθεί)}$$

Ο παραπάνω ισχυρισμός $P(\nu)$ αν και επαληθεύεται από πάρα πολλές διαδοχικές τιμές του $\nu\in\mathbb{N}^*$ χωρίς την βοήθεια των προόδων δεν θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι ισχύει **για κάθε** $\nu\in\mathbb{N}^*$.

Γεννιέται λοιπόν η ανάγκη μιας μεθόδου που να αποδεικνύει την ισχύ ανάλογων ισχυρισμών $P(\nu)$ για κάθε τιμή του θετικού ακέραιου ν ή για κάθε $\nu\geq\nu_0,\ \nu_0\in\mathbb{N}^*$.

Η αποδεικτική αυτή μέθοδος λέγεται **μαθηματική ή τέλεια επαγωγή** και στηρίζεται στην λεγόμενη “αρχή της μαθηματικής επαγωγής” η οποία διατυπώνεται ως εξής:

Έστω $P(\nu)$ ένας ισχυρισμός που αναφέρεται στους θετικούς ακέραιους. Αν

α. ο ισχυρισμός είναι αληθής για τον ακέραιο 1 δηλαδή ο $P(1)$ είναι αληθής και

β. η αλήθεια του $P(\nu)$ συνεπάγεται την αλήθεια του $P(\nu+1)$ για κάθε ν.

Τότε ο ισχυρισμός $P(\nu)$ αληθεύει για όλους τους θετικούς ακέραιους ν.

Σε αρκετές περιπτώσεις η αλήθεια του ισχυρισμού $P(\nu)$ "ξεκινάει" από $\nu=\nu_0$, $\nu\in N^*$ και $\nu_0=2$ ή $\nu_0=3$ ή .... οπότε επιβεβαιώνουμε την αλήθεια του ισχυρισμού για $\nu=2$ ή $\nu=3$ ή ... , ανάλογα .

Για παράδειγμα

α. Αν α ακέραιος με $\alpha>1$ ισχύει $\alpha^\nu-1>\nu(\alpha-1)$, για κάθε $\nu\ge 2$. Είναι φανερό ότι για $\nu=1$ έχουμε

$$\alpha^1-1>1(\alpha-1)\Leftrightarrow \alpha-1>\alpha-1 \text{ που δεν ισχύει.}$$

β. Ισχύει $\sqrt[\nu]{\nu}<\sqrt[3]{3}$, για κάθε $\nu\ge 4$.

Είναι φανερό ότι για $\nu=1$ έχουμε $\sqrt[1]{1}<\sqrt[3]{3}\Leftrightarrow 1<\sqrt[3]{3}$, που ισχύει

για $\nu=2$ έχουμε $\sqrt[2]{2}<\sqrt[3]{3}\Leftrightarrow 2^3<3^2$, που ισχύει

για $\nu=3$ έχουμε $\sqrt[3]{3}<\sqrt[3]{3}$, που δεν ισχύει

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία - Μέθοδος 1

Για την απόδειξη ισχυρισμού $P(\nu)$ που αναφέρεται σε ισότητα ακολουθούμε αυστηρά τα βήματα της επαγωγικής μεθόδου που προαναφέραμε.

Σχετική δυσκολία παρουσιάζεται στο "πέρασμα" από την αλήθεια του $P(\nu)$ στην αλήθεια του $P(\nu+1)$ διότι αρκετές φορές χρειάζονται κατάλληλοι μετασχηματισμοί (πρόσθεση, πολ/σμός, ...) ώστε να εμφανίσουμε την "μορφή" του $P(\nu+1)$.

Παράδειγμα 1

Να αποδείξετε ότι : **α.** $1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2=\dfrac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$ **, για κάθε** $\nu\in N^*$

β. $1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3=\left[\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}\right]^2$ **, για κάθε** $\nu\in N^*$

Λύση

Έστω P(ν) η παραπάνω ισχυρισμοί:

α. • Για $\nu=1$ έχουμε $1^2=\dfrac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6}\Leftrightarrow 1=1$ δηλαδή ο $P(1)$ είναι αληθής.

- Δεχόμαστε ότι ο P (ν) είναι αληθής για τυχαίο $\nu \in N^*$ δηλαδή :

$$1^2+2^2+...+\nu^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} \quad (I)$$

- Θα δείξουμε ότι και ο $P(\nu+1)$ είναι αληθής δηλαδή :

$$1^2+2^2+..+(\nu+1)^2=\frac{(\nu+1)((\nu+1)+1)(2(\nu+1)+1)}{6}$$

Έχουμε

$$1^2+2^2+3^2+...+\nu^2+(\nu+1)^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}+(\nu+1)^2= \qquad (\text{ λόγω της (I) })$$

$$\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)+6(\nu+1)^2}{6}=\frac{(\nu+1)[\nu(2\nu+1)+6(\nu+1)]}{6}=$$

$$=\frac{(\nu+1)\left(2\nu^2+\nu+6\nu+6\right)}{6}=\frac{(\nu+1)\left(2\nu^2+7\nu+6\right)}{6}=\frac{(\nu+1)2\left(\nu+\frac{3}{2}\right)(\nu+2)}{6}=$$

$$\frac{(\nu+1)(2\nu+3)(\nu+2)}{6}=\frac{(\nu+1)\left[2(\nu+1)+1\right]\left[(\nu+1)+1\right]}{6}.$$

Άρα η ισότητα αληθεύει για όλους τους θετικούς ακέραιους ν.

β. • Για $\nu=1$ έχουμε $1^3=\left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2 \Leftrightarrow 1=1$ που ισχύει.

- Δεχόμαστε ότι ο P (ν) είναι αληθής για $\nu \in N^*$ δηλαδή

$$1^3+2^3+...+\nu^3=\left[\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right]^2 \quad (I)$$

- Θα δείξουμε ότι και ο $P(\nu+1)$ είναι αληθής δηλαδή :

$$1^3+2^3+3^3+...+\nu^3+(\nu+1)^3=\left[\frac{(\nu+1)\left[(\nu+1)+1\right]}{2}\right]^2$$

Έχουμε λόγω της (I) ότι $1^3+2^3+3^3+...+\nu^3=\left[\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right]^2$

Έτσι: $1^3+2^3+3^3+...+\nu^3+(\nu+1)^3=\left[\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right]^2+(\nu+1)^3=$

$$\frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}+(\nu+1)^2(\nu+1)=\frac{\nu^2(\nu+1)^2+4(\nu+1)^2(\nu+1)}{4}=$$

$$\frac{(\nu+1)^2(\nu^2+4(\nu+1))}{4}=\frac{(\nu+1)^2(\nu^2+4\nu+4)}{4}=\frac{(\nu+1)^2(\nu+2)^2}{4}=$$

$$\frac{(\nu+1)^2((\nu+1)+1)^2}{2^2}=\left[\frac{(\nu+1)((\nu+1)+1)}{2}\right]^2.$$

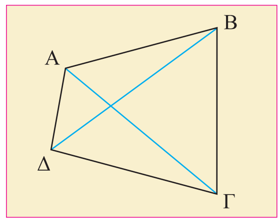
Άρα η ισότητα αληθεύει για όλους τους θετικούς ακέραιους ν.

Παράδειγμα 2

Να δείξετε ότι το πλήθος των διαγωνίων ενός ν-γώνου είναι $\delta_\nu=\frac{\nu(\nu-3)}{2}$ για κάθε $\nu\geq 4$.

Λύση

Έστω P(ν) ο παραπάνω ισχυρισμός.

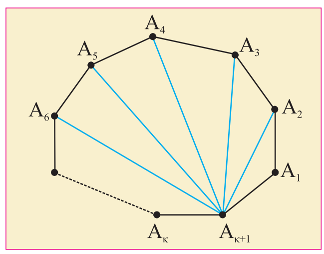


• Για $\nu=4$ έχουμε $\delta_4=\frac{4(4-3)}{2}=2$, που ισχύει.

• Δεχόμαστε ότι ισχύει για $\nu\in N$ με $\nu>4$,δηλαδή $\delta_\nu=\frac{\nu(\nu-3)}{2}$ οπότε ο $P(\nu)$ είναι αληθής.

• Θα δείξουμε ότι ισχύει για $\nu+1$ δηλαδή

$$\delta_{\nu+1}=\frac{(\nu+1)[(\nu+1)-3]}{2}=\frac{(\nu+1)(\nu-2)}{2}.$$



Πράγματι, αν $A_{\nu+1}$ η τελευταία κορυφή του $(\nu+1)$γώνου $A_1A_2....A_\nu A_{\nu+1}$ τότε όταν αυτή ενωθεί με τις υπόλοιπες κορυφές (εκτός της A_1 και της A_ν) δημιουργεί ν - 2 διαγωνίους. Αν προσθέσουμε και τη διαγώνιο A_1A_ν τότε το $(\nu+1)$γωνο έχει $\nu-2+1=\nu-1$ διαγώνιους περισσότερες από το ν-γωνο.
Έτσι έχουμε:

$$\delta_{\nu+1}=\delta_\nu+\nu-1\overset{(I)}{=}\frac{\nu(\nu-3)}{2}+\nu-1=\frac{\nu(\nu-3)+2(\nu-1)}{2}=\frac{\nu^2-\nu-2}{2}=\frac{(\nu+1)(\nu-2)}{2}$$

Παράδειγμα 3

Να δείξετε ότι $2^{4\nu}-1=\pi o\lambda 15$, για κάθε $\nu\geq 1$.

Λύση

Έστω P(ν) ο παραπάνω ισχυρισμός.

• Για $\nu=1$ ισχύει $2^{4\cdot 1}-1=\pi o\lambda 15\Leftrightarrow 15=\pi o\lambda 15$, που ισχύει οπότε ο P(1) είναι αληθής.

• Δεχόμαστε ότι ισχύει για $\nu\in N^*$ δηλαδή $2^{4\nu}-1=\pi o\lambda 15(=15\lambda)$,οπότε ο P(ν) είναι αληθής

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $\nu+1$ δηλαδή $2^{4(\nu+1)}-1=\pi o\lambda 15(=15\lambda)$,οπότε ο $P(\nu+1)$ είναι αληθής.

Είναι $2^{4(\nu+1)}-1=2^{4\nu}\cdot 2^4-1=16\cdot 2^{4\nu}-1=16(15\lambda+1)-1=15\cdot 16\lambda+15=15(16\lambda+1)=\pi o\lambda 15$

Κατηγορία - Μέθοδος 2

Για την απόδειξη ισχυρισμού Ρ(ν) που αναφέρεται σε ανισότητα ακολουθούμε αυστηρά τα βήματα της επαγωγής που προαναφέραμε και η απόδειξη γίνεται σχετικά εύκολα (παράδειγμα 1) με ενίσχυση των ανισοτήτων.
Στην πορεία αυτή συχνά είναι πολύ χρήσιμη η μεταβατική ιδιότητα, δηλαδή
Αν δεχθούμε ότι ισχύει η σχέση (δ): $P(\nu)>A$ και χρειάζεται να δείξουμε με αυτή την παραδοχή ότι $P(\nu+1)>B$, τότε αρκεί να δείξουμε ότι $A>B$ ή $\Gamma>B$, όπου Γ η μορφή του Α από την επιτρεπτή επέμβαση στα μέλη της σχέσης (δ) ώστε το Ρ(ν) να πάρει την μορφή $P(\nu+1)$. (Βλ. παράδειγμα 2).

Παράδειγμα 1

Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $\nu\ge 4$, ισχύει $\nu!>2^\nu$,όπου $\nu!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot \nu$.

Λύση

Έστω Ρ(ν) η ανισότητα που θέλουμε να δείξουμε.

- Για ν = 4 έχουμε $4!>2^4 \Leftrightarrow 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4>2^4 \Leftrightarrow 24>16$ δηλαδή ο $P(4)$ είναι αληθής.
- Δεχόμαστε ότι ο Ρ(ν) είναι αληθής για τυχαίο $\nu\ge 4$, δηλαδή $\nu!>2^\nu\ (\delta)$.
- Θα δείξουμε ότι ο Ρ(ν) ισχύει και για τον επόμενο φυσικό τον $\nu+1$, δηλαδή $(\nu+1)!>2^{\nu+1}$ οπότε και ο Ρ(ν + 1) θα είναι αληθής.

Έχουμε λόγω της (δ)

$$\nu!>2^\nu \text{ οπότε } \nu!(\nu+1)>2^\nu(\nu+1) \text{ ή } (\nu+1)!>2^\nu\cdot 2$$

(είναι $2<\nu+1$ αφού $\nu\ge 4$) ή $(\nu+1)!>2^{\nu+1}$. Άρα η ανισότητα αληθεύει για κάθε θετικό ακέραιο $\nu\ge 4$.

Παράδειγμα 2

α. Να δείξετε ότι $\nu^3>3\nu^2+3\nu+1$, για κάθε ακέραιο $\nu\ge 4$.

β.Να δείξετε ότι $2^\nu>\nu^3$, για κάθε ακέραιο $\nu\ge 10$.

Λύση

α. Έστω Ρ(ν) η ανισότητα που θέλουμε να δείξουμε .

- Για $\nu=4$ έχουμε $4^3>3\cdot 4^2+3\cdot 4+1 \Leftrightarrow 64>61$, δηλαδή ο Ρ(4) είναι αληθής.
- Δεχόμαστε ότι ο Ρ(ν) είναι αληθής για τυχαίο $\nu\ge 4$,δηλαδή $\nu^3>3\nu^2+3\nu+1\ (\delta)$
- Θα δείξουμε ότι ο Ρ(ν) ισχύει και για τον επόμενο φυσικό τον $\nu+1$, δηλαδή: $(\nu+1)^3>3(\nu+1)^2+3(\nu+1)+1$,οπότε και ο Ρ(ν + 1) θα είναι αληθής.

Έχουμε λόγω της (δ) ότι $\nu^3>3\nu^2+3\nu+1$ οπότε

$$\nu^3+(3\nu^2+3\nu+1)>3\nu^2+3\nu+1+(3\nu^2+3\nu+1) \Leftrightarrow (\nu+1)^3>2(3\nu^2+3\nu+1).$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $2(3\nu^2+3\nu+1)>3(\nu+1)^2+3(\nu+1)+1 \Leftrightarrow$

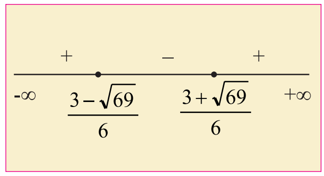
$6\nu^2+6\nu+2>3\nu^2+6\nu+3+3\nu+3+1 \Leftrightarrow 6\nu^2+6\nu+2>3\nu^2+9\nu+7 \Leftrightarrow 3\nu^2-3\nu-5>0$

Είναι $\Delta=(-3)^2-4\cdot 3(-5)=69>0$ οπότε $\nu_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{69}}{6}$.

Η συμπεριφορά του $3\nu^2-3\nu-5$ φαίνεται στο σχήμα

και φανερά για $\nu\geq 4$ είναι $3\nu^2-3\nu-5>0$.

Άρα η ανισότητα είναι αληθής για όλους τους θετικούς ακέραιους ν με $\nu\geq 4$.



β. Έστω P(ν) η ανισότητα που θέλουμε να δείξουμε:

• Για $\nu=10$ έχουμε $2^{10}>10^3 \Leftrightarrow 1024>1000$ δηλαδή ο P(10) είναι αληθής.

• Δεχόμαστε ότι ισχύει για $\nu\in\mathbb{N}$ δηλαδή $2^\nu>\nu^3$ (δ) οπότε ο P(ν) είναι αληθής και

• Θα δείξουμε με την παραδοχή αυτή ότι ισχύει για ν + 1 δηλαδή $2^{\nu+1}>(\nu+1)^3$ οπότε ο $P(\nu+1)$ είναι αληθής.

Έχουμε λόγω της (δ) ότι $2^\nu>\nu^3$ οπότε $2^\nu\cdot 2>\nu^3\cdot 2$ δηλαδή $2^{\nu+1}>2\nu^3$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $2\nu^3>(\nu+1)^3 \Leftrightarrow 2\nu^3>\nu^3+3\nu^3+3\nu+1 \Leftrightarrow \nu^3>3\nu^2+3\nu+1$ το οποίο ισχύει λόγω του α. ερωτήματος.

Άρα η ανισότητα αληθεύει για όλους τους θετικούς ακέραιους ν με $\nu\geq 10$.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $\nu\geq 2$ ισχύει:

$$2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\ldots\ldots+\nu\cdot 2^{(\nu-1)}=(\nu-1)\cdot 2^\nu$$

Λύση

• Για $\nu=2$: $2\cdot 2^1=(2-1)\cdot 2^2 \Leftrightarrow 4=4$ ισχύει.

• Έστω ότι ισχύει για τυχαίο $\nu\geq 2$: $2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\ldots\ldots+\nu\cdot 2^{\nu-1}=(\nu-1)\cdot 2^\nu$ (1)

• Θα δείξουμε ότι ισχύει και για τον επόμενο φυσικό τον ν + 1:

$$2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\ldots\ldots+(\nu+1)\cdot 2^\nu=\nu\cdot 2^{\nu+1} \qquad (2)$$

Παίρνουμε το πρώτο μέλος της (2)

$$2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\ldots\ldots+(\nu+1)\cdot 2^\nu = 2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\ldots\ldots+\nu\cdot 2^{\nu-1}+(\nu+1)\cdot 2^\nu \overset{(1)}{=}$$

$(\nu-1)\cdot 2^\nu+(\nu+1)\cdot 2^\nu=(\nu-1+\nu+1)\cdot 2^\nu=2\nu\cdot 2^\nu=\nu\cdot 2^{\nu+1}$. Άρα ισχύει για κάθε $\nu\geq 2$.

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι $3^\nu>\nu^3$, για κάθε φυσικό αριθμό $\nu\geq 4$.

Λύση

- Για $\nu = 4$: $3^4 > 4^3 \Leftrightarrow 81 > 64$, ισχύει
- Έστω ότι ισχύει για $\nu = \kappa$: $3^\kappa > \kappa^3$ (1)
- Θα δείξουμε ότι ισχύει για $\nu = \kappa + 1$: $3^{\kappa+1} > (\kappa+1)^3$ (2)

Παίρνουμε το πρώτο μέλος της (2): $3^{\kappa+1} = 3 \cdot 3^\kappa \overset{(1)}{>} 3 \cdot \kappa^3$ και αρκεί να δείξουμε ότι

$$3\kappa^3 > (\kappa+1)^3 \Leftrightarrow 3\kappa^3 > \kappa^3 + 3\kappa^2 + 3\kappa + 1 \Leftrightarrow 3\kappa^3 - \kappa^3 - 3\kappa^2 - 3\kappa - 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$2\kappa^3 - 3\kappa^2 - 3\kappa - 1 > 0 \Leftrightarrow \kappa(2\kappa^2 - 3\kappa - 3) - 1 > 0 \Leftrightarrow \kappa[\kappa(2\kappa-3) - 3] - 1 > 0$ ισχύει γιατί

$$\left.\begin{array}{r} \kappa \geq 4 \Leftrightarrow 2\kappa \geq 8 \Leftrightarrow 2\kappa - 3 \geq 5 \\ \kappa \geq 4 \end{array}\right\} \kappa(2\kappa-3) \geq 20 \Leftrightarrow \kappa(2\kappa-3) - 3 \geq 17$$

$$\left.\begin{array}{r} \kappa(2\kappa-3) - 3 \geq 17 \\ \kappa \geq 4 \end{array}\right\} \kappa[\kappa(2\kappa-3) - 3] \geq 68 \Leftrightarrow \kappa[\kappa(2\kappa-3) - 3] - 1 \geq 67$$

Άρα ισχύει $3^{\kappa+1} > (\kappa+1)^3$, οπότε ισχύει για κάθε $\nu \geq 4$.

Παρατήρηση : *Χρησιμοποιήσαμε το συμβολισμό ν = κ και ν = κ + 1 που συνηθίζεται να αναφέρεται σε αρκετά βιβλία.*

Άσκηση 3

Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in N^*$ ισχύει : $2^\nu + 5^\nu + 7^\nu > 11\nu$ **.**

Λύση

Για $\nu \geq 2$ είναι : $2^\nu = (1+1)^\nu > 1 + \nu \cdot 1 = 1 + \nu > \nu$

$5^\nu = (1+4)^\nu > 1 + \nu \cdot 4 = 1 + 4\nu > 4\nu$

$7^\nu = (1+6)^\nu > 1 + \nu \cdot 6 = 1 + 6\nu > 6\nu$

απ'όπου με πρόσθεση κατα μέλη προκύπτει:

$$2^\nu + 5^\nu + 7^\nu > \nu + 4\nu + 6\nu \Leftrightarrow 2^\nu + 5^\nu + 7^\nu > 11\nu$$

Για $\nu = 1$ έχουμε : $2^1 + 5^1 + 7^1 > 11^1 \cdot 1 \Leftrightarrow 14 > 11$.

> Ανισότητα Bernoulli
>
> $(1+\alpha)^\nu > 1 + \nu\alpha$
>
> $\alpha > -1, \quad \alpha \neq 0$
>
> με $\nu \geq 2$

Άσκηση 4

Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geq 1$ ισχύει : $7^\nu > 7\nu - 1$

Λύση

- Για $\nu = 1$: $7^1 > 7 \cdot 1 - 1 \Leftrightarrow 7 > 6$, ισχύει
- Έστω ότι ισχύει για $\nu = \kappa$: $7\kappa > 7\kappa - 1$ (1)
- Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $\nu = \kappa + 1$: $7^{\kappa+1} > 7(\kappa+1) - 1 \Leftrightarrow 7^{\kappa+1} > 7\kappa + 6$ (2)

Παίρνουμε το πρώτο μέλος της (2): $7^{\kappa+1}=7\cdot 7^{\kappa}\overset{(1)}{>}7\cdot(7\kappa-1)=49\kappa-7$

αρκεί να δείξουμε ότι $49\kappa-7>7\kappa+6\Leftrightarrow 42\kappa>13\Leftrightarrow \kappa>\dfrac{13}{42}$, που ισχύει αφού $\kappa\geq 1$

οπότε $7^{\kappa+1}>49\kappa-7>7\kappa+6$ δηλαδή $7^{\kappa+1}>7\kappa+6$. Άρα ισχύει για κάθε $\nu\geq 1$.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να δείξετε ότι $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^\nu}=1-\dfrac{1}{2^\nu}$ για κάθε θετικό ακέραιο ν.

2. Να δείξετε ότι

α. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+\nu(\nu+1)=\dfrac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{3}$

β. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{\nu(\nu+1)}=\dfrac{\nu}{\nu+1}$

γ. $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\ldots+\nu(\nu+1)^2=\dfrac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(3\nu+5)}{12}$ για κάθε θετικό ακέραιο ν.

3. α. Να δείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2\nu-1)^2=\dfrac{\nu(4\nu^2-1)}{3}$.

β. Να υπολογίσετε τον φυσικό ν ώστε $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2\nu-1)^2=1330$.

4. Να δείξετε ότι $2^\nu>\nu^2$ για κάθε θετικό ακέραιο ν με $\nu\geq 5$.

5. Να δείξετε ότι $\sqrt[3]{3}>\sqrt[\nu]{\nu}$ για κάθε θετικό ακέραιο ν με $\nu>3$.

6. α. Αν α πραγματικός αριθμός με $-1<\alpha\neq 0$ να δείξετε ότι ισχύει $(1+\alpha)^\nu>1+\nu\alpha$ για κάθε θετικό ακέραιο ν με $\nu\geq 2$. (ανισότητα Bernoulli)

β. Να δείξετε ότι **i.** $\left(\dfrac{3}{2}\right)^\nu>1+\dfrac{\nu}{2}$, **ii.** β. $4^\nu>1+3\nu$,

iii. $7^\nu>1+6\nu$ για κάθε θετικό ακέραιο ν με $\nu\geq 2$.

7. α. Αν α ακέραιος αριθμός με $1<\alpha$ να δείξετε ότι ισχύει $\alpha^{\nu}>1+\nu(\alpha-1)$ για κάθε θετικό ακέραιο ν με $\nu\geq 2$ (ανισότητα Tchebychef)

β. Να δείξετε ότι **i.** $\left(\frac{3}{2}\right)^{\nu}-1>\frac{\nu}{2}$,

ii. $4^{\nu}-1>3\nu$,

iii. $7^{\nu}-1>6\nu$ για κάθε θετικό ακέραιο ν με $\nu\geq 2$.

8. α. Αν α, β ακέραιοι αριθμοί με $\alpha\neq\beta$ να δείξετε ότι $\alpha^{\nu}-\beta^{\nu}=(\alpha-\beta)\left(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\ldots+\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1}\right)$ για κάθε θετικό ακέραιο $\nu\geq 1$.

β. Έστω οι διαφορετικοί μεταξύ τους θετικοί αριθμοί α, β με $\alpha=2-\beta$.

Να δείξετε ότι $\alpha^{\nu}>2-\beta^{\nu}$ για κάθε θετικό ακέραιο ν με $\nu\geq 2$.

9. Οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ αποτελούν την υποτείνουσα και τις δύο κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου, αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $\alpha^{\nu}>\beta^{\nu}+\gamma^{\nu}$ για κάθε θετικό ακέραιο ν με $\nu\geq 3$.

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

1. Να δείξετε ότι $2003^{2004}>2004^{2003}$ **.**

(**Υπ:** Να δείξετε ότι $\nu^{\nu+1}>(\nu+1)^{\nu}$ για κάθε φυσικό $\nu\geq 3$).