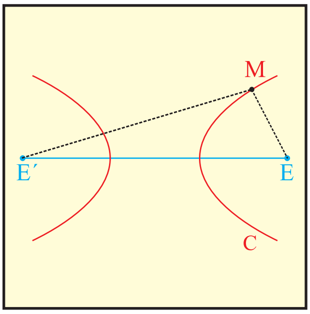
Μάθημα 10 Υπερβολή

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

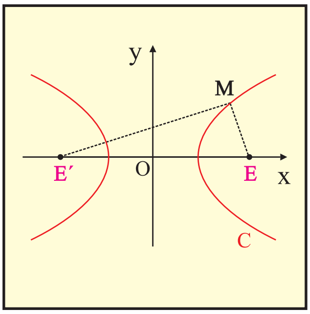
Ορισμός



Υπερβολή ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, των οποίων η διαφορά των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία Ε και Ε΄ είναι σταθερή και μικρότερη απο την απόσταση των δύο σημείων. Τα δύο αυτά σημεία, Ε και Ε΄ τα ονομάζουμε **εστίες** και τη μεταξύ τους απόσταση **εστιακή απόσταση** και τη συμβολίζουμε με 2γ.

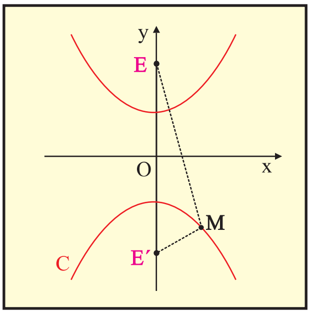
Την απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων του τυχαίου σημείου της υπερβολής από τις δύο εστίες τη συμβολίζουμε με 2α

Είναι: $\mathbf{|(ME)-(ME')|=2\alpha}$



Η εξίσωση της υπερβολής ως προς σύστημα συντεταγμένων Oxy με άξονα x΄x την ευθεία που διέρχεται από τα Ε και Ε΄ και άξονα y΄y την μεσοκάθετο του ΕΕ΄ είναι:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \quad , \text{όπου } \beta^2=\gamma^2-\alpha^2.$$



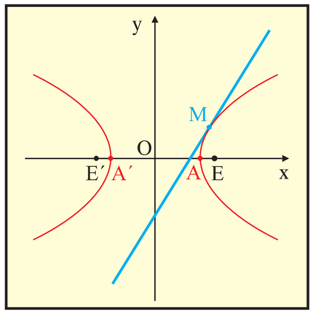
Η εξίσωση της υπερβολής ως προς σύστημα συντεταγμένων Oxy με άξονα y΄y την ευθεία που διέρχεται από τα Ε και Ε΄ και άξονα x΄x την μεσοκάθετο του ΕΕ΄ είναι:

$$\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1 \quad , \text{όπου } \beta^2=\gamma^2-\alpha^2.$$

Εξίσωση εφαπτομένης

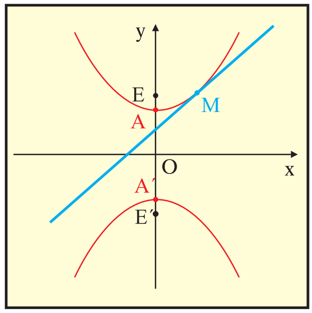
Έστω η υπερβολή C με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής C στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ είναι :

$$\boxed{\frac{xx_1}{\alpha^2}-\frac{yy_1}{\beta^2}=1}$$



Έστω η υπερβολή C με εξίσωση $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής C στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ είναι :

$$\boxed{\frac{yy_1}{\alpha^2}-\frac{xx_1}{\beta^2}=1}$$



• *Μνημονικός κανόνας για την εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης σε υπερβολή :*

Έστω ότι αναζητούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ στο σημείο $M(x_1,y_1)$.

α. Γράφουμε την εξίσωση της υπερβολής : $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ (1)

β. Επειδή $x^2=x\cdot x$ και $y^2=y\cdot y$ έχουμε από την (1) : $\frac{x\cdot x}{\alpha^2}-\frac{y\cdot y}{\beta^2}=1$.

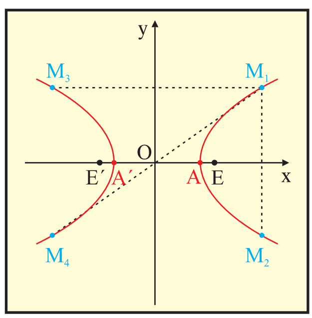
γ. Στο δεύτερο x και y θέτουμε x_1 και y_1 αντίστοιχα και έχουμε $\frac{x\cdot x_1}{\alpha^2}-\frac{y\cdot y_1}{\beta^2}=1$, που είναι και η ζητούμενη εξίσωση.

Ομοίως εργαζόμαστε και στην υπερβολή $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$.

Ιδιότητες υπερβολής

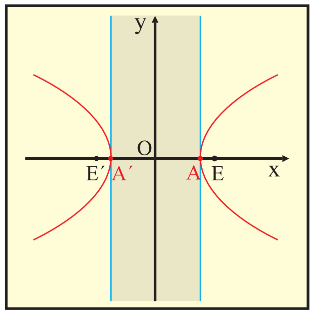
Έστω μια υπερβολή C, με εξίσωση : $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

α. Έχει άξονες συμμετρίας τον $x΄x$ και τον $y΄y$ και



κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O(0,0).
Δηλαδή ,αν το σημείο $M_1(x_1, y_1)$ ανήκει στην υπερβολή τότε ανήκουν στην υπερβολή και τα σημεία $M_2(x_1, -y_1)$, $M_3(-x_1, y_1)$, $M_4(-x_1, -y_1)$.

β. Τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία Α(α,0) και Α΄(-α,0) τα οποία λέγονται **κορυφές** της υπερβολής.
Δεν τέμνει τον άξονα y΄y.Το Ο λέγεται **κέντρο** της υπερβολής.



γ. Η υπερβολή C αποτελείται από δύο ξεχωριστούς κλάδους. Οι δύο αυτοί κλάδοι βρίσκονται εκτός της ταινίας των ευθειών x = -α και x = α.
Γενικά για κάθε σημείο της υπερβολής με συντεταγμένες

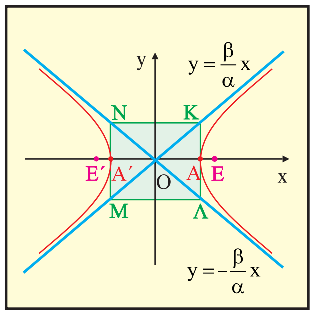
(x, y) ισχύει : $\begin{Bmatrix} x \le -\alpha \\ x \ge \alpha \end{Bmatrix}$

Ασύμπτωτες υπερβολής

Η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ έχει ασύμπτωτες τις ευθείες

$$\varepsilon_1 : y = \frac{\beta}{\alpha} x \text{ και } \varepsilon_2 : y = -\frac{\beta}{\alpha} x$$

Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι διαγώνιοι του ορθογωνίου ΚΛΜΝ με κορυφές τα σημεία $K(\alpha, \beta)$, $\Lambda(\alpha, -\beta)$, $M(-\alpha, -\beta)$, $N(-\alpha, \beta)$ το οποίο λέγεται **ορθογώνιο βάσης** της υπερβολής.



• Μνημονικός κανόνας για τις ασύμπτωτες των υπερβολών:

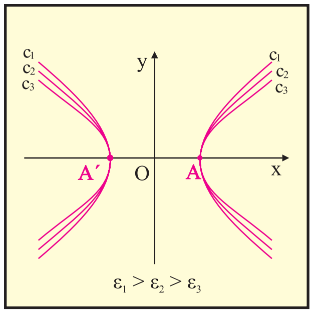
Οι ασύμπτωτες των υπερβολών C_1: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και C_2: $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ βρίσκονται αν παραγοντοποιήσουμε το πρώτο μέλος των παραπάνω εξισώσεων και θέσουμε κάθε παράγοντα ίσο με το μηδέν.

Εκκεντρότητα υπερβολής

Έστω η υπερβολή C με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Ονομάζουμε **εκκεντρότητα** της υπερβολής και τη συμβολίζουμε με **ε** το λόγο $\boxed{\varepsilon = \frac{2\gamma}{2\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}}$. Είναι $\varepsilon > 1$.

Αποδεικνύεται ότι: $\boxed{\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}$

Από τη σχέση αυτή καταλαβαίνουμε, ότι η εκκεντρότητα ε προσδιορίζει το συντελεστή διεύθυνσης $\frac{\beta}{\alpha}$ της ασυμπτώτου της υπερβολής. Επομένως χαρακτηρίζει το ορθογώνιο βάσης και τη μορφή της υπερβολής.



Όταν η εκκεντρότητα ε τείνει στο 1, ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ τείνει στο 0, επομένως το β τείνει στο 0. Τότε το ορθογώνιο βάσης γίνεται επίμηκες και η υπερβολή γίνεται “κλειστή”.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία - Μέθοδος 1

Για να βρούμε την εξίσωση μιας υπερβολής πρέπει να προσδιορίζουμε τις τιμές των α, β. Δεδομένου, ότι έχουμε τη σχέση $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$, αρκεί να βρούμε άλλες δύο σχέσεις. Όταν μας δίνονται οι εστίες, γνωρίζουμε το γ. Όταν μας δίνονται οι κορυφές, γνωρίζουμε τα α και β αντίστοιχα. Όταν μας δίνεται η εκκεντρότητα $\left(\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}\right)$ έχουμε μια σχέση ανάμεσα στα α, γ.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής, που έχει εστίες τα σημεία $E'\left(-\sqrt{5},0\right)$ $E\left(\sqrt{5},0\right)$ και διέρχεται από το σημείο $M\left(2\sqrt{2},1\right)$.

Λύση

Είναι $\gamma = \sqrt{5}$, οπότε $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 = 5 - \alpha^2$.

Επομένως, η εξίσωση της υπερβολής είναι της μορφής: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{5-\alpha^2} = 1$.

Επειδή το σημείο $M\left(2\sqrt{2},1\right)$ ανήκει στην υπερβολή, οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της, δηλαδή ισχύει:

$$\frac{8}{\alpha^2} - \frac{1}{5-\alpha^2} = 1 \Leftrightarrow \alpha^4 - 14\alpha^2 + 40 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = 10 \text{ ή } \alpha^2 = 4$$

Επειδή $\alpha^2 < \gamma^2$ θα είναι $\alpha^2 = 4$ και επομένως η εξίσωση της υπερβολής είναι: $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

Κατηγορία - Μέθοδος 2

Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης υπερβολής σε σημείο της Α, προσδιορίζουμε απο τα δεδομένα τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Α.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε τις εφαπτόμενες της υπερβολής $C: 25x^2 - 4y^2 = 100$, που είναι παράλληλες στην ευθεία $\varepsilon: 3x - y + 2002 = 0$.

Λύση

Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης και της υπερβολής, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο Μ είναι : $\delta: 25xx_1 - 4yy_1 = 100$ (1)

Όμως το σημείο Μ ανήκει και στην υπερβολή που σημαίνει ότι οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της ,δηλαδή : $M \in C \Leftrightarrow 25x_1{}^2 - 4y_1{}^2 = 100$ (2)

Γνωρίζουμε επίσης ότι η ε είναι παράλληλη στη δ, άρα ισχύει η ισοδυναμία :

$$\delta // \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_\delta = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow \frac{25x_1}{4y_1} = 3 \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) υπολογίζουμε τα x_1, y_1.

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{25x_1}{4y_1} = 3 \\ 25x_1{}^2 - 4y_1{}^2 = 100 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{12y_1}{25} \\ 11y_1{}^2 = 625 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{12y_1}{25} \\ y_1 = \pm\dfrac{25}{\sqrt{11}} \end{array}\right.$$

Για $y_1 = \frac{25}{\sqrt{11}}$ έχουμε $x_1 = \frac{12}{\sqrt{11}}$ και για $y_1 = -\frac{25}{\sqrt{11}}$ έχουμε $x_1 = -\frac{12}{\sqrt{11}}$.

Αντικαθιστούμε στην (1) τις παραπάνω τιμές των x_1 και y_1 και έχουμε:

$$3x - y - \sqrt{11} = 0 \quad \text{ή} \quad 3x - y + \sqrt{11} = 0$$

που είναι οι ζητούμενες εξισώσεις των εφαπτομένων.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις τιμές του κ για τις οποίες η ευθεία $\varepsilon: x + 2y = \kappa$ εφάπτεται στην υπερβολή $C: x^2 - y^2 = 1$.

Λύση

Για να βρούμε τα σημεία τομής της ευθείας και της υπερβολής πρέπει να επιλύσουμε το σύστημα των εξισώσεών τους :

$$\begin{cases} x+2y=\kappa \\ x^2-y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\kappa-2y \\ (\kappa-2y)^2-y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\kappa-2y \\ \kappa^2-4\kappa y+4y^2-y^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\kappa-2y \\ 3y^2-4\kappa y+\kappa^2-1=0 \ (1) \end{cases}$$

Η εξίσωση (1) είναι δευτέρου βαθμού ως προς y. Για να εφάπτεται η ευθεία (1) στην υπερβολή θα πρέπει να έχει μία μόνο λύση ως προς y. Πρέπει δηλαδή να έχει διακρίνουσα ίση με το μηδέν. Δηλαδή

$$\Delta=0 \Leftrightarrow 16\kappa^2-12\kappa^2+12=0 \Leftrightarrow 4\kappa^2+12=0 \Leftrightarrow \kappa^2=-3$$

που είναι αδύνατο.

Κατά συνέπεια και το παραπάνω σύστημα είναι αδύνατο στο R, άρα δεν υπάρχει $\kappa\in R$ τέτοιος ώστε η ευθεία ε να εφάπτεται της υπερβολής C.

Άσκηση 2

Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής, που έχει τις εστίες της στον άξονα x΄x, συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων και επίσης:

α. Έχει εστιακή απόσταση (ΕΕ΄) = 6 και εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{3}{2}$

β. Έχει εστιακή απόσταση (ΕΕ΄) = 4 και ασύμπτωτες τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων.

Λύση

α. Γνωρίζουμε ότι $(EE')=6 \Leftrightarrow 2\gamma=6 \Leftrightarrow \gamma=3$.

Επίσης $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{3}{2}=\frac{3}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha=2$. Ακόμα: $\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$.

Άρα τελικά η ζητούμενη εξίσωση της υπερβολής θα είναι: $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

β. Γνωρίζουμε ότι $(EE')=4 \Leftrightarrow 2\gamma=4 \Leftrightarrow \gamma=2$.

Μία από τις ασύμπτωτες είναι η y = x οπότε θα έχουμε $\frac{\beta}{\alpha}=1 \Leftrightarrow \alpha=\beta$.

$$\beta^2=\gamma^2-\alpha^2 \Leftrightarrow \gamma^2=\beta^2+\alpha^2 \Leftrightarrow 2^2=2\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha=\sqrt{2}$$

Άρα τελικά η ζητούμενη εξίσωση της υπερβολής είναι :

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1 \Leftrightarrow x^2-y^2=2 \ \text{(ισοσκελής υπερβολή)}$$

Άσκηση 3

Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της υπερβολής $C: 9x^2 - y^2 = 32$ που διέρχονται από το σημείο $P(0,-16)$.

Λύση

Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης και της υπερβολής. Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι : $9xx_1 - yy_1 = 32$ (1)

Όμως το σημείο M ανήκει και στην υπερβολή δηλαδή οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της. Άρα ισχύει : $9x_1^2 - y_1^2 = 32$ (2)

Επίσης το σημείο P ανήκει στην εφαπτομένη οπότε :

$$9 \cdot 0 \cdot x_1 + 16y_1 = 32 \Leftrightarrow y_1 = 2 \quad (3)$$

Για να βρούμε τα x_1, y_1 επιλύουμε το σύστημα των (2) και (3) .Έχουμε :

$$\begin{Bmatrix} y_1 = 2 \\ 9x_1^2 - y_1^2 = 32 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y_1 = 2 \\ 9x_1^2 - 2^2 = 32 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y_1 = 2 \\ x_1^2 = 4 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ x_1 = \pm 2 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε στην (1) τις παραπάνω τιμές για τα x_1 και y_1 και έχουμε :

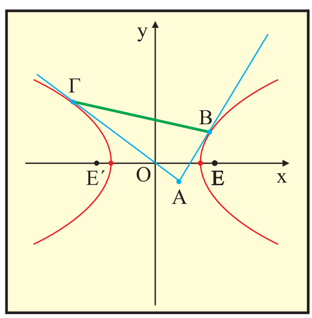
$$9 \cdot 2x - 2y = 32 \Leftrightarrow 9x - y - 16 = 0 \quad ή \quad 9 \cdot (-2)x - 2y = 32 \Leftrightarrow 9x + y + 16 = 0,$$

που είναι οι ζητούμενες εξισώσεις των εφαπτομένων .

Άσκηση 4

Από σημείο $A(x_0, y_0)$ εκτός της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ φέρνουμε δύο εφαπτόμενες προς την υπερβολή και έστω Β, Γ τα σημεία επαφής. Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ΒΓ είναι: $\frac{xx_0}{\alpha^2} - \frac{yy_0}{\beta^2} = 1$ (1)

Λύση



Έστω $B(x_1, y_1)$ και $\Gamma(x_2, y_2)$. Η εφαπτομένη στο Β έχει εξίσωση $\varepsilon_1: \frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$.

Επειδή διέρχεται από το $A(x_0, y_0)$, ισχύει $\frac{x_0x_1}{\alpha^2} - \frac{y_0y_1}{\beta^2} = 1$

Η τελευταία ισότητα μας δίνει την πληροφορία ότι η εξίσωση (1) είναι εξίσωση ευθείας, η οποία διέρχεται από το Β (αφού οι συντεταγμένες του Β την ικανοποιούν).

Η εφαπτομένη στο Γ έχει εξίσωση $\varepsilon_2 : \frac{xx_2}{\alpha^2} - \frac{yy_2}{\beta^2} = 1$. Επειδή διέρχεται απο το $A(x_0, y_0) : \frac{x_0 x_2}{\alpha^2} - \frac{y_0 y_2}{\beta^2} = 1$ (2). Η ισότητα (2) μας λεει ότι η (1) είναι εξίσωση ευθείας η οποία διέρχεται από το Γ. Επειδή απο δυο σημεία διέρχεται μόνο μία ευθεία η εξίσωση (1) παριστάνει την ευθεία ΒΓ.

Ασκηση 5

Να βρεθεί η εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής, η οποία έχει ίδιες εστίες με την έλλειψη:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Λύση

Για την έλλειψη έχουμε α = 3, β = 2 και $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 9 - 4 \Leftrightarrow \gamma^2 = 5 \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{5}$. Αφού η έλλειψη και η υπερβολή έχουν ίδιες εστίες, έχουν ίδιο γ. Η υπερβολή είναι ισοσκελής, δηλαδή της μορφής $x^2 - y^2 = \alpha^2$.

Έχουμε $$\left.\begin{array}{l} \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 \overset{\alpha=\beta}{\Leftrightarrow} \gamma^2 = 2\alpha^2 \\ \gamma = \sqrt{5} \end{array}\right\} \Leftrightarrow 2\alpha^2 = 5 \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Επομένως η εξίσωση της ζητούμενης υπερβολής είναι $C : x^2 - y^2 = \frac{5}{2}$.

Ασκηση 6

Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από την ευθεία y = 4 και τις ασύμπτωτες της υπερβολής.

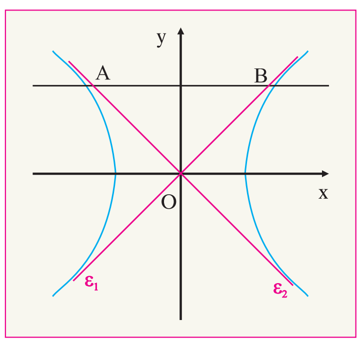
Λύση

Επειδή α = 3 και β = 4 οι ασύμπτωτες έχουν εξισώσεις

$$\varepsilon_1 : y = \frac{4}{3}x \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : y = -\frac{4}{3}x.$$

Απο το σύστημα των ε_1 και y = 4 θα προσδιορίσουμε τις συντεταγμένες του Β. Είναι

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{4}{3}x \\ y = 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 4 \end{array}, \text{ δηλαδή } B(3,4).$$



Απο το σύστημα των ε_2 και $y = 4$ θα προσδιορίσουμε τις συντεταγμένες του Α. Είναι

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{4}{3}x \\ y = 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = -3 \\ y = 4 \end{array}\text{ , δηλαδή } A(-3,4).$$

Είναι $\overrightarrow{OA} = (-3,4)$, $\overrightarrow{OB} = (3,4)$ και $\det\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -24$.

Επομένως $(OAB) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\right| = \frac{1}{2}\cdot 24 = 12$.

Άσκηση 7

Να εξετάσετε τι γραμμή παριστάνει η εξίσωση :

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = \mu \text{ , } \alpha,\beta,\mu \in R \text{ (1) } \mu \in R \text{ , με } \alpha > \beta.$$

Λύση

α. Αν $\mu \neq 0$ τότε $(1) \Leftrightarrow \frac{x^2}{\alpha^2\mu} - \frac{y^2}{\beta^2\mu} = 1 \quad (2)$

i. Αν $\mu > 0$ τότε $(2) \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\alpha\sqrt{\mu}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\beta\sqrt{\mu}\right)^2} = 1$, η οποία παριστάνει υπερβολή με παραμέτρους : $A = \alpha\sqrt{\mu}$, $B = \beta\sqrt{\mu}$ και $\Gamma^2 = A^2 + B^2 = \mu\alpha^2 + \mu\beta^2$, οπότε έχει εστίες

$$E\left(\sqrt{\mu\alpha^2 + \mu\beta^2}, 0\right) \quad \text{και} \quad E'\left(-\sqrt{\mu\alpha^2 + \mu\beta^2}, 0\right).$$

ii. Αν $\mu < 0$ τότε $(2) \Leftrightarrow \frac{y^2}{\beta^2(-\mu)} - \frac{x^2}{\alpha^2(-\mu)} = 1$, με $A = \beta\sqrt{|\mu|}$, $B = \alpha\sqrt{|\mu|}$ και $\Gamma^2 = \beta^2|\mu| + \alpha^2|\mu|$, οπότε οι εστίες της είναι $E\left(0, \sqrt{\beta^2|\mu| + \alpha^2|\mu|}\right), E'\left(0, -\sqrt{\beta^2|\mu| + \alpha^2|\mu|}\right)$

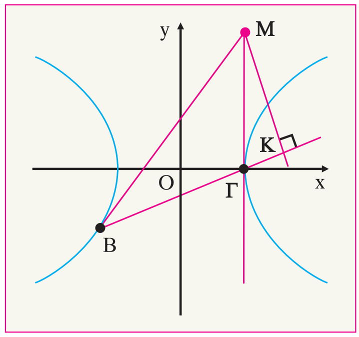
β. Αν $\mu = 0$ τότε $(1) \Leftrightarrow \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} = 0$ ή $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 0$

Δηλαδή η (1) παριστάνει τις ευθείες $\beta x - \alpha y = 0$ και $\beta x + \alpha y = 0$.

Άσκηση 8

Δίνεται η υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$ και το σημείο Μ (1, 2). Από το Μ φέρνουμε τις εφαπτόμενες προς την υπερβολή και έστω Β, Γ είναι τα σημεία επαφής.

α. Να προσδιορισθεί η εξίσωση της ΒΓ.
β. Να υπολογισθεί η απόσταση του Μ από τη ΒΓ.
γ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΜΒΓ.



Λύση

α. Η ΒΓ έχει εξίσωση $ΒΓ: xx_1 - yy_1 = 1$ όπου (x_1, y_1) είναι το σημείο από το οποίο άγονται οι εφαπτόμενες.
Οπότε $ΒΓ: x - 2y = 1$.

β. Είναι $d(M, ΒΓ) = \dfrac{|1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{1+4}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

γ. Το εμβαδόν του τριγώνου $M\hat{B}Γ$ είναι $(ΜΒΓ) = \dfrac{1}{2} ΒΓ \cdot ΜΚ$, όπου ΜΚ η απόσταση του Μ από τη ΒΓ. Για να βρούμε τα Β, Γ λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων της ευθείας ΒΓ και της υπερβολής :

$$\left.\begin{matrix} x^2 - y^2 = 1 \\ x - 2y = 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} (2y+1)^2 - y^2 = 1 \\ x = 2y+1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 4y^2 + 4y + 1 - y^2 = 1 \\ x = 2y+1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 3y^2 + 4y = 0 \\ x = 2y+1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} y(3y+4) = 0 \\ x = 2y+1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y = 0 \text{ ή } y = -\dfrac{4}{3} \\ x = 1 \text{ ή } x = -\dfrac{8}{3} + 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y = 0 \text{ ή } y = -\dfrac{4}{3} \\ x = 1 \text{ ή } x = -\dfrac{5}{3} \end{matrix}\right]$$

Επομένως, είναι $Γ(1,0)$ και $B\left(-\dfrac{5}{3}, -\dfrac{4}{3}\right)$.

Έτσι $(ΒΓ) = \sqrt{\left(1+\dfrac{5}{3}\right)^2 + \left(-\dfrac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{8}{3}\right)^2 + \left(-\dfrac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{64+16}{9}} = \dfrac{\sqrt{80}}{3}$ και το εμβαδόν του

τριγώνου ΜΒΓ είναι $(ΜΒΓ) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{80}}{3} \cdot \dfrac{4}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{3} 4 = \dfrac{8}{3}$ τ.μ .

Άσκηση 9

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων, οι οποίοι διέρχονται από το σημείο $A(2,0)$ και εφάπτονται εξωτερικά του κύκλου $C: (x+1)^2 + y^2 = 1$

Λύση

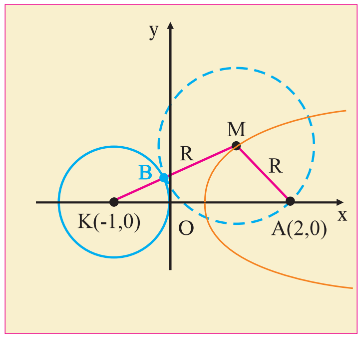
Το κέντρο του κύκλου C είναι το $K(-1,0)$ και η ακτίνα του $\rho = 1$.

Έστω Μ τυχαίο σημείο του γεωμετρικού τόπου.
Είναι

$(MK)=(MB)+(BK) \Leftrightarrow (MK)=(MA)+(BK) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (MK)-(MA)=(BK) \Leftrightarrow (MK)-(MA)=1$

Επομένως η διαφορά των αποστάσεων του σημείου M από τα σταθερά σημεία K και A είναι σταθερή και ίση με 1. Το σημείο M λοιπόν, ανήκει στην υπερβολή με εστίες τα K, A και σταθερή διαφορά $2\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{2}$.



Η εστιακή της απόσταση είναι $(KA)=3 \Leftrightarrow 2\gamma=3 \Leftrightarrow \gamma=\frac{3}{2}$.

Επομένως $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2 \Leftrightarrow \beta^2=\frac{9}{4}-\frac{1}{4}=\frac{8}{4}=2 \Leftrightarrow \beta=\sqrt{2}$. Ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο δεξιός κλάδος (MK > MA) της υπερβολής $\frac{x^2}{\frac{1}{4}}-\frac{y^2}{2}=1 \Leftrightarrow 4x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

Άσκηση 10

Δίνεται η υπερβολή $C:\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Να δείξετε ότι:

α. Η απόσταση της εστίας Ε(γ,0) από την ασύμπτωτη $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ ισούται με β.

β. Το εμβαδόν του τριγώνου, που σχηματίζεται από μια τυχαία εφαπτομένη της υπερβολής και τις ασύμπτωτες είναι σταθερό και ίσο με αβ.

Λύση

α. Η ασύμπτωτη (ε_1) έχει εξίσωση

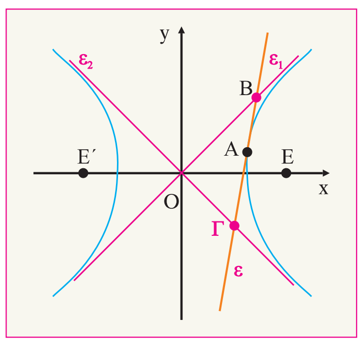
$$\varepsilon_1: y=\frac{\beta}{\alpha}x \Leftrightarrow \beta x-\alpha y=0.$$

Η εστία Ε έχει συντεταγμένες Ε(γ, 0).
Επομένως η απόσταση της Ε από την (ε_1)είναι:

$$d(E,\varepsilon_1)=\frac{|\beta\gamma|}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}}=\frac{\beta\gamma}{\gamma}=\beta.$$

β. Υπολογίζουμε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της εφαπτόμενης (ε) με την ασύμπτωτη (ε_1) και της εφαπτομένης με την ασύμπτωτη (ε_2).

Η εφαπτομένη στο τυχαίο σημείο $A(x_1,y_1)$ της υ-



περβολής έχει εξίσωση

$$(\varepsilon): \frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \beta^2 x_1 x - \alpha^2 y_1 y = \alpha^2\beta^2 .$$

Η ασύμπτωτη (ε_1) έχει εξίσωση $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ και η (ε_2) έχει εξίσωση $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$.

Έτσι έχουμε: $\begin{cases} \varepsilon: \beta^2 x_1 x - \alpha^2 y_1 y = \alpha^2\beta^2 \\ \varepsilon_1: y = \frac{\beta}{\alpha}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta^2 x_1 x - \alpha^2 y_1 \frac{\beta}{\alpha} x = \alpha^2\beta^2 \\ y = \frac{\beta}{\alpha}x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\alpha^2\beta}{\beta x_1 - \alpha y_1} \\ y = \frac{\beta}{\alpha}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\alpha^2\beta}{\beta x_1 - \alpha y_1} \\ y = \dfrac{\alpha\beta^2}{\beta x_1 - \alpha y_1} \end{cases}$. Επομένως $B\left(\dfrac{\alpha^2\beta}{\beta x_1 - \alpha y_1}, \dfrac{\alpha\beta^2}{\beta x_1 - \alpha y_1}\right)$

Ακόμα έχουμε $\begin{cases} \varepsilon: \beta^2 x_1 x - \alpha^2 y_1 y = \alpha^2\beta^2 \\ \varepsilon_2: y = -\frac{\beta}{\alpha}x \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\alpha^2\beta}{\beta x_1 + \alpha y_1} \\ y = -\dfrac{\alpha\beta^2}{\beta x_1 + \alpha y_1} \end{cases}$

Επομένως $\Gamma\left(\dfrac{\alpha^2\beta}{\beta x_1 + \alpha y_1}, -\dfrac{\alpha\beta^2}{\beta x_1 + \alpha y_1}\right)$.

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΒΓ δίνεται από τον τύπο $(O B\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O\Gamma}\right)\right|$.

Έχουμε: $\overrightarrow{OB} = \left(\dfrac{\alpha^2\beta}{\beta x_1 - \alpha y_1}, \dfrac{\alpha\beta^2}{\beta x_1 - \alpha y_1}\right)$ και $\overrightarrow{O\Gamma} = \left(\dfrac{\alpha^2\beta}{\beta x_1 + \alpha y_1}, -\dfrac{\alpha\beta^2}{\beta x_1 + \alpha y_1}\right)$.

Επομένως $(O B\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \dfrac{\alpha^2\beta}{\beta x_1 - \alpha y_1} & \dfrac{\alpha\beta^2}{\beta x_1 - \alpha y_1} \\ \dfrac{\alpha^2\beta}{\beta x_1 + \alpha y_1} & -\dfrac{\alpha\beta^2}{\beta x_1 + \alpha y_1} \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2} 2\left|\dfrac{\alpha^3\beta^3}{\beta^2 x_1^2 - \alpha^2 y_1^2}\right|$ (1)

Το σημείο Α ανήκει στην υπερβολή.

Επομένως ισχύει: $\dfrac{x_1^2}{\alpha^2} - \dfrac{y_1^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \beta^2 x_1^2 - \alpha^2 y_1^2 = \alpha^2\beta^2$ (2)

Η (1) γίνεται σύμφωνα με την (2): $(\text{ΟΒΓ}) = \left|\dfrac{\alpha^3\beta^3}{\alpha^2\beta^2}\right| = \alpha\beta$.

Άσκηση 11

Να δείξετε ότι το σημείο $M\left(\dfrac{1}{\text{συν}\theta}, \text{εφ}\theta\right)$, $\theta \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ κινείται σε υπερβολή. Να βρείτε τις κορυφές Α, Α΄, τις εστίες της Ε και Ε΄ και τις ασύμπτωτες.

Λύση

Έστω $M(x,y)$. Τότε $x = \dfrac{1}{\text{συν}\theta}$ και $y = \text{εφ}\theta$. Απο την ταυτότητα $\dfrac{1}{\text{συν}^2\theta} = 1 + \text{εφ}^2\theta$ παίρνουμε: $x^2 = 1 + y^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1$.

Επομένως το Μ κινείται στην υπερβολή με εξίσωση : $x^2 - y^2 = 1$.

Επειδή $\theta \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι $\text{συν}\theta > 0 \Leftrightarrow x > 0$, δηλαδή το Μ κινείται στο δεξιό κλάδο της παραπάνω ισοσκελούς υπερβολής. Είναι $\alpha = 1$, $\beta = 1$ και $\gamma = \sqrt{2}$.

Επομένως η υπερβολή έχει κορυφές $A(1,0), A'(-1,0)$, εστίες $E\left(\sqrt{2},0\right)$ και $E'\left(-\sqrt{2},0\right)$ και ασύμπτωτες τις ευθείες $y = x$ και $y = -x$

Άσκηση 12

Να βρεθεί συνθήκη ώστε η ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x + k$ να εφάπτεται στην υπερβολή

$$C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Λύση

Η ευθεία και η υπερβολή εφάπτονται αν και μόνο αν, το σύστημα των εξισώσεων τους έχει μοναδική λύση (διπλή ρίζα).
Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} y = \lambda x + k \\ \dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y = \lambda x + k \\ \dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{(\lambda x + k)^2}{\beta^2} = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y = \lambda x + k \\ \beta^2 x^2 - \alpha^2(\lambda x + k)^2 = \alpha^2\beta^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y = \lambda x + k \\ \left(\beta^2 - \alpha^2\lambda^2\right)x^2 - 2\alpha^2 k\lambda x - \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\kappa^2 = 0 \ (1) \end{array}\right.$$

Η εξίσωση (1) είναι δευτέρου βαθμού ως προς x.

Απαιτούμε να έχει διπλή ρίζα, έτσι

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4\alpha^4 k^2\lambda^2 - 4\left(\beta^2 - \alpha^2\lambda^2\right)\left(-\alpha^2 k^2 - \alpha^2\beta^2\right) = 0 \Leftrightarrow \; k^2 + \beta^2 = \alpha^2\lambda^2 \qquad (2)$$

Η (2) είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η ευθεία (ε) να εφάπτεται στην υπερβολή C.

Άσκηση 13

Δίνεται η υπερβολή $C: 9x^2 - y^2 = 32$. Να δείξετε, ότι η ευθεία (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο $M(2,-2)$ της υπερβολής και είναι κάθετη στην ευθεία $\delta: x - 9y + 18 = 0$ εφάπτεται στην υπερβολή C.

Λύση

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (δ) είναι $\lambda_\delta = \dfrac{1}{9}$.

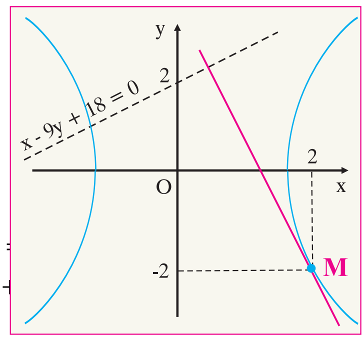
Επειδή $(\varepsilon) \perp (\delta) \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \lambda_\delta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -9$.

Η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $M(2,-2)$ και έχει συντελεστή διευθυνσης $\lambda_\varepsilon = -9$.

Επομένως η εξίσωσή της είναι:

$$y + 2 = -9(x - 2) \Leftrightarrow y = -9x + 16.$$

Λύνουμε το σύστημα της (ε) και της υπερβολής C



$$\left.\begin{array}{l} 9x^2 - y^2 = 32 \\ y = -9x + 16 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 9x^2 - (-9x+16)^2 = 32 \\ y = -9x + 16 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x^2 - 4x + 4 = \\ y = -9x + \end{array}$$

Η εξίσωση (1) είναι δευτεροβάθμια ως προς x και έχει Δ = 0. Επομένως η εξίσωση, αλλά και το σύστημα έχουν μοναδική λύση. Αυτό σημαίνει ότι η ευθεία εφάπτεται στην υπερβολή.

Άσκηση 14

Δίνεται η εξίσωση $\dfrac{x^2}{\lambda - 16} + \dfrac{y^2}{\lambda - 4} = 1$ **(1)**

Να εξετασθεί τι γραμμή παριστάνει για κάθε τιμή του $\lambda \in R - \{4, 16\}$. Να βρεθούν οι εστίες της κάθε καμπύλης.

Λύση

α. $\left.\begin{array}{l} \text{Αν } \lambda - 16 > 0 \\ \text{και } \lambda - 4 > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda > 16 \\ \lambda > 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lambda > 16$, η (1) παριστάνει έλλειψη της μορφής $\dfrac{x^2}{\beta^2} + \dfrac{y^2}{\alpha^2} = 1$

με $\beta^2 = \lambda - 16$ και $\alpha^2 = \lambda - 4$ $(\alpha > \beta)$.

Οπότε $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = \lambda - 4 - \lambda + 16 = 12 \Leftrightarrow \gamma = 2\sqrt{3}$ και οι εστίες της έλλειψης είναι $E\left(0, 2\sqrt{3}\right)$ και $E'\left(0, -2\sqrt{3}\right)$.

β. Αν $4 < \lambda < 16$ ισχύει $\lambda - 16 < 0$ και $\lambda - 4 > 0$ όποτε θέτουμε $16 - \lambda = \beta^2$ και $\lambda - 4 = \alpha^2$ και η (1) γίνεται $\dfrac{y^2}{\lambda - 4} - \dfrac{x^2}{16 - \lambda} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{\alpha^2} - \dfrac{x^2}{\beta^2} = 1.$,η οποία είναι εξίσωση υπερβολής.

Ισχύει: $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = \lambda - 4 + 16 - \lambda = 12 \Leftrightarrow \gamma = 2\sqrt{3}$.

Οπότε $E\left(0, 2\sqrt{3}\right)$ και $E'\left(0, -2\sqrt{3}\right)$ είναι οι εστίες της υπερβολής αυτής.

γ. Αν $\lambda < 4$ ισχύει $\lambda - 16 < 0$ και $\lambda - 4 < 0$ οπότε η (1) γίνεται

$$-\frac{x^2}{16 - \lambda} - \frac{y^2}{4 - \lambda} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16 - \lambda} + \frac{y^2}{4 - \lambda} = -1 \quad (2)$$

Θέτουμε $16 - \lambda = \alpha^2$ και $4 - \lambda = \beta^2$ και έχουμε: (2) $\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = -1$,που είναι προφανώς αδύνατη.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 - 4y^2 = 4$ είναι εξίσωση υπερβολής και να βρεθούν οι εστίες της και η εκκεντρότητά της.

(**Υπ.:** $E\left(\sqrt{5}, 0\right)$ και $E'\left(-\sqrt{5}, 0\right)$ και $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$)

2. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $C: 9x^2 - y^2 = 32$ που είναι παράλληλες προς την ευθεία $\varepsilon: 9x + y + 9 = 0$.

(**Απ.:** $y = -9x + 16$ ή $y = -9x - 16$)

3. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $C: \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ που διέρχονται από το σημείο $M(3, 4)$.

(**Απ.:** $x = 3$ ή $y = \dfrac{5}{6}x + \dfrac{3}{2}$)

4. Να βρείτε τις κορυφές, τις εστίες και την εκκεντρότητα της υπερβολής με εξίσωση $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{1}=1$.

(**Απ.:** $A(0,5)$ και $A'(0,-5)$ και $E(0,\sqrt{26})$ και $E'(0,-\sqrt{26})$ και $\varepsilon=\frac{\sqrt{26}}{5}$)

5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $C:\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ και την ευθεία $y=2$.

(**Απ.:** $\frac{16}{3}$)

6. Δίνεται η υπερβολή $C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$. Να βρεθεί η εκκεντρότητά της και οι εστίες της. Επιπλέον να βρεθούν και οι ασύμπτωτες της υπερβολής.

(**Απ.:** $\varepsilon=\frac{3}{2}$ και $E(0,3)$ και $E'(0,-3)$)

7. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της υπερβολής $C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

(**Απ.:** $y=\pm\frac{2}{3}x$)

8. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής αν έχει εστιακή απόσταση $2\gamma=20$ ασύμπτωτες $y=\pm\frac{4}{3}x$ και οι εστίες της είναι στον άξονα $x'x$.

(**Απ.:** $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$)

9. Να βρεθεί η εξίσωση της χορδής της υπερβολής $C:\frac{x^2}{4}-y^2=1$, η οποία έχει μέσο το σημείο $M(3,-1)$.

(**Απ:** $3x+4y-5=0$)

10. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $9x^2-16y^2=144$ παριστάνει υπερβολή και να βρεθούν οι κορυφές, οι εστίες και η εκκεντρότητα αυτής.

$\left(\textbf{Απ.:}\ A'(-4,0),\ A(4,0),\ E'(-5,0),\ E(5,0),\ \varepsilon=\frac{5}{4}\right)$

11. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής με κέντρο την αρχή, εστία το σημείο $(8,0)$ και κορυφή το $(6,0)$.

$$\left(\textbf{Απ.:}\ \frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{28}=1\right)$$

12. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που είναι τέτοια ώστε η απόστασή τους από το σημείο $A(8,0)$ να είναι διπλάσια της απόστασής τους από την ευθεία $x=2$.

$$\left(\textbf{Απ.:}\ \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1\right)$$

13. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που διέρχεται από το σημείο $(4,6)$ και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y=\pm\sqrt{3}\,x$ και εστίες στον άξονα $x'x$.

$$\left(\textbf{Απ.:}\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1\right)$$

14. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της υπερβολής $c: \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ που άγονται από το σημείο $A(1,1)$.

$$\left(\textbf{Απ.:}\ y-1=\frac{1\pm\sqrt{41}}{8}(x-1)\right)$$

15. Να βρεθεί η συνθήκη για να εφάπτεται η ευθεία $y=\lambda x+k$ στην υπερβολή με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

$$\left(\textbf{Απ.:}\ \kappa^2=\alpha^2\lambda^2-\beta^2\right)$$

16. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της υπερβολής $9x^2-y^2=32$ που διέρχονται από το σημείο $(0,-16)$.

$$\left(\textbf{Απ.:}\ y=9x-16,\ y=-9x-16\right)$$

17. Να αποδειχθεί ότι κάθε ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(1,4)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία $x-y+1=0$ εφάπτεται στην υπερβολή: $x^2-4y^2=12$.

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $c: x^2 - y^2 = 4$**. Έστω** $M(x_0, y_0)$ **ένα σημείο της στο 1ο τεταρτημόριο. Θεωρούμε την εφαπτομένη (ε) της υπερβολής σε σημείο της Μ, που σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν Ε. Έστω (η) η κάθετη στην εφαπτομένη στο σημείο Μ, που σχηματίζει με τις ασύμπτωτες της (c) τρίγωνο εμβαδού** E_1**.**

Έστω E_2 **το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από την εφαπτομένη στο σημείο Μ και τις ασύμπτωτες της (c).**

Να αποδείξετε ότι : $E^2 E_1 = 64$ **και** $E^2 E_1 = (E_2)^3$.

(**Υπ.:** Γράψτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο Μ και της κάθετης της εφαπτομένης στο Μ και βρείτε τα σημεία τομής αυτών με τους άξονες και τις ασύμπτωτες).