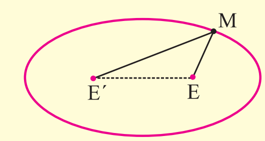
Μάθημα 9

Έλλειψη

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ορισμός

Έλλειψη ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία Ε και Ε΄ είναι σταθερό και μεγαλύτερο της απόστασης των δύο σημείων. Τα δύο αυτά σημεία, το Ε και το Ε΄, τα ονομάζουμε **εστίες** και τη μεταξύ τους απόσταση, **εστιακή απόσταση** και τη συμβολίζουμε με 2γ.

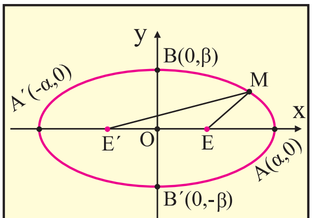


σχήμα 1

Το άθροισμα των αποστάσεων του τυχαίου σημείου της έλλειψης από τις δύο εστίες το συμβολίζουμε με 2α και αποτελεί το μήκος του **μεγάλου άξονα** της έλλειψης.
Είναι (ΜΕ) + (ΜΕ΄) = 2α

Η εξίσωση της έλλειψης ως προς σύστημα συντεταγμένων Οxy με άξονα x΄x την ευθεία που διέρχεται από τα Ε και Ε΄ και άξονα y΄y την μεσοκάθετο του ΕΕ΄ είναι:

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1} \quad (\text{σχήμα } 2)$$

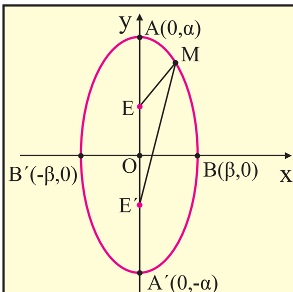


σχήμα 2

όπου $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$.

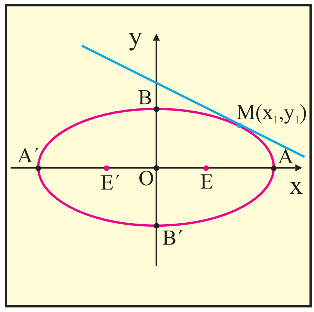
Ο **μικρός άξονας** ΒΒ΄ της έλλειψης έχει μήκος 2β.
Η εξίσωση της έλλειψης ως προς σύστημα συντεταγμένων Οxy με άξονα y΄y την ευθεία που διέρχεται από τα Ε και Ε΄ και άξονα x΄x την μεσοκάθετο του ΕΕ΄ είναι:

$$\boxed{\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1} \quad (\text{σχήμα } 3)$$



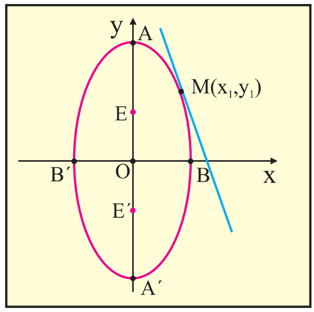
σχήμα 3

Εξίσωση εφαπτομένης



Έστω η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, $\alpha>\beta$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης C στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ είναι

$$\boxed{\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1}$$



Έστω η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1$, $\alpha>\beta$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης C στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ είναι

$$\boxed{\frac{xx_1}{\beta^2}+\frac{yy_1}{\alpha^2}=1}$$

• Μνημονικός κανόνας για την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης:

Έστω ότι αναζητούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ στο σημείο $M(x_1,y_1)$.

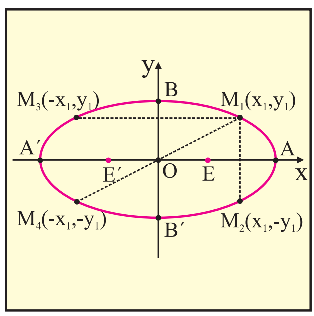
α. Γράφουμε την εξίσωση της έλλειψης: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ (1)

β. Επειδή $x^2=x\cdot x$ και $y^2=y\cdot y$ έχουμε από την (1): $\frac{x\cdot x}{\alpha^2}+\frac{y\cdot y}{\beta^2}=1$

γ. Στο δεύτερο x και y θέτουμε x_1 και y_1 αντίστοιχα και έχουμε $\frac{x\cdot x_1}{\alpha^2}+\frac{y\cdot y_1}{\beta^2}=1$, που είναι και η ζητούμενη εξίσωση. Ομοίως εργαζόμαστε και για την έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1,\ \alpha>\beta.$$

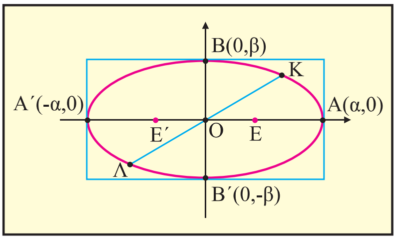
Ιδιότητες έλλειψης



Έστω η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

α. Έχει άξονες συμμετρίας τους x΄x και y΄y. Κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O(0,0).

Δηλαδή αν το σημείο $M_1(x_1, y_1)$ ανήκει στην έλλειψη τότε ανήκουν στην έλλειψη και τα σημεία $M_2(x_1, -y_1)$, $M_3(-x_1, y_1)$, $M_4(-x_1, -y_1)$.



β. Τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία Α(α,0) και Α΄(-α,0) και τον άξονα y΄y στα σημεία Β(0,β) και Β΄(0,-β).
Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΑ΄ λέγεται **μεγάλος άξονας** της έλλειψης και το ευθύγραμμο τμήμα ΒΒ΄ λέγεται **μικρός άξονας** της έλλειψης. Το Ο λέγεται **κέντρο** της έλλειψης. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ του οποίου τα άκρα Κ, Λ, ανήκουν στην έλλειψη και διέρχεται από το κέντρο Ο λέγεται **διάμετρος** της έλλειψης.

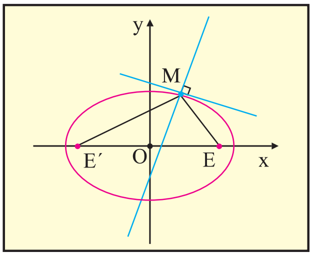
γ. Η έλλειψη C περιέχεται στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο το οποίο ορίζουν οι ευθείες:

$$x = \alpha\,,\ x = -\alpha\,,\ y = \beta \ \text{ και } \ y = -\beta.$$

Γενικά για τις συντεταγμένες (x, y) οποιουδήποτε σημείου της έλλειψης ισχύει :

$$\begin{Bmatrix} -\alpha \le x \le \alpha \\ -\beta \le y \le \beta \end{Bmatrix}$$

δ. Ανακλαστική ιδιότητα



Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης στο σημείο επαφής Μ διχοτομεί τη γωνία $E'\hat{M}E$, όπου Ε΄, Ε οι εστίες της έλλειψης.

• Χρήσιμη παρατήρηση:

Ας δούμε τι παριστάνει η εξίσωση $C: \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\lambda^2} = 1$, όπου μ, λ θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

α. Αν $\mu > \lambda$, τότε η C είναι έλλειψη με εστίες στον άξονα x΄x και σταθερό άθροισμα 2μ.

β. Αν $\mu < \lambda$, τότε η C είναι έλλειψη με εστίες στον άξονα y΄y και σταθερό άθροισμα 2λ.

γ. Αν $\mu = \lambda$, τότε $C: x^2 + y^2 = \mu^2$ και παριστάνει κύκλο.

Εκκεντρότητα έλλειψης

Έστω η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

Ονομάζουμε **εκκεντρότητα** της έλλειψης C *το λόγο της εστιακής απόστασης προς το μήκος του μεγάλου άξονα* και τη συμβολίζουμε με $\varepsilon = \frac{2\gamma}{2\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}$. Είναι $0 < \varepsilon < 1$

Αποδεικνύεται ότι: $\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$. Οπότε όταν το ε τείνει στο 1, το β τείνει στο 0 και η έλλειψη τείνει να γίνει ευθύγραμμο τμήμα. Αν το ε τείνει στο 0 τότε το β τείνει να γίνει ίσον με το α και η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία - Μέθοδος 1

Για να βρούμε την εξίσωση μιας έλλειψης πρέπει να προσδιορίζουμε τις τιμές των α, β. Δεδομένου, ότι έχουμε τη σχέση $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2$, αρκεί να βρούμε άλλες δύο σχέσεις. Όταν μας δίνονται οι εστίες, γνωρίζουμε το γ. Όταν μας δίνονται ο μεγάλος και ο μικρός άξονας, γνωρίζουμε τα α και β αντίστοιχα. Όταν μας δίνεται η εκκεντρότητα $\left(\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}\right)$ έχουμε μια σχέση ανάμεσα στα α, γ.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης όταν:

α. Έχει μεγάλο άξονα 2α = 8 και εστίες $E(2,0)$ **και** $E'(-2,0)$.

β. Έχει εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{5}$ **και εστίες** $E(1,0), E'(-1,0)$.

γ. Διέρχεται από τα σημεία $\Delta(0,2)$ **και** $Z(\sqrt{6},1)$**, έχει κέντρο Ο(0,0) και οι εστίες της είναι στον άξονα x΄x.**

Λύση

α. Αφού έχει εστίες $E(2,0)$ και $E'(-2,0)$ θα είναι $\gamma=2$.

Για το μεγάλο άξονα γνωρίζουμε ότι $2\alpha=8\Leftrightarrow\alpha=4$

Ακόμα έχουμε $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2\Leftrightarrow\beta^2=\alpha^2-\gamma^2\Leftrightarrow\beta^2=16-4\Leftrightarrow\beta^2=12\Leftrightarrow\beta=2\sqrt{3}$.

Έτσι, η εξίσωση της έλλειψης είναι $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

β. Είναι $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}\Leftrightarrow\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ (1). Επιπλέον είναι $\gamma=1$ (2)

Από $(1),(2)\Leftrightarrow\frac{1}{\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{5}\Leftrightarrow\alpha=\sqrt{5}$.Για το β έχουμε $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2\Leftrightarrow\beta^2=5-1\Leftrightarrow\beta=2$.

Επομένως η έλλειψη έχει εξίσωση: $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$.

γ. Η εξίσωση της έλλειψης είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, με $\alpha>\beta$.

Οι συντεταγμένες των σημείων Δ και Ζ επαληθεύουν την εξίσωση της.

Επομένως: $\left.\begin{matrix}\frac{0}{\alpha^2}+\frac{4}{\beta^2}=1\\ \frac{\left(\sqrt{6}\right)^2}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\beta^2=4\\ \frac{6}{\alpha^2}+\frac{1}{4}=1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\begin{matrix}\beta=2\\ \alpha=\sqrt{8}\end{matrix}$

Άρα η εξίσωση της έλλειψης είναι: $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

Κατηγορία - Μέθοδος 2

Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης έλλειψης σε σημείο της Α, προσδιορίζουμε απο τα δεδομένα τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Α.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε τις εφαπτόμενες της έλλειψης $C: 9x^2+16y^2=144$ (1), που είναι παράλληλες στην ευθεία $\varepsilon: x+y+2002=0$.

Λύση

Μετασχηματίζουμε την εξίσωση (1) της έλλειψης $9x^2+16y^2=144 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

Αν θεωρήσουμε $M(x_1,y_1)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης και της έλλειψης τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι : $\frac{x\cdot x_1}{16}+\frac{y\cdot y_1}{9}=1$ (δ)

Όμως $\delta // \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_\delta=\lambda_\varepsilon \Leftrightarrow \frac{-9x_1}{16y_1}=-1 \Leftrightarrow x_1=\frac{16y_1}{9}$ (2)

Το σημείο Μ ανήκει στην έλλειψη οπότε θα έχουμε: $9{x_1}^2+16{y_1}^2=144$ (3)

Από τις σχέσεις (2) και (3) υπολογίζουμε τις τιμές των x_1 και y_1:

$$\left\{\begin{matrix}x_1=\frac{16y_1}{9}\\ 9{x_1}^2+16{y_1}^2=144\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x_1=\frac{16}{5}\\ y_1=\frac{9}{5}\end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix}x_1=-\frac{16}{5}\\ y_1=-\frac{9}{5}\end{matrix}\right\}$$

Τα ζεύγη τιμών που βρήκαμε για τα x_1 και y_1 τα αντικαθιστούμε στην (1) και προκύπτουν οι ζητούμενες εξισώσεις των εφαπτομένων: $x+y-5=0$ και $x+y+5=0$.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να βρείτε την εκκεντρότητα και τις εστίες στις παρακάτω ελλείψεις:

α. $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ **β.** $9x^2+25y^2=225$

Λύση

α. Από την εξίσωση της έλλειψης προκύπτει ότι $\alpha=2$, $\beta=1$, $\gamma=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}=\sqrt{3}$.

Οπότε οι εστίες είναι $E(\gamma,0)=\left(\sqrt{3},0\right)$ και $E'(-\gamma,0)=\left(-\sqrt{3},0\right)$ και η εκκεντρότητά της

$$\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

β. Μετασχηματίζουμε την εξίσωση της έλλειψης: $9x^2+25y^2=225 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

Είναι $\alpha=5$, $\beta=3$, $\gamma=4$. Οπότε οι εστίες είναι $E(4\ ,\ 0)$ και $E'(-4\ ,0)$ και η εκκεντρότητα

$\varepsilon=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{4}{5}$

Άσκηση 2

Να βρείτε συναρτήσει του β, την εξίσωση της έλλειψης $C:\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ (1) που έχει εκκεντρότητα $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Λύση

Έχουμε: $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2\left(\alpha^2-\beta^2\right)=\alpha^2 \Leftrightarrow$

$2\alpha^2-2\beta^2=\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2=2\beta^2$ (2)

Η εξίσωση (1) με τη βοήθεια της (2) γίνεται: $\dfrac{x^2}{2\beta^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$, που είναι και το ζητούμενο.

Άσκηση 3

Έστω κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2=\rho^2$. Αν θέσουμε $x=x_1$ και $y=\kappa y_1$ να αποδείξετε ότι το σημείο $\left(x_1,y_1\right)$ ανήκει σε έλλειψη.

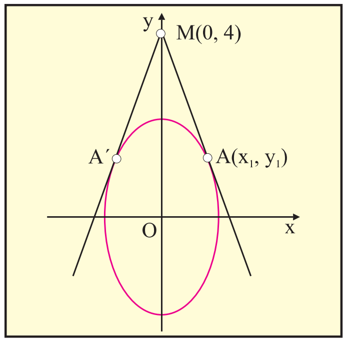
Λύση

Έχουμε $x^2+y^2=\rho^2 \Leftrightarrow {x_1}^2+\kappa^2{y_1}^2=\alpha^2 \Leftrightarrow \frac{{x_1}^2}{\alpha^2}+\frac{{y_1}^2}{\left(\frac{\alpha}{\kappa}\right)^2}=1$.

Η τελευταία εξίσωση είναι εξίσωση έλλειψης.

Άσκηση 4

Να βρεθεί η οξεία γωνία των εφαπτομένων οι οποίες άγονται από το σημείο $M(0,4)$ προς την έλλειψη $3x^2+y^2=4$.



Λύση

Θα υπολογίσουμε τις εφαπτόμενες οι οποίες άγονται από το σημείο Μ. Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο $A(x_1,y_1)$ είναι $3x_1x+y_1y=4$. Αφού διέρχεται από το Μ(0, 4) είναι: $3\cdot 0x_1+4y_1=4 \Leftrightarrow y_1=1 \quad (1)$

Επειδή το Α ανήκει στην έλλειψη ισχύει :

$$3{x_1}^2+{y_1}^2=4 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 3{x_1}^2+1=4 \Leftrightarrow 3{x_1}^2=3 \Leftrightarrow x_1=\pm 1.$$

Επομένως, τα σημεία επαφής είναι $A(1,1)$ και Α΄(-1, 1) και οι εξισώσεις των εφαπτομένων στα Α και Α΄ είναι :

$$\varepsilon_1: 3x+y=4 \text{ και } \varepsilon_2: -3x+y=4, \text{ αντίστοιχα.}$$

Θα υπολογίσουμε τη γωνία των δύο αυτών ευθειών, των ε_1, ε_2.

Είναι $\lambda_1=-3$ και $\lambda_2=3$.

Θεωρούμε δύο διανύσματα παράλληλα στις ε_1 και ε_2 τα : $\vec{\delta_1}=(1,-3)$ και $\vec{\delta_2}=(1,3)$ με $\vec{\delta}_1 /\!/ \varepsilon_1$ και $\vec{\delta}_2 /\!/ \varepsilon_2$. Είναι $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\delta_1},\vec{\delta_2}}\right)=\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{\vec{\delta_1}\cdot\vec{\delta_2}}{|\vec{\delta_1}||\vec{\delta_2}|}=\frac{1\cdot 1-3\cdot 3}{\sqrt{1+(-3)^2}\cdot\sqrt{1+3^2}}=\frac{-8}{10}$.

Επειδή η γωνία φ έχει $\sigma\upsilon\nu\varphi=-\frac{8}{10}<0$, είναι αμβλεία ($\phi\simeq 144^0$). Άρα η ζητούμενη γωνία είναι η παραπληρωματική της φ δηλαδή $\simeq 36^0$.

Άσκηση 5

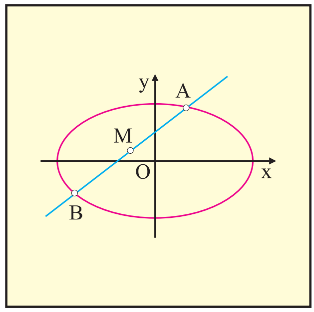
Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ και η ευθεία $y=x+1$. Να υπολογισθούν οι συντεταγμένες του μέσου Μ της χορδής ΑΒ που ορίζεται από την ευθεία και την έλλειψη.

Λύση

Η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων της έλλειψης και της ευθείας θα μας δώσει τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

Είναι:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1 \\ y=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(x+1)^2}{4}=1 \\ y=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+9x^2+18x+9=36 \\ y=x+1 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13x^2+18x-27=0 \quad (1) \\ y=x+1 \end{cases}$$

Επειδή το ζητούμενο της άσκησης δεν είναι οι συντεταγμένες των Α και Β αλλά το ημιάθροισμα τους (οι συντεταγμένες του Μ), από τη δευτεροβάθμια εξίσωση (1), υπολογίζουμε από τον τύπο του Vieta, το άθροισμα των ριζών της (1).

Έτσι $x_1+x_2=-\dfrac{18}{13}$, συνεπώς $x_M=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{9}{13}$. Το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία $y=x+1$, οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της.

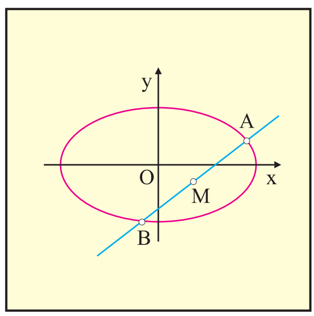
Δηλαδή $y_M=-\dfrac{9}{13}+1 \Leftrightarrow y_M=\dfrac{4}{13}$. Επομένως $M\left(-\dfrac{9}{13},\dfrac{4}{13}\right)$.

Άσκηση 6

Έστω η έλλειψη $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. Να βρεθεί η γραμμή στην οποία κινούνται τα μέσα των χορδών της έλλειψης, οι οποίες είναι παράλληλες προς την ευθεία $(\varepsilon): y=\lambda x-1$.

Λύση

Έστω $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ τα άκρα τυχαίας χορδής η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε). Επειδή ανήκουν στην έλλειψη οι συντεταγμένες τους θα επαληθεύουν την εξίσωσή της δηλαδή ισχύουν :



$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{4}+y_1^2=1 \\ \dfrac{x_2^2}{4}+y_2^2=1 \end{cases}$$

Αφαιρούμε τις παραπάνω κατα μέλη και έχουμε :

$$\frac{x_1^2}{4}-\frac{x_2^2}{4}+y_1^2-y_2^2=0 \Leftrightarrow \frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{4}+(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{x_1+x_2}{2}(x_1-x_2)+(y_1-y_2)\cdot 2\frac{y_1+y_2}{2}=0 \Leftrightarrow \text{ (διαιρούμε με } (x_1-x_2) \quad x_1 \neq x_2 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{x_1+x_2}{2}+2\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{2}=0 \quad (1).$$ Όμως $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ και $\lambda=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$

(αφού η χορδή ΑΒ είναι παράλληλη στην ευθεία (ε)). Οπότε η (1) γίνεται $\frac{1}{2}x_M+2\lambda y_M=0$.

Επομένως το μέσον Μ της ΑΒ, κινείται επάνω στην ευθεία $\frac{1}{2}x+2\lambda y=0 \Leftrightarrow x+4\lambda y=0$.

Άσκηση 7

Να δείξετε ότι οι ελλείψεις $C_1:\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $C_2:\frac{x^2}{\alpha^2+k^2}+\frac{y^2}{\beta^2+k^2}=1$, α > β, έχουν τις ίδιες εστίες για κάθε τιμή του $k\in R$.

Λύση

Για την έλλειψη C_1 έχουμε $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2$ και εστίες $E(\gamma,0)$ και $E'\ (-\gamma,0)$.

Θέτουμε $A^2=\alpha^2+k^2$ και $B^2=\beta^2+k^2$ και 2Γ την εστιακή απόσταση της έλλειψης C_2.

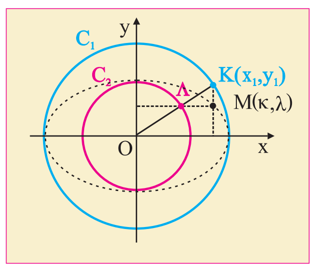
Είναι: $\Gamma^2=A^2-B^2=\alpha^2+k^2-\beta^2-k^2=\alpha^2-\beta^2=\gamma^2$ δηλαδή $\Gamma=\gamma$.

Οπότε η C_2 έχει τις ίδιες εστίες με τη C_1.

Άσκηση 8

Δίνονται οι κύκλοι $C_1:x^2+y^2=\alpha^2$ και $C_2:x^2+y^2=\beta^2$ με $\beta<\alpha$ και η μεταβλητή ευθεία ΟΛΚ (Ο η αρχή των αξόνων, Λ το σημείο τομής της ευθείας με τον κύκλο C_2 και Κ το σημείο τομής με τον C_1).Από το Λ φέρνουμε ευθεία κάθετη στον άξονα y΄y και από το Κ ευθεία κάθετη στον x΄x, οι οποίες τέμνονται στο Μ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του Μ.

Λύση



Έστω $\Lambda(x_1,\lambda)$ και $K(\kappa,y_1)$. Το σημείο Μ έχει συντεταγμένες (κ,λ). Επειδή τα σημεία Κ και Λ ανήκουν στους κύκλους, οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν τις εξισώσεις των κύκλων, δηλαδή $\begin{cases} x_1^2+\lambda^2=\beta^2 \\ \kappa^2+y_1^2=\alpha^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1^2=\beta^2-\lambda^2 \\ y_1^2=\alpha^2-\kappa^2 \end{matrix}$ (1).

Τα σημεία Ο, Λ, Κ είναι συνευθειακά, επομένως $\lambda_{O\Lambda}=\lambda_{OK}$ (όπου $\lambda_{O\Lambda}$ και λ_{OK} οι συντελεστές διεύθυνσης των ΟΛ και ΟΚ).

$$\lambda_{O\Lambda}=\lambda_{OK}\Leftrightarrow\frac{\lambda}{x_1}=\frac{y_1}{\kappa}.\ \text{Οπότε}\ \frac{\lambda^2}{x_1^2}=\frac{y_1^2}{\kappa^2}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\frac{\lambda^2}{\beta^2-\lambda^2}=\frac{\alpha^2-\kappa^2}{\kappa^2}\Leftrightarrow$$

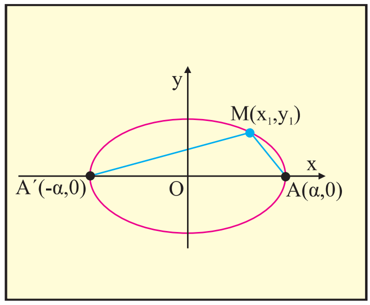
$$\Leftrightarrow \alpha^2\beta^2-\beta^2\kappa^2-\alpha^2\lambda^2+\kappa^2\lambda^2=\kappa^2\lambda^2 \Leftrightarrow \beta^2\kappa^2+\alpha^2\lambda^2=\alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow \frac{\kappa^2}{\alpha^2}+\frac{\lambda^2}{\beta^2}=1$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος του σημείου $M(\kappa,\lambda)$ είναι η έλλειψη : $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

Άσκηση 9

Έστω η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\alpha>\beta$, μεγάλο άξονα Α΄Α και ένα σημείο της Μ (διαφορετικό από τις κορυφές). Να δείξετε ότι το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των ευθειών ΜΑ και ΜΑ΄ είναι σταθερό, ανεξάρτητο της θέσης του σημείου Μ.

Λύση



Έστω $M(x_1,y_1)$ σημείο της έλλειψης. Οι συντελεστές διεύθυνσης των ΜΑ και ΜΑ΄ είναι:

$$\lambda_{MA}=\frac{y_1}{x_1-\alpha} \text{ και } \lambda_{MA'}=\frac{y_1}{x_1+\alpha}.$$

Επομένως $\lambda_{MA}\cdot\lambda_{MA'}=\frac{y_1}{x_1-\alpha}\cdot\frac{y_1}{x_1+\alpha}=\frac{y_1^2}{x_1^2-\alpha^2}$ (1).

Επειδή το Μ ανήκει στην έλλειψη, οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της δηλαδή

$$\frac{x_1^2}{\alpha^2}+\frac{y_1^2}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow \beta^2x_1^2+\alpha^2y_1^2=\alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow y_1^2=\frac{\alpha^2\beta^2-\beta^2x_1^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow y_1^2=\frac{\beta^2\left(\alpha^2-x_1^2\right)}{\alpha^2} \quad (2)$$

Από (1), (2) έχουμε:

$$\lambda_{MA}\cdot\lambda_{MA'}=\frac{\frac{\beta^2\left(\alpha^2-x_1^2\right)}{\alpha^2}}{x_1^2-\alpha^2}=\frac{\beta^2\left(\alpha^2-x_1^2\right)}{\alpha^2\left(x_1^2-\alpha^2\right)}=-\frac{\beta^2\left(\alpha^2-x_1^2\right)}{\alpha^2\left(\alpha^2-x_1^2\right)}=-\frac{\beta^2}{\alpha^2}=\text{σταθερό}.$$

Άσκηση 10

Από σημείο $A(x_0,y_0)$ εκτός της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ φέρνουμε δύο εφαπτόμενες προς την έλλειψη και έστω Β, Γ τα σημεία επαφής. Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ΒΓ είναι: $\frac{xx_0}{\alpha^2}+\frac{yy_0}{\beta^2}=1$ (1)

Λύση

Έστω $B(x_1,y_1)$ και $\Gamma(x_2,y_2)$. Η εφαπτομένη στο Β έχει εξίσωση $\varepsilon_1:\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1$.

Επειδή διέρχεται από το $A(x_0, y_0)$, ισχύει $\frac{x_0x_1}{\alpha^2}+\frac{y_0y_1}{\beta^2}=1$ (2).

Η ισότητα (2) μας δίνει την πληροφορία ότι η εξίσωση (1) είναι εξίσωση ευθείας, η οποία διέρχεται από το Β (αφού οι συντεταγμένες του Β την ικανοποιούν).

Η εφαπτομένη στο Γ έχει εξίσωση $\varepsilon_2:\frac{xx_2}{\alpha^2}+\frac{yy_2}{\beta^2}=1$. Επειδή διέρχεται απο το

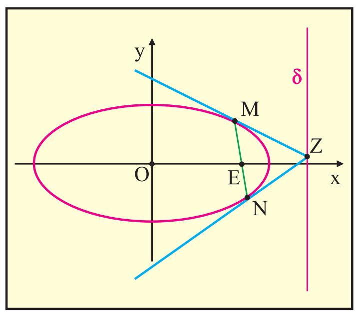
$A(x_0, y_0):\frac{x_0x_2}{\alpha^2}+\frac{y_0y_2}{\beta^2}=1$ (3). Η ισότητα (3) μας λεει ότι η (1) είναι εξίσωση ευθείας η οποία διέρχεται από το Γ. Επειδή απο δυο σημεία διέρχεται μόνο μία ευθεία η εξίσωση (1) παριστάνει την ευθεία ΒΓ.
(Η ΒΓ λέγεται πολική ευθεία του σημείου Α ως προς την έλλειψη και το Α λέγεται πόλος).

Άσκηση 11

Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,\ \alpha>\beta$ και μια χορδή της ΜΝ η οποία διέρχεται από την εστία $E(\gamma,0)$. Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της έλλειψης στα άκρα της χορδής, τέμνονται σε σημείο της ευθείας $x=\frac{\alpha^2}{\gamma}$. *(Η ευθεία $x=\frac{\alpha^2}{\gamma}$ λέγεται δευθετούσα της έλλειψης).*

Λύση

Έστω $Z(x_0, y_0)$ το σημείο τομής των δύο εφαπτόμενων. Από το σημείο Ζ λοιπόν, άγονται δύο εφαπτόμενες προς την έλλειψη. Η χορδή (πολική ευθεία) η οποία ενώνει τα σημεία επαφής έχει εξίσωση:



$$MN:\frac{x_0x}{\alpha^2}+\frac{y_0y}{\beta^2}=1 \qquad (1).$$

Επειδή η χορδή ΜΝ διέρχεται από την εστία $E(\gamma,0)$ η εξίσωση (1) επαληθεύεται από τις συντεταγμένες της .

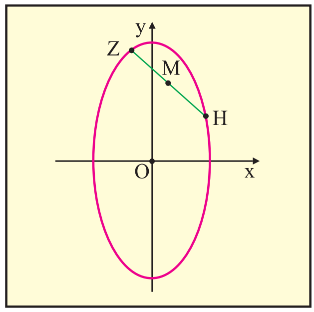
Επομένως $\frac{x_0\gamma}{\alpha^2}+\frac{y_0 0}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow x_0=\frac{\alpha^2}{\gamma}$ και συνεπώς το σημείο Ζ βρίσκεται επάνω στην ευθεία με εξίσωση : $x=\frac{\alpha^2}{\gamma}$.

Άσκηση 12

Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ και το εσωτερικό της σημείο $M(1,2)$. Να προσδιοριστεί η χορδή της έλλειψης η οποία έχει το Μ ως μέσο.

Λύση

Έστω $Z(x_1, y_1)$ και $H(x_2, y_2)$ τα άκρα της ζητούμενης χορδής. Είναι $x_1 \neq x_2$. (Αν ήταν $x_1 = x_2$ λόγω συμμετρίας το μέσο τους Μ θα ήταν σημείο του άξονα x΄x).



Αφού τα σημεία Ζ, Η ανήκουν στην έλλειψη, οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωση της.

Επομένως: $\dfrac{x_1^2}{9} + \dfrac{y_1^2}{16} = 1 \Leftrightarrow 16x_1^2 + 9y_1^2 = 144$ (1)

και $\dfrac{x_2^2}{9} + \dfrac{y_2^2}{16} = 1 \Leftrightarrow 16x_2^2 + 9y_2^2 = 144$ (2)

Αφαιρούμε τις σχέσεις (1) και (2): $16\left(x_1^2 - x_2^2\right) + 9\left(y_1^2 - y_2^2\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$16(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 9(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 0 \overset{\substack{\text{διαιρούμε}\\ \text{και τα δυο}\\ \text{μέλη με 2}}}{\Leftrightarrow}$$

$$16(x_1 - x_2)\frac{x_1 + x_2}{2} + 9(y_1 - y_2)\frac{y_1 + y_2}{2} = 0 \qquad (3)$$

Οι συντεταγμένες του μέσου Μ της ΖΗ είναι: $M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Επομένως η (3) γίνεται: $16(x_1 - x_2)x_M + 9(y_1 - y_2)y_M = 0$.

Όμως Μ(1, 2), έτσι έχουμε $16(x_1 - x_2) + 18(y_1 - y_2) = 0 \Leftrightarrow 18(y_1 - y_2) = -16(x_1 - x_2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{16}{18} \qquad (4).$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ΖΗ είναι $\lambda_{ZH} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

Έτσι από τη σχέση (4) έχουμε $\lambda_{ZH} = -\dfrac{8}{9}$. Συνεπώς $ZH: y - 2 = -\dfrac{8}{9}(x - 1)$

Άσκηση 13

Για το σημείο Λ του επιπέδου το διάνυσμα θέσης είναι $\vec{O\Lambda} = \dfrac{\alpha(3 - \kappa^2)}{3 + \kappa^2}\vec{i} + \dfrac{\beta \cdot 2\sqrt{3}\kappa}{3 + \kappa^2}\vec{j}$,

όπου α, β θετικοί και $\kappa \in R$. Να δείξετε, ότι καθώς το κ μεταβάλλεται το σημείο Λ κινείται σε έλλειψη.

Λύση

Όπως γνωρίζουμε οι συντελεστές των $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overline{O\Lambda}$.

Επειδή Ο είναι το σημείο αναφοράς (η αρχή των αξόνων), αυτοί οι συντελεστές είναι οι συντεταγμένες του σημείου Λ. Επομένως $\Lambda\left(\frac{\alpha\left(3-\kappa^2\right)}{3+\kappa^2},\frac{\beta\cdot 2\sqrt{3}\kappa}{3+\kappa^2}\right)$

Έχουμε: $\left.\begin{aligned} x &= \frac{\alpha\left(3-\kappa^2\right)}{3+\kappa^2} \\ y &= \frac{\beta\cdot 2\sqrt{3}\kappa}{3+\kappa^2}\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} \frac{x}{\alpha} &= \frac{3-\kappa^2}{3+\kappa^2} \\ \frac{y}{\beta} &= \frac{2\sqrt{3}\kappa}{3+\kappa^2}\end{aligned}$

Υψώνουμε τις δύο σχέσεις στο τετράγωνο και τις προσθέτουμε κατα μέλη:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{\alpha^2} &= \frac{\left(3-\kappa^2\right)^2}{\left(3+\kappa^2\right)^2} \\ \frac{y^2}{\beta^2} &= \frac{\left(2\sqrt{3}\kappa\right)^2}{\left(3+\kappa^2\right)^2}\end{aligned}\right\} \quad \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=\frac{\left(3-\kappa^2\right)^2}{\left(3+\kappa^2\right)^2}+\frac{12\kappa^2}{\left(3+\kappa^2\right)^2}=\frac{\left(3+\kappa^2\right)^2}{\left(3+\kappa^2\right)^2}=1$$

Οι συντεταγμένες του Λ ικανοποιούν την εξίσωση της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.
Επομένως το σημείο Λ κινείται επάνω σε αυτήν την έλλειψη.

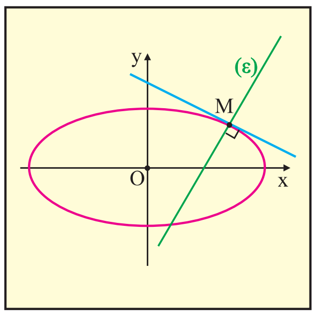
Άσκηση 14

Το σημείο $M(\alpha\eta\mu\theta,\beta\sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta\in(0,2\pi)$, με $\theta\neq\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\pi$ ανήκει στην έλλειψη $C:\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\alpha>\beta$.

α. Να δείξετε, ότι η κάθετη στην εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο Μ έχει εξίσωση :

$$\varepsilon:(\alpha\sigma\upsilon\nu\theta)x-(\beta\eta\mu\theta)y=\left(\alpha^2-\beta^2\right)\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$$

β. Αν η (ε) διέρχεται από το σημείο (β, 0) να δείξετε ότι ισχύει η σχέση $\eta\mu\theta=\frac{\beta}{\alpha\cdot\varepsilon^2}$, όπου ε η εκκεντρότητα της έλλειψης.



Λύση

α. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ είναι

$$\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1\Leftrightarrow\beta^2x_1x+\alpha^2y_1y=\alpha^2\beta^2.$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης αυτής της ευθείας είναι $\lambda = -\dfrac{\beta^2 x_1}{\alpha^2 y_1}$.

Αφού $M(\alpha\eta\mu\theta, \beta\sigma\upsilon\nu\theta)$, ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο M είναι

$$\lambda = \frac{-\alpha\beta^2\eta\mu\theta}{\alpha^2\beta\sigma\upsilon\nu\theta} = -\frac{\beta\eta\mu\theta}{\alpha\sigma\upsilon\nu\theta}, \ \theta \neq \frac{\pi}{2}, \ \theta \neq \frac{3\pi}{2}.$$

Επομένως η κάθετη στην εφαπτομένη στο σημειο M έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_\varepsilon = \frac{\alpha\sigma\upsilon\nu\theta}{\beta\eta\mu\theta}, \ \theta \neq 0, \ \theta \neq \pi \ \text{ και εξίσωση } \ y - \beta\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\alpha\sigma\upsilon\nu\theta}{\beta\eta\mu\theta}(x - \alpha \cdot \eta\mu\theta)$$

$$\Leftrightarrow \beta\eta\mu\theta \cdot y - \beta^2\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \alpha\sigma\upsilon\nu\theta \cdot x - \alpha^2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha\sigma\upsilon\nu\theta)x - (\beta\eta\mu\theta)y = (\alpha^2 - \beta^2)\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$$

β. Οι συντεταγμένες του σημείου (β,0) επαληθεύουν την εξίσωση της (ε). Επομένως έχουμε:

$$(\alpha\sigma\upsilon\nu\theta)\beta - (\beta\eta\mu\beta) \cdot 0 = (\alpha^2 - \beta^2)\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \alpha\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = (\alpha^2 - \beta^2)\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \overset{\sigma\upsilon\nu\theta \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\alpha\beta = (\alpha^2 - \beta^2)\eta\mu\theta \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2} \qquad (1)$$

Όμως ισχύουν οι σχέσεις: $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$ και $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha}$.

Οπότε η (1) γίνεται: $\eta\mu\theta = \dfrac{\alpha\beta}{\gamma^2} = \dfrac{\alpha\beta}{\dfrac{\gamma^2}{\alpha^2}\alpha^2} = \dfrac{\alpha\beta}{\varepsilon^2\alpha^2} = \dfrac{\beta}{\alpha \cdot \varepsilon^2}$

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $16x^2 + 25y^2 = 400$ είναι εξίσωση έλλειψης και να βρεθούν τα μήκη των αξόνων της, οι εστίες της και η εκκεντρότητα.

(**Απ.:** $2\alpha = 10$ και $2\beta = 8$ και $\gamma = 3$ και $\varepsilon = \dfrac{3}{5}$)

2. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $C: 4x^2 + y^2 = 20$, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $M(0,10)$.

(**Απ.:** $y = 4x + 10$ ή $y = -4x + 10$)

3. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης με κέντρο την αρχή των αξόνων, κορυφή το σημείο $M(17,0)$ και μία εστία το σημείο $E(8,0)$.

(**Απ.:** $\left(\dfrac{x^2}{17^2}+\dfrac{y^2}{15^2}=1\right)$)

4. Να βρείτε τη σχετική θέση της ευθείας $y=4x+9$ ως προς την έλλειψη $2x^2+y^2=9$.

(**Απ.:** Εφάπτεται στο σημείο $M(-2,1)$))

5. Δύο ελλείψεις έχουν εξισώσεις $5x^2+3y^2=64$ και $3x^2+5y^2=64$. Να δειχθεί ότι τα κοινά σημεία τους ανήκουν στον κύκλο με εξίσωση $x^2+y^2=16$.

6. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $C:4x^2+y^2=20$ οι οποίες:

α. Είναι παράλληλες προς την ευθεία $\varepsilon:4x+y+4=0$

β. Είναι κάθετες στην ευθεία $\varepsilon:x+4y+12=0$.

(**Απ.: α.** $y=-4x+10$ ή $y=-4x-10$, **β.** $y=4x+10$ ή $y=4x-10$))

7. Δίνεται η έλλειψη $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$.

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο Ε΄ΒΕΒ΄ είναι ρόμβος (Ε΄ και Ε οι εστίες, Β και Β΄ τα άκρα του μικρού άξονα).

β. Να βρεθεί το εμβαδόν του ρόμβου.

(**Απ.: β.** $2\beta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$))

8. Να συγκριθούν οι εκκεντρότητες των ελλείψεων :

$$C_1:\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \text{ και } C_2:\frac{x^2}{\alpha^4}+\frac{y^2}{\beta^4}=1, \text{ με } \alpha>\beta.$$

(**Απ.:** ($\varepsilon_2>\varepsilon_1$))

9. Αν είναι η εφαπτομένη της έλλειψης $C:\dfrac{x^2}{\beta^2}+\dfrac{y^2}{\alpha^2}=1$ στο $M_1(x_1,y_1)$, να αποδείξετε ότι η κάθετη στην (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\dfrac{y_1}{x_1}$.

10. Δίνεται η έλλειψη $C:\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$. Να αποδείξετε ότι και η έλλειψη με εξίσωση $C':\dfrac{\kappa^2x^2}{\alpha^2}+\dfrac{\kappa^2y^2}{\beta^2}=1$ έχει την ίδια εκκεντρότητα με τη C.

11. Δίνεται η έλλειψη $x^2+2y^2=2$ και το σημείο $A(2,3)$. Φέρουμε από το Α τις εφαπτόμενες της έλλειψης και έστω Β, Γ τα σημεία επαφής. Να υπολογίσετε την απόσταση του Α από τη χορδή ΒΓ.

$\left(\textbf{Απ.:}\sqrt{10}\right)$

12. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και τα σημεία της Α, Β τέτοια ώστε η γωνία $A\hat{O}B=90^o$. (Ο είναι η αρχή των αξόνων). Αν οι εφαπτόμενες της έλλειψης στα Α, Β τέμνονται στο σημείο Μ, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου Μ όταν η γωνία ΑΟΒ στρέφεται γύρω από το Ο.

$\left(\textbf{Απ.:}\frac{x^2}{2\alpha^2}+\frac{y^2}{2\beta^2}=1\right)$

13. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{19}+\frac{y^2}{18}=1$. Να βρεθεί ο κύκλος με διάμετρο το τμήμα Ε΄Ε, όπου Ε , Ε΄ οι εστίες της έλλειψης.

(**Απ.:** $x^2+y^2=1$)

14. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο την αρχή, εστιακή απόσταση 4 και εκκεντρότητα $1/2$.

$\left(\textbf{Απ.:}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1 \text{ ή } \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1\right)$

15. Να βρείτε τη σχετική θέση της ευθείας $y=x+2$ ως προς την έλλειψη $x^2+4y^2=16$.

(**Απ.:** Τέμνει την έλλειψη)

16. Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης στην οποία κινείται σημείο Μ του επιπέδου, για το οποίο ισχύει $(MA)+(MB)=4$, με $A(-1,0)$ και $B(1,0)$.

$\left(\textbf{Απ.:}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\right)$

17. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$ με $x=4\text{συν}\theta$, $y=3\text{ημ}\theta$, $\theta\in[0,2\pi]$ ανήκουν σε έλλειψη της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

$\left(\textbf{Απ.:}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\right)$

18. Δίνεται έλλειψη $(c): 4x^2 + 7y^2 = 36$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $M(3,4)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία $x - 2y + 7 = 0$ εφάπτεται της (c).

(**Απ.:** $\left(-\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right)$ είναι το σημείο επαφής)

19. Η εξίσωση μιας χορδής της έλλειψης $x^2 + 4y^2 = 100$ είναι $x + 6y = 40$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου Μ της χορδής.

(**Απ.:** Είναι $M(4,6)$)

20. Η έλλειψη $x^2 + 4y^2 = 16$ τέμνει τον άξονα y΄y στα σημεία Β, Β΄ και τον αρνητικό ημιάξονα Οx΄ στο Α΄. Δείξτε ότι ο κύκλος που διέρχεται απο τα σημεία Β, Β΄ και Α΄ έχει εξίσωση $x^2 + y^2 + 3x - 4 = 0$.

21. Να βρεθεί η χορδή της έλλειψης $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ που έχει μέσο το σημείο $M(2,1)$.

(**Απ.:** $8x + 9y - 25 = 0$)

22. Δίνεται η έλλειψη $x^2 + 4y^2 = 16$. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της έλλειψης που διέρχονται από το σημείο $(-4,4)$.

(**Απ.:** $y = \frac{1}{2}x + 18,\ x = -4$)

23. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της έλλειψης $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = x + 4$.

(**Απ.:** $y = x + \sqrt{20},\ y = x - \sqrt{20}$)

24. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της έλλειψης $x^2 + 4y^2 = 16$ που είναι κάθετες στην ευθεία $x + y + 5 = 0$.

(**Απ.:** $y = x + \sqrt{20},\ y = x - \sqrt{20}$)

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Δίνεται η έλλειψη $\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$, $\alpha>\beta$ με εστίες Ε,Ε΄. Η κάθετη στο σημείο Ρ της έλλειψης τέμνει το μικρό άξονα στο Α. Δείξτε ότι το τετράγωνο της απόστασης του Α από μια από τις εστίες ισούται με: $\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2}(\mathrm{EP})(\mathrm{E'P})$.

(**Υπ.:** Δείξτε ότι $(\mathrm{E'P})=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2}(\mathrm{EP})(\mathrm{E'P})$. Υποθέστε ότι $\mathrm{P}(\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi,\beta\eta\mu\varphi)$ και υπολογίστε τις αποστάσεις $\mathrm{E'P}$ και ΕΡ. Είναι $(\mathrm{E'P})=|\gamma\sigma\upsilon\nu\varphi+\alpha|$ και $(\mathrm{EP})=|\gamma\sigma\upsilon\nu\varphi-\alpha|$)