Μάθημα 8

Παραβολή

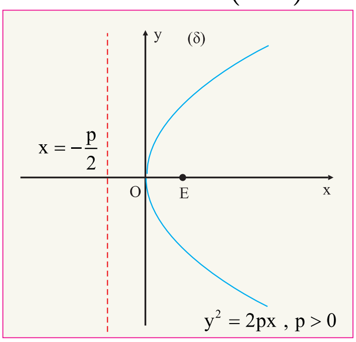
Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

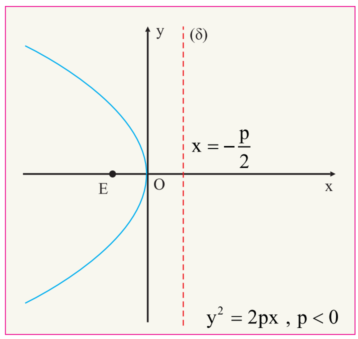
Ορισμός

Παραβολή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από μια σταθερή ευθεία (δ) που λέγεται **διευθετούσα** της παραβολής και από ένα σταθερό σημείο Ε που λέγεται **εστία** της παραβολής. Τα σημεία που ικανοποιούν την προηγούμενη ιδιότητα ανήκουν σε μια καμπύλη που φαίνεται στα επόμενα σχήματα.

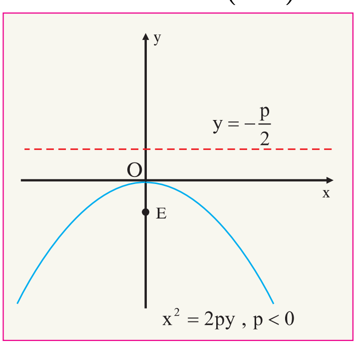
Εξίσωση παραβολής και γραφική παράσταση

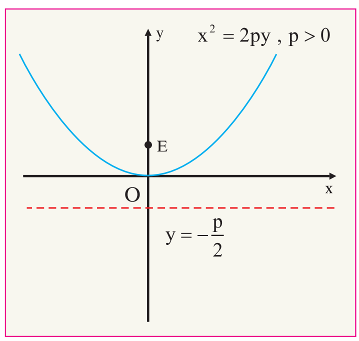
1. Με κορυφή $O(0,0)$, εστία $E\left(\frac{p}{2},0\right)$, και διευθετούσα $\delta:\ x=-\frac{p}{2}$ $\boxed{y^2=2px}$





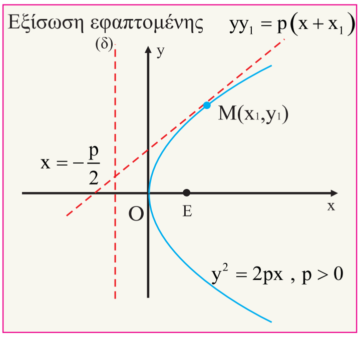
2. Με κορυφή $O(0,0)$, εστία $E\left(0,\frac{p}{2}\right)$, και διευθετούσα $\delta:\ y=-\frac{p}{2}$ $\boxed{x^2=2py}$

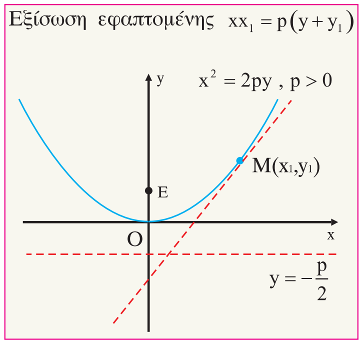




Εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο $M_1(x_1, y_1)$: $\boxed{yy_1 = p(x + x_1)}$

Εφαπτομένη της παραβολής $x^2 = 2py$ στο σημείο $M_1(x_1, y_1)$: $\boxed{xx_1 = p(y + y_1)}$





Μνημονικός κανόνας για την εξίσωση της εφαπτομένης παραβολής:

Έστω ότι αναζητούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο $M(x_1, y_1)$.

Εκτελούμε τα εξής:

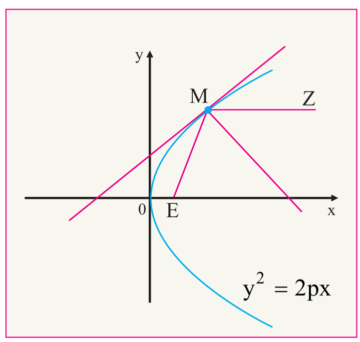
α. Γράφουμε την εξίσωση της παραβολής : $y^2 = 2px$ (1)

β. Επειδή $y^2 = y \cdot y$ και $2x = x + x$ αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε : $y \cdot y = p(x + x)$

γ. Στο δεύτερο y και x θέτουμε y_1 και x_1 αντίστοιχα και παίρνουμε : $y \cdot y_1 = p(x + x_1)$ που είναι και η ζητούμενη εξίσωση.

Ομοίως εργαζόμαστε και στην περίπτωση της παραβολής $x^2 = 2py$

Ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής



Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας παραβολής στο σημείο επαφής Μ διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν η ημιευθεία ΜΕ και η ημιευθεία ΜΖ, που είναι ομόρροπη της ΟΕ, όπου Ε είναι η εστία της παραβολής.

Η ιδιότητα αυτή της παραβολής έχει πολλές εφαρμογές στην καθημερινή ζωή, π.χ στα παραβολικά τηλεκόπια, στα ραντάρ,στα φανάρια των αυτοκινήτων κ.λ.π.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία - Μέθοδος 1

Για να προσδιορίσουμε την εξίσωση παραβολής, απο τα δεδομένα βρίσκουμε την παράμετρο p.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή το $(0,0)$, στις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y και διέρχεται από το σημείο $(2,2)$.

β. Έχει εστία $E(-2,0)$ και διευθετούσα $\delta:\ x-2=0$.

γ. Έχει άξονα συμμετρίας τον x΄x και εφάπτεται της ευθείας $y=4x+1$.

Λύση

α. Αφού η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y και κορυφή το $(0,0)$ θα είναι της μορφής: $x^2=2py$. Επειδή διέρχεται από το σημείο $(2,2)$ ισχύει :

$$2^2=2p\cdot 2 \Leftrightarrow p=1 .\ \text{Άρα}\ \ C:\ x^2=2y .$$

β. Είναι $\frac{p}{2}=-2 \Leftrightarrow p=-4$. Άρα $C:\ y^2=-8x$.

γ. Η εφαπτομένη στο τυχαίο σημείο της παραβολής (x_1 , y_1) είναι

$$yy_1=p(x+x_1) \Leftrightarrow y=\frac{p}{y_1}x+\frac{px_1}{y_1} \Leftrightarrow y=\frac{p}{y_1}x+\frac{y_1}{2}\ \left(\text{διότι}\ y_1^{\,2}=2px_1\ ,(x_1,y_1)\neq 0\right).$$

Άρα πρέπει να ισχύουν : $\frac{p}{y_1}=4$ και $\frac{y_1}{2}=1$, δηλαδή

$y_1=2$ και $p=8$, οπότε η ζητούμενη εξίσωση της παραβολής είναι $C:\ y^2=16x$.

Κατηγορία - Μέθοδος 2

Όταν θέλουμε να βρούμε τη σχετική θέση μιας ευθείας με εξίσωση $y=\alpha x+\beta$, $\alpha\neq 0$* και μιας παραβολής $y^2=2px$ ή $\left(x^2=2py\right)$ επιλύουμε το σύστημα που σχηματίζουν.

Θα οδηγηθούμε σε εξίσωση δευτέρου βαθμού. Διακρίνουμε περιπτώσεις :

• Αν η διακρίνουσα $\Delta>0$, τότε το σύστημα μας έχει δύο λύσεις και στην περίπτωση που και οι δύο είναι αποδεκτές η ευθεία τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία.

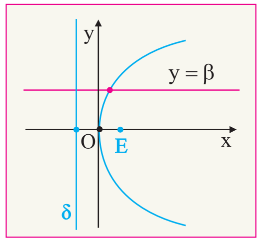
• Αν η διακρίνουσα $\Delta=0$, τότε το σύστημα έχει μία λύση και η ευθεία εφάπτεται της παραβολής.

• Αν η διακρίνουσα $\Delta<0$, τότε το σύστημα δεν έχει καμία λύση και η ευθεία δεν έχει κοινό σημείο με την παραβολή.

* **Παρατήρηση:**

Αν $\alpha = 0$ η ευθεία είναι της μορφής $y = \beta$ και τέμνει την παραβολή $y^2 = 2px$ σε ένα σημείο χωρίς όμως να εφάπτεται σε αυτήν.

Αναφέρουμε για παράδειγμα την παραβολή $y^2 = 4x$ και την ευθεία $y = 1$



Παράδειγμα 1

α. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x + y + 1 = 0$ και η παραβολή $y^2 = 2x$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

β. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή το $(0,0)$, που έχει άξονα συμμετρίας τον Ox και εφάπτεται στην ευθεία $y = 4x + 1$.

Λύση

α. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το σύστημα που σχηματίζουν οι δύο εξισώσεις είναι αδύνατο:

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - 1 \\ y^2 = 2(-y-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - 1 \\ y^2 + 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

Όμως η εξίσωση $y^2 + 2y + 2 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -4 < 0$ άρα είναι αδύνατη και κατά συνέπεια και το σύστημα είναι αδύνατο. Επομένως η ευθεία $x + y + 1 = 0$ και η παραβολή $y^2 = 2x$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

β. Αφού η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον Ox και κορυφή το $(0,0)$ θα έχει εξίσωση της μορφής $y^2 = 2px$.

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων της παραβολής και της ευθείας.

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2p\dfrac{y-1}{4} \\ x = \dfrac{y-1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 = py - p \\ x = \dfrac{y-1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 - py + p = 0 \ (1) \\ x = \dfrac{y-1}{4} \end{cases}$$

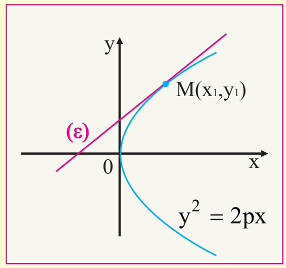
Επειδή η ευθεία εφάπτεται στην παραβολή πρέπει η εξίσωση (1) να έχει διπλή λύση και αυτό συμβαίνει όταν και μόνον όταν, έχει διακρίνουσα $\Delta = 0$.

Είναι $\Delta = 0 \Leftrightarrow p^2 - 8p = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p = 0 & \text{απορρίπτεται} \\ p = 8 \end{cases}$

Οπότε η ζητούμενη εξίσωση της παραβολής θα είναι $C:\ y^2 = 16x$.

Κατηγορία - Μέθοδος 3

Για να προσδιορίσουμε την εξίσωση εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 2px$ ή $\left(x^2 = 2py\right)$, γράφουμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο τυχαίο σημείο της έστω $M_1\left(x_1, y_1\right)$ πουείναι: $yy_1 = p\left(x + x_1\right)$ ή $\left(xx_1 = p\left(y + y_1\right)\right)$.



Στη συνέχεια προσδιορίζουμε τα x_1, y_1. Αφού έχουμε δύο αγνώστους χρειαζόμαστε δύο εξισώσεις.
Η μια είναι πάντοτε η: $y_1^2 = 2px_1$ ή $\left(x_1^2 = 2py_1\right)$ αφού το σημείο $M\left(x_1, y_1\right)$ ανήκει στην παραβολή. Η δεύτερη εξίσωση με τα x_1, y_1 προκύπτει εύκολα από τα δεδομένα του προβλήματος.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $C:\ y^2 = 3x$ **που είναι παράλληλη στην ευθεία** $\delta:\ 2x - y + 2003 = 0$**.**

Λύση

Έστω $M\left(x_1, y_1\right)$ το σημείο επαφής. Τότε η εφαπτομένη της $C:\ y^2 = 3x$ στο M θα είναι:

$$\varepsilon:\ yy_1 = \frac{3}{2}\left(x + x_1\right) \Leftrightarrow y = \frac{3}{2y_1}\left(x + x_1\right)\ \ (1),\ \text{με}\ \lambda_\varepsilon = \frac{3}{2y_1}\ \ (\ y_1 \neq 0\ ).$$

Όμως $\varepsilon \parallel \delta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\delta \Leftrightarrow \dfrac{3}{2y_1} = 2 \Leftrightarrow y_1 = \dfrac{3}{4}$.

Επειδή το σημείο M είναι σημείο της παραβολής ισχύει:

$$y_1^2 = 3x_1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 3x_1 \Leftrightarrow \frac{9}{16} = 3x_1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{16}$$

Οπότε η (1) γράφεται :

$$y = \frac{3}{2\left(\frac{3}{4}\right)}\left(x + \frac{3}{16}\right) \Leftrightarrow y = 2x + \frac{3}{8} \Leftrightarrow 8y = 16x + 3 \Leftrightarrow 16x - 8y + 3 = 0$$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι η $16x - 8y + 3 = 0$.

Κατηγορία - Μέθοδος 4

Πως βρίσκουμε τις εξισώσεις των εφαπτομένων που διέρχονται από γνωστό σημείο $P(x_0, y_0)$ προς την παραβολή με εξίσωση $y^2 = 2px$.

α΄ τρόπος

Γράφουμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο τυχαίο σημείο (x_1, y_1) της παραβολής που είναι $yy_1 = p(x + x_1)$ (1) και απαιτούμε να διέρχεται από το σημείο $P(x_0, y_0)$.

Τότε ισχύουν : $\begin{cases} y_0 y_1 = p(x_0 + x_1) \\ y_1^2 = 2px_1 \end{cases}$ αφού η (1) διέρχεται από το $P(x_0, y_0)$ και το (x_1, y_1) ανήκει στην παραβολή.

Από το σύστημα αυτό προσδιορίζουμε τα x_1, y_1, και συνεπώς την εξίσωση (1).

β΄ τρόπος

Για να προσδιορίσουμε τις εφαπτόμενες παραβολής που διέρχονται από γνωστό σημείο έστω το $A(x_0, y_0)$, θεωρούμε όλες τις ευθείες που διέρχονται απο αυτό το σημείο. Αυτές έχουν εξισώσεις

$$\varepsilon_1:\ y - y_0 = \lambda(x - x_0),\ \lambda \in R \quad \text{και} \quad \varepsilon_2:\ x = x_0$$

Εξετάζουμε αν το σύστημα $\{y^2 = 2px, \varepsilon_2\}$ έχει διπλή λύση. Αν αυτό συμβαίνει τότε η ε_2 είναι εφαπτομένη.Στη συνέχεια προσδιορίζουμε το λ ώστε το σύστημα $\{y^2 = 2px, \varepsilon_1\}$ να έχει διπλή λύση. Για αυτές τις τιμές του λ η ε_1 είναι εφαπτομένη.

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της παραβολής $C:\ y^2 = 8x$ οι οποίες διέρχονται από το σημείο $A(-2,3)$ και να αποδείξετε ότι είναι κάθετες μεταξύ τους.

Λύση

Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής μιας εφαπτομένης ε της C. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C στο M είναι:

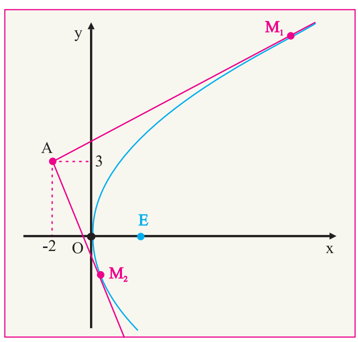
$$(\varepsilon):\ yy_1 = 4(x + x_1)$$

Όμως

$$A \in (\varepsilon) \Leftrightarrow 3y_1 = 4(-2 + x_1) \Leftrightarrow 3y_1 = -8 + 4x_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x_1 - 3y_1 = 8 \quad (1)$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι $M \in C \Leftrightarrow y_1^2 = 8x_1 \quad (2)$



Για να εντοπίσουμε τις συντεταγμένες των σημείων επαφής θα επιλύσουμε το σύστημα που σχηματίζεται από τις (1) και (2) :

$$\begin{cases} y_1^2 = 8x_1 \\ 4x_1 - 3y_1 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1^2 = 16 + 6y_1 \\ 4x_1 = 8 + 3y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1^2 - 6y_1 - 16 = 0 \\ 4x_1 = 8 + 3y_1 \end{cases}$$

Όμως $y_1^2 - 6y_1 - 16 = 0$, $\Delta = 100$ και $y_1 = 8$ ή $y_1 = -2$.

Αν $y_1 = 8$ έχουμε: $\begin{cases} y_1 = 8 \\ 4x_1 = 8 + 3y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 8 \\ 4x_1 = 8 + 3 \cdot 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 8 \\ x_1 = 8 \end{cases}$

Αν $y_1 = -2$ έχουμε : $\begin{cases} y_1 = -2 \\ 4x_1 = 8 + 3y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -2 \\ 4x_1 = 8 + 3(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -2 \\ x_1 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Άρα υπάρχουν δύο σημεία επαφής τα $M_1(8, 8)$ και $M_2\left(\dfrac{1}{2}, -2\right)$

Στο $M_1(8,8)$ η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $8y = 4(x+8) \Leftrightarrow y = \dfrac{x}{2} + 4$, δηλαδή

$\varepsilon_1 : y = \dfrac{x}{2} + 4$.

Στο $M_2\left(\dfrac{1}{2}, -2\right)$ η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $-2y = 4\left(x + \dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = -2x - 1$, δηλαδή $\varepsilon_2 : y = -2x - 1$

Γνωρίζουμε ότι : $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

Για την ε_1 έχουμε : $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$ και για την ε_2 έχουμε $\lambda_2 = -2$.

Άρα $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \dfrac{1}{2}(-2) = -1$ που σημαίνει ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες μεταξύ τους.

Παράδειγμα 2

Για την παραβολή με εξίσωση : $y^2 = 4x$ να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων που διέρχονται από το σημείο (- 1, 0) .

Λύση

Όλες οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο (-1, 0) έχουν εξισώσεις:

$$y = \lambda(x+1),\ \lambda \in R \quad \text{και} \quad x = -1$$

Η x = -1 φανερά δεν εφάπτεται της παραβολής.

Εφάπτεται η ευθεία $y = \lambda(x + 1)$ στην $y^2 = 4x$, αν και μόνο αν, το σύστημα: $\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = \lambda(x+1) \end{cases}$ έχει διπλή λύση, δηλαδή η δευτεροβάθμια εξίσωση:

$$\lambda^2x^2 + 2(\lambda^2 - 2)x + \lambda^2 = 0 \quad , \quad \lambda \neq 0$$

έχει διπλή ρίζα, δηλαδή διακρίνουσα $\Delta = 0$, που ισοδυναμεί με:

$$4\left(\lambda^2 - 2\right)^2 - 4\lambda^2 \cdot \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1$$

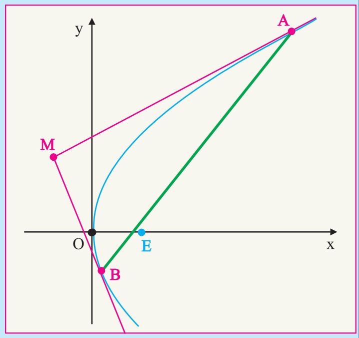
Για τις τιμές αυτές του λ προκύπτουν οι ευθείες με εξισώσεις: $y = x + 1$ και $y = -x - 1$

Πολική ευθεία

Η εξίσωση της χορδής που ορίζεται από τα σημεία επαφής των εφαπτομένων που φέρονται από σημείο Μ (x_0, y_0) προς την παραβολή $y^2 = 2px$ είναι $yy_0 = p(x + x_0)$.

Απόδειξη

Έστω Α (x_1, y_1) και Β (x_2, y_2) τα σημεία επαφής των εφαπτομένων ΜΑ και ΜΒ.



Οι εξισώσεις των ΜΑ και ΜΒ είναι:

ΜΑ: $yy_1 = p(x + x_1)$ και ΜΒ: $yy_2 = p(x + x_2)$

Επειδή διέρχονται από το σημείο Μ, οι συντεταγμένες του τις επαληθεύουν , δηλαδή ισχύουν :

$$y_0y_1 = p(x_0 + x_1) \quad (1)$$
$$y_0y_2 = p(x_0 + x_2) \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση της χορδής ΑΒ είναι:

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

διότι είναι πρώτου βαθμού ως προς x, y και σύμφωνα με τις (1), επαληθεύεται από τις συντεταγμένες των Α και Β.

Η ΑΒ λέγεται **πολική του σημείου Μ** ως πρός την παραβολή και το σημείο Μ λέγεται **πόλος της ΑΒ** ως προς την παραβολή.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$. Έστω ΑΒ χορδή της παραβολής, η οποία διέρχεται από την εστία Ε. Να δείξετε ότι το γινόμενο των αποστάσεων των Α,Β από τον άξονα x΄x παραμένει σταθερό καθώς η ΑΒ στρέφεται γύρω από την εστία.

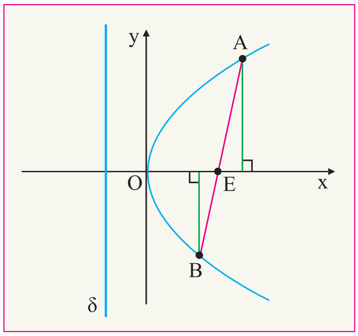
Λύση

Έστω $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Μας ζητείται να δείξουμε ότι $|y_1| \cdot |y_2| = \sigma\tau\alpha\theta.$ Αφού η ευθεία ΑΒ διέρχεται από την εστία Ε έχει εξίσωση: $y = \lambda\left(x - \frac{p}{2}\right)$ (1) ή $x = \frac{p}{2}$

Για $\lambda = 0$ δεν ορίζεται χορδή.

Από την επίλυση του συστήματος της (1) και της εξίσωσης της παραβολής προκύπτουν οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

Έτσι έχουμε: $\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = \lambda x - \dfrac{p\lambda}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$



$$\begin{cases} x = \dfrac{y^2}{2p} \\ y = \lambda \dfrac{y^2}{2p} - \dfrac{p\lambda}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y^2}{2p} \\ \lambda y^2 - 2py - p^2\lambda = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Η (2) είναι τριώνυμο ως προς y με διακρίνουσα $\Delta = 4p^2 - 4\lambda\left(-p^2\lambda\right) = 4p^2 + 4\lambda^2 p^2 > 0$.

Άρα έχει δύο ρίζες, έστω y_1, y_2 για τις οποίες ισχύει: $y_1 y_2 = \dfrac{-p^2\lambda}{\lambda} = -p^2$. Δηλαδή

$$|y_1 y_2| = |y_1||y_2| = \left|-p^2\right| = |p|^2 = p^2 = \text{σταθερό}$$

Αν $x = \dfrac{p}{2}$, τότε $(AE) = |y_1| = d(A,\delta) = p$ και $(BE) = |y_2| = d(B,\delta) = p$, οπότε :

$(AE)(BE) = |y_1||y_2| = p^2$.

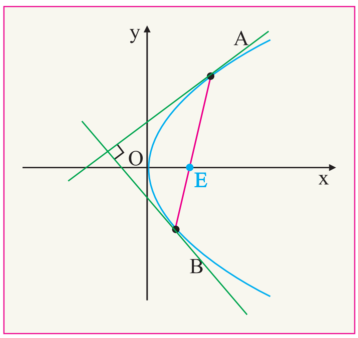
Άσκηση 2

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$ και χορδή ΑΒ η οποία διέρχεται από την εστία της Ε. Φέρνουμε τις εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία Α, Β. Να δείξετε ότι τέμνονται κάθετα.

Λύση

Αφού η ΑΒ διέρχεται από το Ε έχει εξίσωση $y = \lambda\left(x - \dfrac{p}{2}\right) \Leftrightarrow y = \lambda x - \dfrac{\lambda p}{2}$ ή $x = \dfrac{p}{2}$.

Έστω $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Η εφαπτομένη στο Α έχει εξίσωση $yy_1 = p(x + x_1)$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = \dfrac{p}{y_1}$. Ομοίως η εφαπτομένη στο Β έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = \dfrac{p}{y_2}$.Πρέπει να δείξουμε ότι:



$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \Leftrightarrow \frac{p}{y_1} \cdot \frac{p}{y_2} = -1 \Leftrightarrow p^2 = -y_1 \cdot y_2$$

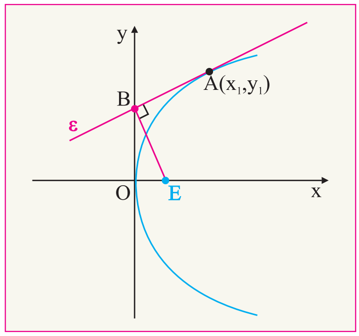
(που το αποδείξαμε στην προηγούμενη άσκηση).

Άσκηση 3

Να δείξετε ότι η προβολή της εστίας Ε, παραβολής με εξίσωση $y^2 = 2px$, επάνω σε τυχαία εφαπτομένη, είναι σημείο του άξονα y΄y.

Λύση

Έστω $A(x_1, y_1)$ τυχαίο σημείο παραβολής και (ε) η εφαπτομένη στο Α. Έστω ακόμη ότι Β είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης με τον άξονα y΄y.



Αρκεί να δείξουμε ότι $EB \perp AB \Leftrightarrow \lambda_{EB} \cdot \lambda_{AB} = -1$

Η εφαπτομένη στο Α έχει εξίσωση $yy_1 = p(x + x_1)$ (1)

Το Β είναι το σημείο τομής της με τον άξονα y΄y.

Επομένως από την (1) με $x = 0$ παίρνουμε:

$y = \dfrac{px_1}{y_1} = \dfrac{{y_1}^2}{2y_1} = \dfrac{y_1}{2}$ (αφού ${y_1}^2 = 2px_1$) δηλ. $B\left(0, \dfrac{y_1}{2}\right)$.

Είναι $\lambda_{AB} = \dfrac{y_1 - \dfrac{y_1}{2}}{x_1 - 0} = \dfrac{y_1}{2x_1} = \dfrac{y_1}{\dfrac{{y_1}^2}{p}} = \dfrac{p}{y_1}$ και $\lambda_{BE} = \dfrac{0 - \dfrac{y_1}{2}}{\dfrac{p}{2} - 0} = \dfrac{-y_1}{p}$

Αν $x_1 = y_1 = 0$ τότε το Α ταυτίζεται με το Ο. Άρα και πάλι η προβολή του Ε είναι σημείο του y΄y (η αρχή των αξόνων).

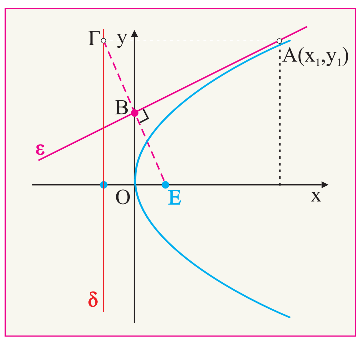
Έτσι: $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{BE} = \dfrac{p}{y_1} \cdot \left(-\dfrac{y_1}{p}\right) = -1$

Άσκηση 4

Δείξτε ότι το συμμετρικό της εστίας Ε, παραβολής με εξίσωση $y^2 = 2px$, ως προς τυχαία εφαπτομένη, είναι σημείο της διευθετούσας.

Λύση

Έστω $A(x_1, y_1)$, $x_1 \neq 0$ τυχαίο σημείο παραβολής. Όπως δείξαμε στην προηγούμενη άσκηση, το Β έχει συντεταγμένες $B\left(0, \dfrac{y_1}{2}\right)$. Επειδή το Γ είναι συμμετρικό του Ε ως προς την εφαπτομένη (ε), το Β είναι μέσον της ΓΕ.



Επομένως $\dfrac{x_\Gamma + x_E}{2} = x_B \Leftrightarrow x_\Gamma = 2x_B - x_E \Leftrightarrow$

$x_\Gamma = 0 - \dfrac{p}{2} \Leftrightarrow x_\Gamma = -\dfrac{p}{2}$.

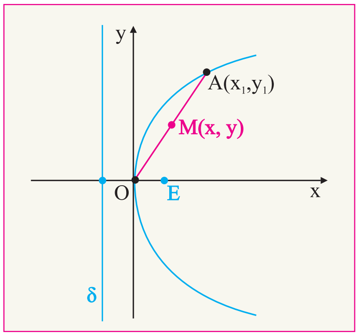
Επομένως το Γ ανήκει στη διευθετούσα. Αν $x_1 = y_1 = 0$ τότε το Α ταυτίζεται με το Ο.

Άσκηση 5

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$ και μεταβλητό σημείο Α αυτής. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Μ της χορδής του ευθ. τμήματος ΟΑ.

Λύση

Έστω $A(x_1, y_1)$. Επειδή το Μ είναι μέσον της ΟΑ είναι:



$$\begin{cases} x = \dfrac{0+x_1}{2} \\ y = \dfrac{0+y_1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x \\ y_1 = 2y \end{cases} \qquad (1)$$

Αφού το Α ανήκει στην παραβολή:

$y_1^{\,2} = 2px_1 \Leftrightarrow (2y)^2 = 2p(2x) \Leftrightarrow y^2 = px$

Επομένως το Μ κινείται επάνω στην παραβολή με εξίσωση $y^2 = px$

Άσκηση 6

Δίνονται τα σημεία $A(\eta\mu t, -1+\sigma\upsilon\nu 2t)$ $t \in R$. Να βρεθεί η γραμμή επάνω στην οποία κινούνται.

Λύση

Είναι $\left.\begin{array}{l} x = \eta\mu t \\ y = -1+\sigma\upsilon\nu 2t \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = \eta\mu t \\ y = -1+1-2\eta\mu^2 t \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = \eta\mu t \\ y = -2\eta\mu^2 t \end{array}\right\} \Leftrightarrow y = -2x^2 \Leftrightarrow x^2 = -\dfrac{1}{2}y$

Επομένως το Α κινείται επάνω στην παραβολή $x^2 = -\dfrac{1}{2}y$.

Άσκηση 7

Δίνεται η παραβολή $2y^2 = x$.

α. Να βρεθούν η εστία και η διευθετούσα της.

β. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου της $A(2,1)$ από την εστία Ε και να συγκριθεί με την απόσταση ΟΕ .

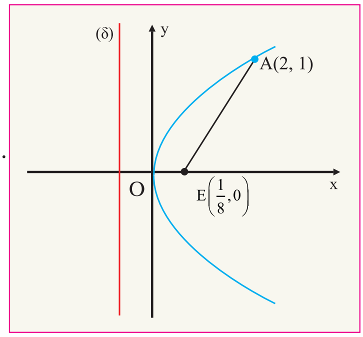
γ. Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραβολή το σημείο της με τη μικρότερη απόσταση από την εστία είναι η κορυφή της Ο.

δ. Να βρεθεί σημείο στην παραβολή $y^2 = 2px$, που να απέχει από την εστία Ε απόσταση διπλάσια της ΟΕ.

Λύση

α. Είναι $2y^2 = x \Leftrightarrow y^2 = \dfrac{1}{2}x$. Επομένως $2p = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow p = \dfrac{1}{4}$

Η εστία Ε έχει συντεταγμένες $\left(\frac{p}{2},0\right)$, δηλαδή $E\left(\frac{1}{8},0\right)$ και η διευθετούσα (δ) έχει εξίσωση $\delta: x=-\frac{p}{2}$, δηλαδή $\delta: x=-\frac{1}{8}$.



β. Είναι

$$(AE)=\sqrt{\left(2-\frac{1}{8}\right)^2+(1-0)^2}=\sqrt{\frac{15^2}{8^2}+1}=\sqrt{\frac{289}{64}}=\frac{17}{8}.$$

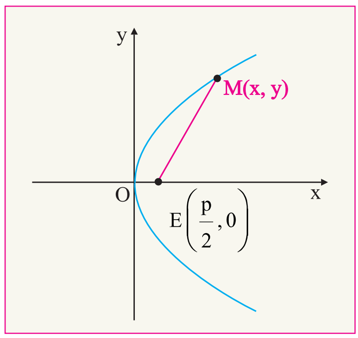
$OE=\frac{1}{8}$.

Παρατηρούμε ότι $AE>OE$.

γ. Έστω M(x, y) τυχαίο σημείο της παραβολής $y^2=2px$.

Είναι

$$(ME)=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2}$$



Επειδή το M ανήκει στην παραβολή $y^2=2px$ είναι

$$(ME)=\sqrt{x^2-px+\frac{p^2}{4}+2px}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}$$

Επομένως

$$d(M,E)=\left|x+\frac{p}{2}\right|$$

Επειδή το x και το p είναι ομόσημοι αριθμοί η απόσταση d γίνεται ελάχιστη όταν $x=0$, δηλαδή όταν το M ταυτίζεται με την κορυφή O.

2ος τρόπος

Αρκεί $(ME)\geq(OE)$, όπου $M(x,y)$ τυχαίο σημείο της παραβολής.

Είναι $(ME)\geq(OE)\Leftrightarrow\left|x+\frac{p}{2}\right|\geq\frac{|p|}{2}\Leftrightarrow x^2+\frac{p^2}{4}+px\geq\frac{p^2}{4}\Leftrightarrow x^2+\frac{y^2}{2}\geq 0$, που ισχύει.

δ. Έστω $B(x_B,y_B)$ σημείο της παραβολής $y^2=2px$, για το οποίο ισχύει $(BE)=2(OE)$.

Αφού ανήκει στην παραβολή θα ισχύει $y_B^2=2px_B$ (1)

Είναι $(OE)=\left|\frac{p}{2}\right|$. Επομένως $(BE)=|p|\Leftrightarrow\left|x_B+\frac{p}{2}\right|=|p|\Leftrightarrow\begin{cases}x_B+\frac{p}{2}=p\\ \text{η}\\ x_B+\frac{p}{2}=-p\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_B=\frac{p}{2}\\ x_B=-\frac{3p}{2}\end{cases}$

Η $x_B = -\frac{3p}{2}$ απορρίπτεται γιατί οι p, x είναι ομόσημοι.

Για $x_B = \frac{p}{2}$ από την (1) έχουμε $y_B{}^2 = 2p\frac{p}{2} \Leftrightarrow y_B{}^2 = p^2 \Leftrightarrow y_B = p$ ή $y_B = -p$.

Άρα υπάρχουν δύο σημεία τα: $B\left(\frac{p}{2}, p\right)$ και $B'\left(\frac{p}{2}, -p\right)$.

Άσκηση 8

Μια μεταβλητή ευθεία $y = \lambda x + \beta,\ \lambda \neq 0$ τέμνει την παραβολή $y^2 = 6x$ στα σημεία Α και Β. Να δείξετε, ότι οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ είναι $\left(\frac{3-\lambda\beta}{\lambda^2}, \frac{3}{\lambda}\right)$.

Λύση

Οι συντεταγμένες των σημείων τομής Α,Β της ευθείας και της παραβολής είναι οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεων τους.

Έχουμε: $$\left.\begin{array}{l} y = \lambda x + \beta \\ y^2 = 6x \end{array}\right\} \Leftrightarrow (\lambda x + \beta)^2 = 6x \Leftrightarrow \lambda^2 x^2 + 2(\lambda\beta - 3)x + \beta^2 = 0 \qquad (1)$$

Η (1) είναι τριώνυμο ως προς x. Οι λύσεις της είναι οι τετμημένες των Α και Β.
Ζητάμε την τετμημένη του σημείου Μ που είναι το ημιάθροισμα των τετμημένων των Α και Β.

Σύμφωνα με τους τύπους του Vieta έχουμε: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = -\frac{\lambda\beta - 3}{\lambda^2} = \frac{3-\lambda\beta}{\lambda^2}$.

Επειδή το Μ ανήκει στην ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι $y_M = \lambda\frac{3-\lambda\beta}{\lambda^2} + \beta \Leftrightarrow y_M = \frac{3}{\lambda}$

Επομένως $M\left(\frac{3-\lambda\beta}{\lambda^2}, \frac{3}{\lambda}\right)$.

Άσκηση 9

Να βρεθεί ο γ. τ. των μέσων των παραλλήλων χορδών της παραβολής $y^2 = 2px$, με συντελεστή διεύθυνσης λ

Λύση

Έστω $A(x_A, y_A), B(x_B.y_B)$ σημεία της παραβολής με $x_A \neq x_B$ τα οποία είναι άκρα της χορδής ΑΒ και $M(x_M, y_M)$ το μέσο του ΑΒ. Ισχύει: $y_A{}^2 = 2px_A$

$y_B{}^2 = 2px_B$

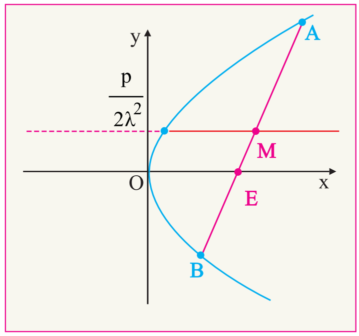
Αφαιρούμε κατά μέλη τις δύο παραπάνω σχέσεις και έχουμε:

$y_A{}^2 - y_B{}^2 = 2px_A - 2px_B \Leftrightarrow$

$(y_A + y_B)(y_A - y_B) = 2p(x_A - x_B) \Leftrightarrow$

$\frac{y_A + y_B}{2} \cdot \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = p \Leftrightarrow y_M \cdot \lambda = p$

Επομένως το μέσο Μ της χορδής κινείται επάνω στην ευθεία $y = \frac{p}{\lambda}$ (η οποία είναι παράλληλη στον άξονα x΄x).



Επειδή η ευθεία $y = \frac{p}{\lambda}$ τέμνει την παραβολή στο σημείο με τετμημένη $x = \frac{p}{2\lambda^2}$ (είναι η λύση του συστήματος των $y^2 = 2px$ και $y = \frac{p}{\lambda}$). Το Μ ανήκει στην ημιευθεία $y = \frac{p}{\lambda}$ με $x \geq \frac{p}{2\lambda^2}$. Αυτή είναι και ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος.

Άσκηση 10

Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 2px$. Θέτουμε $x_1 = \kappa x$ και $y_1 = \kappa y$, όπου $\kappa \neq 0$. Να αποδειχθεί ότι το σημείο (x_1, y_1) κινείται πάλι σε παραβολή.

Λύση

Έχουμε $\begin{cases} x_1 = \kappa x \\ y_1 = \kappa y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x_1}{\kappa} & (1) \\ y = \frac{y_1}{\kappa} & (2) \end{cases}$

Όμως $(x, y) \in C \Leftrightarrow y^2 = 2px \overset{(1),(2)}{\Leftrightarrow} \left(\frac{y_1}{\kappa}\right)^2 = 2p\left(\frac{x_1}{\kappa}\right) \Leftrightarrow \frac{y_1^2}{\kappa^2} = 2\frac{p}{k}x_1 \Leftrightarrow y_1^2 = 2p\kappa x_1$

Άρα το σημείο (x_1, y_1) ανήκει στην παραβολή με εξίσωση : C_1 : $y^2 = 2p\kappa x$.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Δίνεται σταθερό σημείο Α και μία ευθεία (ε), που δεν διέρχεται από το Α. Να αποδείξετε ότι, ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από το Α και εφάπτονται στην (ε), είναι παραβολή.

2. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=2$ και η παραβολή $y^2=8x$.

α. Να βρεθούν οι κοινές εφαπτόμενες του κύκλου και της παραβολής

β. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες.

(**Απ.: α.** $y=x+2$ και $y=-x-2$)

3. Ισόπλευρο τρίγωνο ΟΑΒ είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή $y^2=4px$, με κορυφή το Ο. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

(**Απ.:** $AB:\ x=12p$)

4. Να βρεθεί η εφαπτομένη της παραβολής $C:\ y^2=6x$, η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon:\ x-2y+2002=0$.

(**Απ.:** $x-2y+6=0$)

5. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής που διέρχεται από το σημείο $M(2,1)$.

(**Απ.:** $y^2=\frac{1}{2}x$ ή $x^2=4y$)

6. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της παραβολής με εξίσωση $x=\frac{1}{6}y^2$ οι οποίες άγονται από το σημείο $A(0,1)$

(**Απ.:** $x=0$ ή $y=\frac{3}{2}x+1$)

7. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2+(y-2)^2=3$ και η παραβολή με εξίσωση $y=\frac{1}{2}x^2$.

Να βρείτε τα κοινά τους σημεία.

(**Απ.:** $A(\sqrt{2},1)$ και $B(-\sqrt{2},1)$)

8. Να βρείτε την εστία Ε και τη διευθετούσα δ των παρακάτω παραβολών

α. $y=x^2$

β. $y=-2x^2$

(**Απ.: α.** $E\left(0,\frac{1}{4}\right)$ και $\delta:\ y=-\frac{1}{4}$, **β.** $E\left(0,-\frac{1}{8}\right)$ και $\delta:\ y=\frac{1}{8}$)

9. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $C:\ y^2=4x$ η οποία είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon:\ y=-2x+1$.

(**Απ.:** $y=\frac{1}{2}x+2$)

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Έστω ΑΒ χορδή της παραβολής με εξίσωση $y^2 = 2px$ **που διέρχεται από την εστία της** $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ **και Γ το σημείο επαφής της εφαπτομένης στην παραβολή, που είναι παράλληλη με την ΑΒ. Δείξτε ότι:** $(AB) = 4(E\Gamma)$

(**Υπ.:** Αν $\Gamma(x_0, y_0)$, $A(x_1, y_1)$, και $B(x_2, y_2)$, τότε:

$(E\Gamma) = x_0 + \frac{p}{2}$ και $(AB) = (EB) + (EA) = x_1 + x_2 + p$. Υπολογίστε τα x_0 και x_1 και x_2)