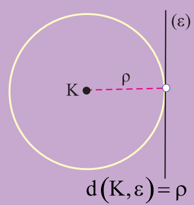
3^{o} Κεφάλαιο

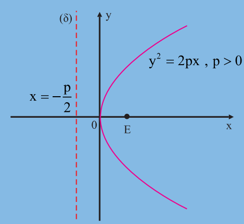
7^{o} μάθημα

Κύκλος



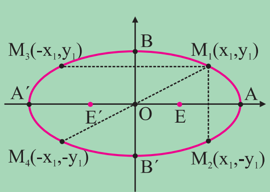
8^{o} μάθημα

Παραβολή



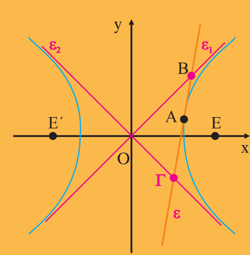
9^{o} μάθημα

Έλλειψη



10^{o} μάθημα

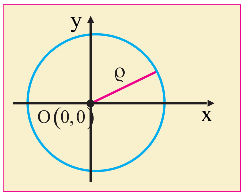
Υπερβολή



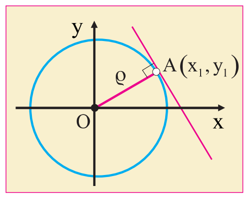
Μάθημα 7

Ο κύκλος

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

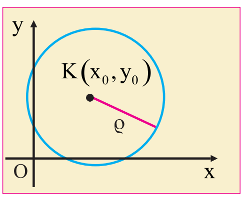


Εξίσωση κύκλου με κέντρο O(0 , 0) και ακτίνα ρ : $\boxed{x^2 + y^2 = \rho^2}$



Εξίσωση εφαπτομένης κύκλου με κέντρο O(0,0) και ακτίνα ρ στο σημείο Α(x_1 ,y_1):

$$\boxed{xx_1 + yy_1 = \rho^2}$$



Εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ:

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2}$$

Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ (1), Α, Β, $\Gamma \in R$

Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με

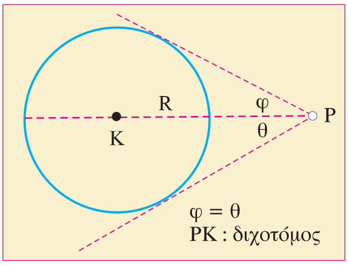
κέντρο το σημείο: $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$.

Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$ η (1) παριστάνει το σημείο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$.

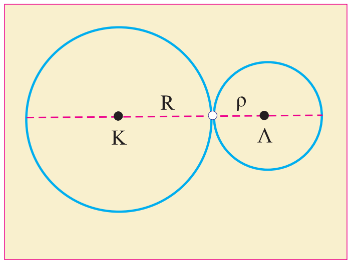
Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0$ η εξίσωση (1) είναι αδύνατη .

Βασικά στοιχεία από την Ευκλείδεια Γεωμετρία

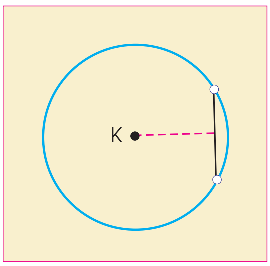
Για την επίλυση των ασκήσεων στον κύκλο είναι χρήσιμες οι παρακάτω προτάσεις:



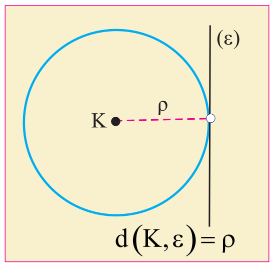
1. Τα εφαπτόμενα τμήματα από ένασημείο P προς έναν κύκλο, είναι ίσα και η διακεντρική ευθεία διχοτομεί τη γωνία τους.



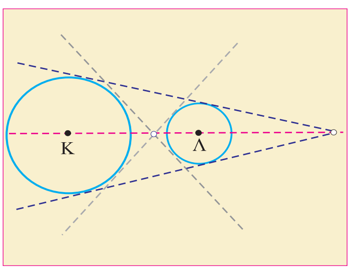
2. Αν δύο κύκλοι εφάπτονται, τότε τα κέντρα τους και το σημείο επαφής τους είναι συνευθειακά σημεία.



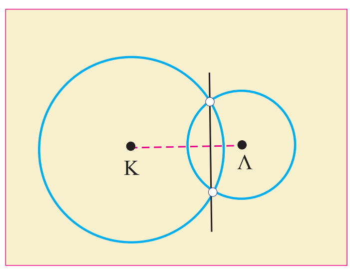
3. Το απόστημα είναι μεσοκάθετος της χορδής στην οποία αντιστοιχεί.



4. Μια ευθεία εφάπτεται σε έναν κύκλο, αν και μόνο αν, η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία αυτή είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου.

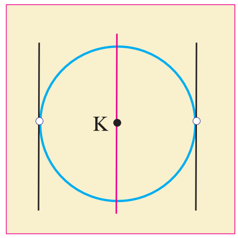


5. Οι κοινές εφαπτόμενες δύο κύκλων τέμνονται πάνω στην ευθεία της διακέντρου τους.



6. Η διάκεντρος δύο κύκλων, που τέμνονται είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.

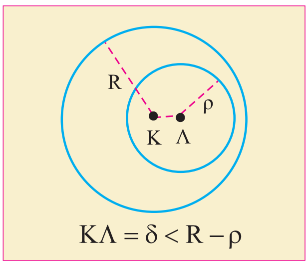
7. Όταν ένας κύκλος εφάπτεται σε δύο παράλληλες ευθείες, τότε το κέντρο του βρίσκεται στη μεσοπαράλληλο των δύο ευθειών.

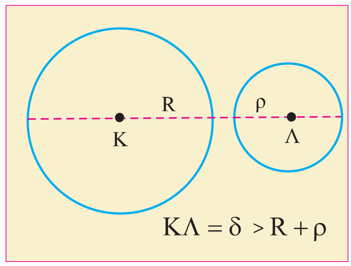


Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

Οι σχετικές θέσεις δύο κύκλων (Λ, ρ) και (Κ, R) εξαρτώνται από τη σχέση της διακέντρου δ (του ευθυγράμμου τμήματος, που ενώνει τα κέντρα των δύο κύκλων) με το άθροισμα ή τη διαφορά των ακτίνων τους. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Κύκλοι χωρίς κοινά σημεία

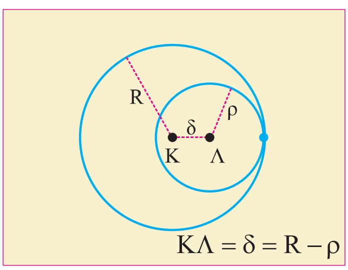


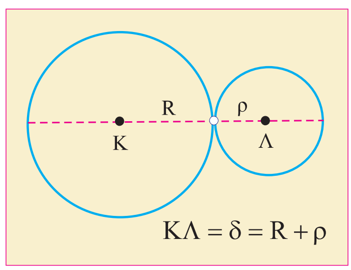


α. Ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του $(K, R) \Leftrightarrow \delta < R - \rho$

β. Ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εξωτερικό του $(K, R) \Leftrightarrow \delta > R + \rho$

2. Εφαπτόμενοι κύκλοι





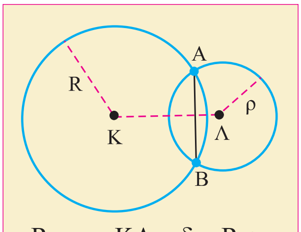
α. Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά δηλαδή έχουν ένα κοινό σημείο (σημείο επαφής). Ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (Κ, R), αν και μόνον αν $\delta = R - \rho$

β. Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά δηλαδή έχουν ένα κοινό σημείο (σημείο επαφής) και ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνον αν $\delta = R + \rho$.

3. Τεμνόμενοι κύκλοι

Οι κύκλοι τέμνονται δηλαδή έχουν δύο κοινά σημεία, αν και μόνον αν $R - \rho < \delta < R + \rho$

Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που ενώνει τα κοινά σημεία των δύο κύκλων, λέγεται **κοινή χορδή** των κύκλων.



$R - \rho < K\Lambda = \delta < R + \rho$

Μνημονικός κανόνας για την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου

Έστω ότι αναζητούμε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο $A(x_1, y_1)$. Εργαζόμαστε ως εξής:

α. Γράφουμε την εξίσωση του κύκλου: $x^2 + y^2 = \rho^2$ (1)

β. Επειδή $x^2 = x \cdot x$ και $y^2 = y \cdot y$ η (1) γράφεται: $x \cdot x + y \cdot y = \rho^2$

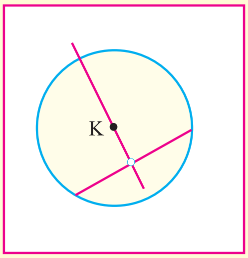
γ. Στο δεύτερο x και y θέτουμε x_1 και y_1 αντίστοιχα οπότε παίρνουμε:

$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = \rho^2$, που είναι και η ζητούμενη εξίσωση.

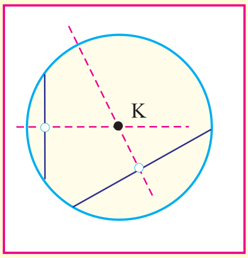
Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία - Μέθοδος 1

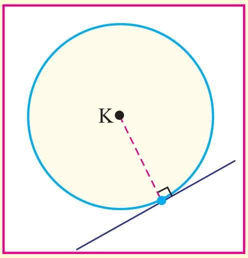
Για να προσδιορίσουμε την εξίσωση κύκλου πρέπει να βρούμε το κέντρο του, έστω $K(x_o, y_o)$ και την ακτίνα του έστω R. Τότε η εξίσωση του είναι $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
Το κέντρο αν δεν δίνεται μπορούμε να το προσδιορίσουμε, αν αναγνωρίσουμε δύο ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκεται. Τοτε το προσδιορίζουμε από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων αυτών των ευθειών. Η ακτίνα του κύκλου στη συνέχεια προσδιορίζεται ως η απόσταση του κέντρου Κ από ένα σημείο του κύκλου ή ως η απόσταση του Κ από μια ευθεία που εφάπτεται στον κύκλο.



1. Η μεσοκάθετος κάθε χορδής ενός κύκλου διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.



2. Το σημείο τομής των μεσοκαθέτων δύο, μη παράλληλων, χορδών του είναι το κέντρο του κύκλου.



3. Η εφαπτομένη ενός κύκλου σε ένα σημείο του είναι κάθετη στην ακτίνα του κύκλου που αντιστοιχεί στο σημείο αυτό.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου όταν:

α. Έχει κέντρο Ο(0, 0) και διέρχεται από το σημείο Α(1, 2)

β. Έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με Α(1,3) και Β(-3,5).

γ. Έχει κέντρο το σημείο (-2,1) και διέρχεται από το σημείο (-2,3).

δ. Έχει κέντρο Λ(4, 2) και εφάπτεται στην ευθεία (ε): $3x+4y-1=0$ **.**

ε. Διέρχεται από τα σημεία Α(1, 1), Β(0,0) Γ(3,0).

στ. Όταν έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία με εξίσωση (ε): y = 3x -7 και διέρχεται από τα σημεία Α (1,1) και Β(2,-1).

Λύση

α. Αφού έχει κέντρο Ο(0, 0) είναι της μορφής $x^2+y^2=\rho^2$. Το σημείο Α επαληθεύει την εξίσωση του κύκλου. Έτσι έχουμε $1^2+2^2=\rho^2 \Leftrightarrow \rho^2=5$. Οπότε η εξίσωση του κύκλου είναι: $C: x^2+y^2=5$.

β. Αφού το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου το μέσο του θα ταυτίζεται με το κέντρο του ζητούμενου κύκλου.

Εστω $K(x_0, y_0)$ το μέσο του ΑΒ, τότε: $\begin{cases} x_0=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{1-3}{2}=-1 \\ y_0=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{3+5}{2}=4 \end{cases}$

Οπότε το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο Κ(-1, 4).
Η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου θα είναι το μισό της διαμέτρου, δηλαδή το μισό της απόστασης ΑΒ. Άρα η ακτίνα του κύκλου είναι:

$$\rho=\frac{1}{2}(AB)=\frac{1}{2}\sqrt{(1+3)^2+(5-3)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{20}=\sqrt{5}.$$

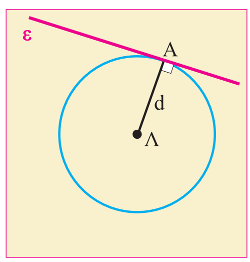
Άρα, ο ζητούμενος κύκλος έχει εξίσωση $C:\ (x+1)^2+(y-4)^2=5$.

γ. Όταν γνωρίζουμε το κέντρο του ζητούμενου κύκλου και ένα σημείο του τότε η μεταξύ τους απόσταση ισούται με την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή:

$$\rho=(\Lambda A)=\sqrt{(-2+2)^2+(3-1)^2}=\sqrt{0^2+2^2}=2$$

Η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου είναι 2 και η εξίσωση του κύκλου είναι:

$$C:\ (x+2)^2+(y-1)^2=2^2.$$

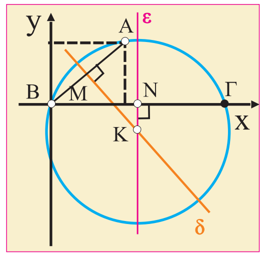


δ. Η εξίσωση του κύκλου είναι $(x-4)^2+(y-2)^2=\rho^2$.

Επειδή εφάπτεται στην (ε) πρέπει: $d(A,\varepsilon)=\rho$.

Έτσι: $\dfrac{|3\cdot 4+4\cdot 2-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\rho \Leftrightarrow \rho=\dfrac{19}{5}$. Άρα $C:(x-4)^2+(y-2)^2=\left(\dfrac{19}{5}\right)^2$

ε. α΄ τρόπος



Οι μεσοκάθετοι των χορδών ΑΒ και ΒΓ τέμνονται στο κέντρο του κύκλου. Βρίσκουμε αυτές τις μεσοκαθέτους (δ), (ε).

Έστω Μ μέσο του ΑΒ. Τότε $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

Επειδή $\lambda_{AB}=1$ ειναι $\lambda_\delta=-1$

Άρα $\delta: y-\frac{1}{2}=-1\left(x-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow y-\frac{1}{2}=-x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow x+y=1$

Έστω Ν μέσο ΒΓ. Τότε $N\left(\frac{3}{2},0\right)$ και επειδή $(\varepsilon)\perp x'x$ είναι: $x=\frac{3}{2}$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των (δ), (ε) για να βρούμε το κέντρο του κύκλου.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x=\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=1-\frac{3}{2} \\ x=\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=-\frac{1}{2} \\ x=\frac{3}{2}\end{cases} \text{ Αρα } K\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

Επιπλέον έχουμε $R=KB=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{-1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{2}}$

Επομένως η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου είναι: $C:\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$

β΄ τρόπος

Η εξίσωση του κύκλου είναι $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=R^2$ (1).

Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες των τριών σημείων στην (1) διαδοχικά. Προκύπτει έτσι ένα σύστημα 3x3 (τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους x_o, y_o, R).

$$(1-x_0)^2+(1-y_0)^2=R^2 \quad (2)$$

$$(0-x_0)^2+(0-y_0)^2=R^2 \quad (3)$$

$$(3-x_0)^2+(0-y_0)^2=R^2 \quad (4)$$

Από την (4) έχουμε $9-6x_0+x_0^2+y_0^2=R^2\overset{(3)}{\Leftrightarrow}6x_0-9=0\Leftrightarrow x_0=\frac{9}{6}\Leftrightarrow x_0=\frac{3}{2}$

Αντικαθιστούμε το x_o στις (2) και (4) και έχουμε: $\left(1-\frac{3}{2}\right)^2+(1-y_0)^2=R^2$

$\left(\frac{3}{2}\right)^2+y_0^2=R^2$

Αφαιρούμε κατά μέλη και έχουμε:

$$\frac{1}{4}+1-2y_0+y_0^2-\frac{9}{4}-y_0^2=0 \Leftrightarrow y_0=\frac{\frac{1}{4}+1-\frac{9}{4}}{2}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow y_0=-\frac{1}{2}$$

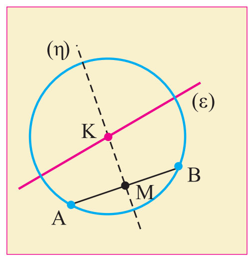
Αντικαθιστούμε τα x_0, y_0 στην (4) και βρίσκουμε το R.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=R^2 \Leftrightarrow R^2=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}=\frac{10}{4} \Leftrightarrow R^2=\frac{5}{2}$$

Επομένως ο ζητούμενος κύκλος έχει εξίσωση:

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$$

στ. Το κέντρο K(α,β) του ζητούμενου κύκλου είναι το σημείο τομής της (ε) και της μεσοκάθετης (η) στο AB. Η ακτίνα του είναι: $R=\sqrt{(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2}$ (1)



Μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι το σημείο: $M\left(\frac{3}{2},0\right)$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της AB είναι : $\lambda_{AB}=\frac{1+1}{1-2}=-2$,
οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας

(η): $\lambda_\eta=\frac{1}{2}$ (αφού (η) $\perp$ AB).

Από την ευθεία (η) γνωρίζουμε το σημείο M και το συντελεστή διεύθυνσης λ_η. Οπότε η εξίσωση της (η) είναι η: $y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)$ (2)

Η εξίσωση της (ε) είναι ε: $y=3x-7$ (3)

Από τη λύση του συστήματος των (2) και (3) βρίσκουμε: $x=\frac{5}{2}$ και $y=\frac{1}{2}$.

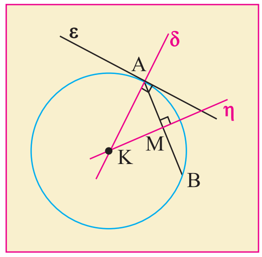
Άρα είναι $K\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$ και $R=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{5}{2}}$ (λόγω της (1)) .

και η εξίσωση του κύκλου είναι: $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$.

Παράδειγμα 2

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: x+y-5=0$ στο σημείο της A(6, -1) και διέρχεται από το σημείο B(6, 1).

Λύση



Θα βρούμε το κέντρο του κύκλου ως σημείο τομής δύο ευθειών. Της κάθετης στην εφαπτομένη ,έστω δ ,στο σημείο Α και της μεσοκάθετης (η) της χορδής ΑΒ.

Είναι $\lambda_\varepsilon = -1 \overset{\delta\perp\varepsilon}{\Leftrightarrow} \lambda_\delta = 1$. Επομένως δ: $y+1=x-6 \Leftrightarrow x-y=7$.

Θα βρούμε τώρα τη μεσοκάθετο (η) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.Έστω Μ μέσο ΑΒ τότε $M(6,0)$.

Παρατηρούμε ότι ΑΒ // y΄y, επομένως η μεσοκάθετος (η) της ΑΒ, είναι παράλληλη στον x΄x. Αφού διέρχεται από το σημείο Μ(6, 0) έχει εξίσωση y = 0 (είναι ο άξονας x΄x).

Λύνουμε το σύστημα των (δ) και (η): $\left.\begin{matrix} x-y=7 \\ y=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} x=7 \\ y=0 \end{matrix}$. Επομένως $K(7,0)$

Η ακτίνα R είναι ίση με $R=(KA)=\sqrt{(7-6)^2+(0+1)^2}=\sqrt{2}$.

Άρα η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου είναι $(x\text{-}7)^2+y^2=2$.

Κατηγορία - Μέθοδος 2

Για να προσδιορίσουμε την εξίσωση εφαπτομένης κύκλου με εξίσωση: $x^2+y^2=\rho^2$

1ος τρόπος

Γράφουμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο τυχαίο σημείο του κύκλου έστω (x_1, y_1) που είναι: $xx_1+yy_1=\rho^2$ (1)

Για να προσδιορίσουμε τα (x_1, y_1) (αν δεν δίνονται) πρέπει να φτιάξουμε σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους x_1, y_1. Η μια εξίσωση είναι πάντοτε $\eta: {x_1}^2+{y_1}^2=\rho^2$ αφού το σημείο (x_1, y_1) είναι το σημείο επαφής και η δεύτερη προκύπτει εύκολα από τα δεδομένα της άσκησης.

2ος τρόπος

Υποθέτουμε ότι η εφαπτομένη έχει εξίσωση $(\varepsilon): y=\lambda x+\beta$ και χρησιμοποιούμε τη σχέση $d(O,\varepsilon)=\rho$, όπου $O(0,0)$ και ρ η ακτίνα του κύκλου. Παίρνουμε έτσι μια εξίσωση με αγνώστους τα λ, β. (Συχνά ο συντελεστής λ προσδιορίζεται εύκολα από τα δεδομένα της άσκησης και έτσι από της παραπάνω εξίσωση προσδιορίζουμε το β.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2+y^2=4$ αν :

α. Το σημείο επαφής είναι το $A\left(1,\sqrt{3}\right)$.

β. Είναι παράλληλη στην ευθεία ε: $y=-x+2$.

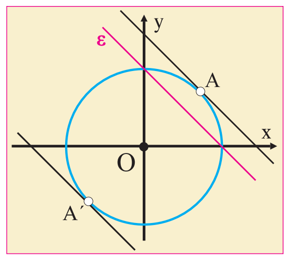
γ. Είναι κάθετη στην ευθεία ζ: $y=\frac{1}{2}x+1$.

δ. Διέρχεται από το σημείο Β(0, 4).

Λύση

α. Αφού μας δίνεται το σημείο επαφής, έχουμε $1\cdot x+\sqrt{3}\cdot y=4 \Leftrightarrow x+\sqrt{3}\,y=4$.

1ος τρόπος



β. Έστω $A(x_1,y_1)$ το σημείο επαφής. Η εφαπτομένη του κύκλου στο Α έχει εξίσωση $xx_1+yy_1=4$ επομένως έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon\varphi}=-\frac{x_1}{y_1}$. Επειδή είναι παράλληλη στην (ε) θα είναι $\lambda_{\varepsilon\varphi}=\lambda_{\varepsilon}=-1$. Άρα $-\frac{x_1}{y_1}=-1 \Leftrightarrow x_1=y_1$ (1)

Το σημείο $A(x_1,y_1)$ ανήκει στο κύκλο, δηλαδή ισχύει $x_1{}^2+y_1{}^2=4$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε $2x_1{}^2=4 \Leftrightarrow x_1{}^2=2 \Leftrightarrow x_1=\pm\sqrt{2}$ και $y_1=\pm\sqrt{2}$

Άρα $A\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ και $A'\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ οπότε :

$$\varepsilon\varphi_A:\sqrt{2}\,x+\sqrt{2}\,y=4 \quad \text{και} \quad \varepsilon\varphi_{A'}:-\sqrt{2}\,x-\sqrt{2}\,y=4.$$

2ος τρόπος

Η ζητούμενη εφαπτομένη είναι της μορφής: $y=-x+\beta \Leftrightarrow x+y-\beta=0$ (1). Εφάπτεται η (1) στον κύκλο, αν και μόνο αν:

$$d\left(O,(1)\right)=2 \Leftrightarrow \frac{|0+0-\beta|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2 \Leftrightarrow |\beta|=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \beta=\pm 2\sqrt{2}.$$

οπότε υπάρχουν δύο εφαπτόμενες του κύκλου παράλληλες προς την (ε) , οι ευθείες:

$x+y-2\sqrt{2}=0$ και $x+y+2\sqrt{2}=0$

γ. Έστω $A(x_1,y_1)$ το σημείο επαφής. Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα έχουμε

$\lambda_{\varepsilon\varphi}=-\frac{x_1}{y_1}$. Επειδή η εφαπτομένη είναι κάθετη στη (ζ) έχουμε: $\lambda_{\varepsilon\varphi}\cdot\lambda_{\zeta}=-1$

Είναι $\lambda_{\zeta}=\frac{1}{2}$, επομένως $\lambda_{\varepsilon\varphi}=-2$. Άρα $\frac{-x_1}{y_1}=-2 \Leftrightarrow x_1=2y_1$ (1)

Αφού το Α ανήκει στον κύκλο ισχύει: $x_1{}^2+y_1{}^2=4$ (2)

Από (1), (2) έχουμε $4y_1^2 + y_1^2 = 4 \Leftrightarrow 5y_1^2 = 4 \Leftrightarrow y_1^2 = \frac{4}{5} \Leftrightarrow y_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$

ή $y_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ τότε είναι αντίστοιχα και $x_1 = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ ή $x_1 = \frac{-4}{\sqrt{5}} = \frac{-4\sqrt{5}}{5}$.

Οπότε υπάρχουν δύο σημεία επαφής και επειδή x_1, y_1 ομόσημοι λόγω της (1) είναι τα:

$$A\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \quad \text{και} \quad A'\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

Οι εξισωσεις των εφαπτομένων σ' αυτά τα σημεία είναι:

$$\frac{4\sqrt{5}}{5}x + \frac{2\sqrt{5}}{5}y = 4 \quad \text{και} \quad \frac{-4\sqrt{5}}{5}x - \frac{2\sqrt{5}}{5}y = 4.$$

δ. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $xx_1 + yy_1 = 4$, όπου $A(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής.

Αφού διέρχεται από το $B(0,4)$ ισχύει: $0 \cdot x_1 + 4y_1 = 4 \Leftrightarrow y_1 = 1$ (1)

Επειδή το A ανήκει στον κύκλο, ισχύει: $x_1^2 + y_1^2 = 4$ (2)

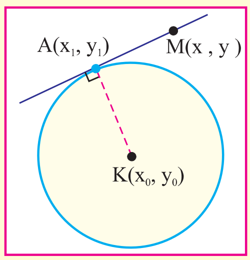
Από (1), (2) έχουμε $x_1^2 = 3 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{3}$ ή $x_1 = -\sqrt{3}$. Άρα υπάρχουν δύο σημεία επαφής τα $A(\sqrt{3}, 1)$ και $A(-\sqrt{3}, 1)$ οι εξισώσεις των εφαπτομένων σ' αυτά είναι:

$$\sqrt{3}x + y = 4 \quad \text{και} \quad -\sqrt{3}x + y = 4 \text{ αντίστοιχα.}$$

Κατηγορία - Μέθοδος 3

Πως βρίσκουμε την εξίσωση εφαπτομένης κύκλου, όταν το κέντρο του είναι το $K(x_0, y_0) \neq (0,0)$ σε γνωστό σημείο του έστω (x_1, y_1)

1ος τρόπος



Θεωρούμε τυχαίο σημείο $M(x, y)$ της εφαπτομένης.

Τότε επειδή $\overrightarrow{KA} \perp \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{KA} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ και

$\overrightarrow{AM} = (x - x_1, y - y_1)$ έχουμε:

$\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow (x - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1)(y_1 - y_0) = 0$ που είναι η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης.

2ος τρόπος

Επειδή γνωρίζουμε τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $K(x_0, y_0)$ γνωρίζουμε το συντελεστή διεύθυνσης της ΑΚ άρα και της εφαπτομένης, (αφού είναι κάθετη στην ΑΚ). Έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y - y_1 = \lambda_{AM}(x - x_1)$.Αν δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης της ΑΚ η εφαπτομένη έχει εξίσωση : $y = y_1$.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης

α. του κύκλου $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ **στο σημείο του A(4, 2)**

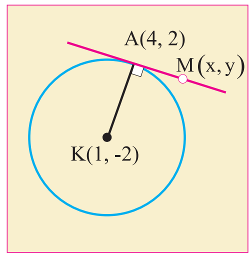
β. του κύκλου $x^2+y^2+4x-6y+1=0$ **στο σημείο του** $A\left(1,\ 3+\sqrt{3}\right)$

Λύση

α. α΄ τρόπος

Έστω Μ(x,y) τυχαίο σημείο της εφαπτομένης. Είναι $MA\perp AK$ οπότε

$$\lambda_{AK}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow\lambda_{MA}=-\frac{3}{4}$$



Γνωρίζουμε ένα σημείο της εφαπτομένης και το συντελεστή διεύθυνσης αυτής, επομένως η εξίσωση της είναι:

$$y-2=-\frac{3}{4}(x-4)\Leftrightarrow 3x+4y=20\,.$$

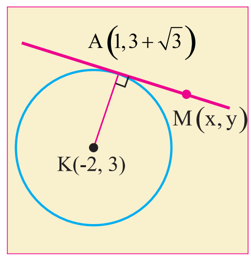
β΄ τρόπος

Για το σημείο Μ(x, y) της εφαπτομένης έχουμε:

$$\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{AM}=0\Leftrightarrow(4-1)\cdot(x-4)+\left(2-(-2)\right)(y-2)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(x-4)+4(y-2)=0\Leftrightarrow 3x+4y=20$$

που είναι η ζητούμενη εξίσωση.



β. Ο κύκλος έχει κέντρο Κ(-2, 3) οπότε

$$\lambda_{AK}=\frac{\sqrt{3}}{3}\overset{AM\perp AK}{\Leftrightarrow}\lambda_{AM}=-\sqrt{3}$$

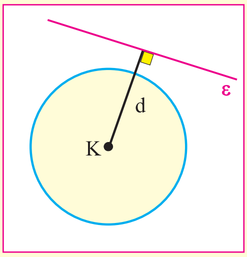
Επομένως η εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$y-\left(3+\sqrt{3}\right)=-\sqrt{3}\,(x-1)$$

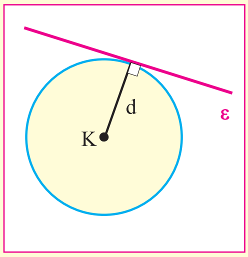
Κατηγορία - Μέθοδος 4

Για να δείξουμε ότι δοσμένη ευθεία εφάπτεται σε κύκλο, δείχνουμε ότι η απόσταση του κέντρου του κύκλου από αυτήν την ευθεία, ισούται με την ακτίνα. Με τη βοήθεια της απόστασης του κέντρου από την ευθεία προσδιορίζουμε και τη σχετική θέση ευθείας και κύκλου.

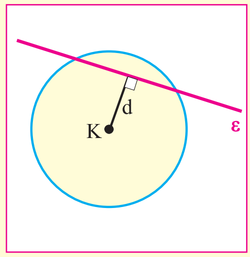
Συγκεκριμένα ισχύουν:



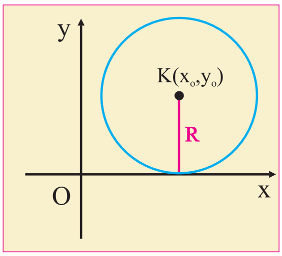
• αν $d(K,\varepsilon) > R$ η ευθεία είναι εξωτερική του κύκλου και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.



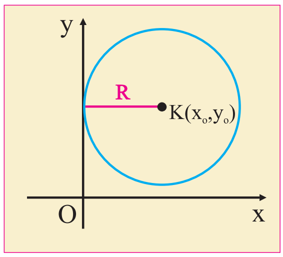
• αν $d(K,\varepsilon) = R$ η ευθεία εφάπτεται στον κύκλο.



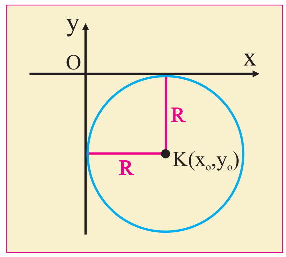
• αν $d(K,\varepsilon) < R$ η ευθεία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία.



• Όταν ένας κύκλος κέντρου $K(x_0, y_0)$ και ακτίνας R εφάπτεται στον άξονα x΄x ισχύει $|y_0| = R$



• Όταν ένας κύκλος κέντρου $K(x_0, y_0)$ και ακτίνας R εφάπτεται στον άξονα y΄y ισχύει $|x_0| = R$



• Όταν ένας κύκλος κέντρου $K(x_0, y_0)$ και ακτίνας R εφάπτεται και στους δύο άξονες τότε $|x_0| = |y_0| = R$

Παράδειγμα 1

Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου $(x+1)^2 + y^2 = 9$ και της ευθείας $(\varepsilon): 2x - y - 3 = 0$.

Λύση

Το κέντρο του κύκλου είναι το K(-1, 0) και η ακτίνα του R = 3. Οπότε

$$d(K,(\varepsilon)) = \frac{|2\cdot(-1)+(-1)\cdot 0-3|}{\sqrt{2^2+1}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} < 3 = R$$

Άρα η ευθεία και ο κύκλος τέμνονται σε δύο σημεία.

Παράδειγμα 2

Να δείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = x$ εφάπτεται στον κύκλο $x^2 + y^2 - 8x + 8 = 0$

Λύση

Το κέντρο του κύκλου είναι το K(4, 0) και η ακτίνα του $R = \dfrac{\sqrt{64-32}}{2} = 2\sqrt{2}$.

Είναι $d(K,\varepsilon) = \dfrac{|4-0|}{\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} = R$

Δηλαδή $d(K,\varepsilon) = R$, επομένως η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο.

Κατηγορία - Μέθοδος 5

Για να βρούμε τη σχετική θέση δύο κύκλων συγκρίνουμε το μήκος της διακέντρου με το άθροισμα ή τη διαφορά των ακτινών τους. Στη σελίδα 99 αναφέρονται οι διάφορες περιπτώσεις.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων C_1 και C_2 σε καθεμία απο τις :

α. $C_1 : x^2 + y^2 = 9$ και $C_2 : (x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$

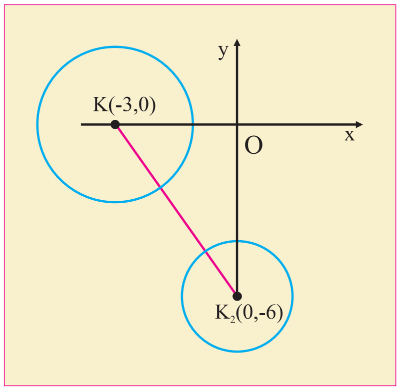
β. $C_1 : (x+3)^2 + y^2 = 4$ και $C_2 : x^2 + (y+6)^2 = 1$

Λύση

α. Ο C_1 έχει κέντρο $K_1(0,0)$ και ακτίνα $R_1 = 3$ και ο C_2 έχει κέντρο $K_2(-2,1)$ και ακτίνα $R_2 = 2$. Η απόσταση των δύο κέντρων είναι $d(K_1K_2) = \sqrt{5}$. Οπότε

$$R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$$

δηλαδή οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία.



β. Είναι $K_1(-3,0)$ $R_1 = 2$, $K_2(0,-6)$ $R_2 = 1$

(βλέπε σχήμα)

Επομένως $d(K_1K_2) = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$ και

$R_1 + R_2 = 3$. Οπότε $d > R_1 + R_2$ και οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία (είναι ξένοι μεταξύ τους) .

Κατηγορία - Μέθοδος 6

Παραμετρική εξίσωση κύκλου.

Για να δείξουμε ότι μια "οικογένεια" κύκλων διέρχεται από το ίδιο σημείο μετατρέπουμε την εξίσωση σε πολυώνυμο ως προς την παράμετρο και εξισώνουμε τους συντελεστές με το μηδέν.

Παράδειγμα 1

Θεωρούμε έναν πληθυσμό απο 1999 μυρμήγκια. Κάθε μυρμήγκι χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό n = 1, 2, 3, ..., 1999 και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση: $(x-1)^2 + y^2 = 2n(x+y-1)$ **(1)**

Να δείξετε ότι:

α. Η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του

β. Κατά την κίνηση τους όλα τα μυρμήγκια διέρχονται από ένα σταθερό σημείο Α (που είναι η φωλιά τους). Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Α;

γ. Οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας $\varepsilon: x+y-1=0$ **στο σημείο Α.**

(Θέμα Πανελληνίων).

Λύση

α. Μετασχηματίζουμε τη σχέση (1).

$$(1) \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2=2nx+2ny-2n \Leftrightarrow x^2+y^2-2x-2nx-2ny+2n+1=0 \Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2+x(-2-2n)+(-2n)y+2n+1=0$$

Η τελευταία σχέση είναι της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ η οποία παριστάνει κύκλο όταν $A^2+B^2-4\Gamma>0$. Έχουμε $A^2+B^2-4\Gamma=(-2-2n)^2+(-2n)^2-4(2n+1)=$

$$4+8n+4n^2+4n^2-8n-4=8n^2>0$$

Επομένως η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ δηλαδή $K(1+n,n)$ και ακτίνα

$$R=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2} \text{ δηλαδή } R=\frac{\sqrt{8n^2}}{2}=\sqrt{2}\,n \qquad (2)$$

β. Η (1) παριστάνει 1999 κύκλους αφού n = 1, 2, ..., 1999 και θέλουμε να δείξουμε ότι όλοι διέρχονται από το ίδιο σημείο.

i. Μετασχηματίζουμε την (1) σε πολυώνυμο ως προς την παράμετρο.

Έχουμε $(1) \Leftrightarrow 2n(x+y-1)-(x-1)^2-y^2=0$

ii. Εξισώνουμε τους συντελεστές με το 0 και υπολογίζουμε τα x, y:

$$\left.\begin{array}{l} x+y-1=0 \\ \text{και} \\ (x-1)^2+y^2=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x=1,\ y=0$$

Άρα η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλους που διέρχονται όλοι από το Α(1, 0) για κάθε τιμή του n.

γ. Για να δείξουμε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται σε όλους τους κύκλους, αρκεί να δείξουμε ότι το κέντρο οποιουδήποτε κύκλου απέχει από την ευθεία απόσταση ίση με την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή $d(K,\varepsilon)=R$. Αλλά $d(K,\varepsilon)=\frac{|1+n+n-1|}{\sqrt{2}}=\frac{2n}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,n$

και $R=\sqrt{2}\,n$ (λόγω της (2))

Επομένως όλοι οι κύκλοι που παριστάνει η (1) εφάπτονται στην ευθεία $x+y-1=0$.

Κατηγορία - Μέθοδος 7

Πώς βρίσκουμε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ενός κύκλου (c) με κέντρο Κ (x_0, y_0) και ακτίνα ρ που διέρχονται από σημείο P (x_1, y_1)

Γράφουμε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $P(x_1, y_1)$ που είναι: $y-y_1=\lambda(x-x_1), \lambda\in R$ (ε) και $x=x_1$ (κ)

Πρώτον εξετάζουμε αν η $x = x_1$ εφάπτεται στον κύκλο (c), δηλαδή αν το σύστημα των (c) και (κ) έχει διπλή λύση.

Δεύτερον απαιτούμε οι ευθείες (ε) να εφάπτονται στον (c), δηλαδή να ισχύει: d (K, ε)=ρ (απόσταση του κέντρου Κ από την ευθεία (ε)), οπότε προσδιορίζουμε το λ,και επομένως τις εφαπτόμενες (ε)).

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στον κύκλο $x^2+y^2=1$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,\sqrt{3})$.

Λύση

Έστω $(\varepsilon): y=\lambda x+k$ η ζητούμενη ευθεία, τότε επειδή το $A\in(\varepsilon)$, θα ισχύει: $\sqrt{3}=\lambda+k$ (1)

Πρέπει: $$d(O,\varepsilon)=1\Leftrightarrow\frac{|\lambda\cdot 0-0+k|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=1\Leftrightarrow k^2=1+\lambda^2 \ (2)$$

Η (2) γράφεται, (λόγω της (1)):

$$(\sqrt{3}-\lambda)^2=\lambda^2+1\Leftrightarrow -2\sqrt{3}\cdot\lambda=-2\Leftrightarrow\lambda=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Τότε είναι: $k=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, οπότε η εφαπτομένη του κύκλου είναι η:

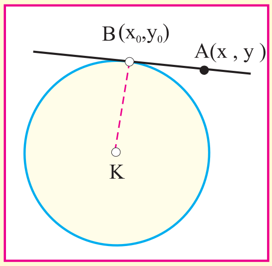
$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Η κάθετη ευθεία (η): x = 1 που διέρχεται από το Α και δεν περιγράφεται από την εξίσωση

$y = \lambda x + k$ πρέπει να εξετάζεται, μήπως είναι εφαπτομένη του κύκλου. Εδώ προφανώς η ευθεία $x = 1$ είναι εφαπτομένη, αφού η απόσταση του κέντρου του κύκλου από αυτήν ισούται με την ακτίνα του κύκλου.

Κατηγορία - Μέθοδος 8

Ένας άλλος τρόπος για να προσδιορίσουμε την εξίσωση εφαπτομένης κύκλου, που διέρχεται από γνωστό σημείο $A\,(x_1, y_1)$ είναι ο εξής:



Προσδιορίζουμε το σημείο επαφής $B\,(x_0, y_0)$ και στη συνέχεια γράφουμε την εξίσωση της AB. Για να προσδιορίσουμε τα x_0, y_0 χρειαζόμαστε δύο εξισώσεις. Η πρώτη προκύπτει αμέσως, αφού το B ανήκει στον κύκλο (c), άρα τα x_0, y_0 επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου (c). Η δεύτερη εξίσωση προκύπτει από τη σχέση:

$$\vec{KB}\cdot\vec{AB} = 0 \text{, αφού είναι } \vec{KB} \perp \vec{AB}.$$

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$, που διέρχεται από το σημείο $A(1,\sqrt{3})$.

Λύση

Για το σημείο επαφής $B\,(x_0, y_0)$ ισχύει: $x_0^2 + y_0^2 = 1 \quad (1)$

Είναι $\vec{KB} = (x_0, y_0)$ και $\vec{AB} = (x_0 - 1, y_0 - \sqrt{3})$

Επειδή $\vec{KB} \perp \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{KB}\cdot\vec{AB} = 0 \Leftrightarrow x_0\cdot(x_0 - 1) + y_0\cdot(y_0 - \sqrt{3}) = 0$

$\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - x_0 - \sqrt{3}\,y_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 + y_0\sqrt{3} = 1 \;(2) \quad (\; x_0^2 + y_0^2 = 1 \;).$

Με αντικατάσταση του x_0 από την (1) στην (2) παίρνουμε:

$$(1 - y_0\sqrt{3})^2 + y_0^2 = 1 \Leftrightarrow 4y_0^2 - 2\sqrt{3}\,y_0 = 0 \Leftrightarrow 2y_0(2y_0 - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow y_0 = 0 \text{ ή } y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Για $y_0 = 0$ είναι $x_0 = 1$ και για $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι $x_0 = -\frac{1}{2}$.

Έχουμε επομένως δύο σημεία επαφής, τα: $B\,(1, 0)$ και $B'\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Άρα, υπάρχουν δύο εφαπτόμενες που έχουν εξισώσεις:

$$AB: x = 1 \text{ και } AB': y - \sqrt{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}}{-\frac{1}{2} - 1}(x - 1) \Leftrightarrow 3y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}x - 3y + 2\sqrt{3} = 0.$$

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης λ της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων έτσι ώστε η ευθεία ε να τέμνει τον κύκλο.

Λύση

Επειδή η ευθεία ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα είναι της μορφής $\varepsilon:\ y = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x - y = 0$

Έχουμε:

$$x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 4x + 4\right) + y^2 = 3 \Leftrightarrow \left(x-2\right)^2 + y^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 .$$

Άρα το κέντρο του κύκλου C είναι το $K\left(2,0\right)$ και η ακτίνα του $\rho = \sqrt{3}$.

Για να τέμνει η ευθεία τον κύκλο θα πρέπει η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία να είναι μικρότερη από την ακτίνα ρ.

Δηλαδή: $d\left(K,\varepsilon\right) < \rho \Leftrightarrow \dfrac{\left|2\lambda - 0\right|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} < \sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{4\lambda^2}{\lambda^2 + 1} < 3 \Leftrightarrow 4\lambda^2 < 3\lambda^2 + 3 \Leftrightarrow \lambda^2 < 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|\lambda\right| < \sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} < \lambda < \sqrt{3}$$

Άρα οι ζητούμενες τιμές για το λ είναι $-\sqrt{3} < \lambda < \sqrt{3}$.

Άσκηση 2

Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων που εφάπτεται στην ευθεία ε: $x + y = 1$.

Λύση

Ο κύκλος έχει κέντρο του την αρχή των αξόνων,οπότε θα είναι της μορφής : $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Για να εφάπτεται η ευθεία ε στον κύκλο πρέπει η απόσταση του κέντρου Ο του κύκλου από την ευθεία να είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου. Δηλαδή:

$$d\left(O,\varepsilon\right) = \rho \Leftrightarrow \frac{\left|0 + 0 - 1\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \rho \Leftrightarrow \rho = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \rho = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση του κύκλου είναι $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}$.

Άσκηση 3

Να βρεθεί η εξίσωση της κοινής χορδής των κύκλων $C_A :\ \left(x-1\right)^2 + \left(y-3\right)^2 = 4$ και $C_B :\ \left(x-2\right)^2 + \left(y-1\right)^2 = 2$.

Λύση

Έστω $M\left(x,y\right)$ ένα κοινό σημείο των κύκλων με εξίσωση C_A και C_B. Αφού το Μ είναι κοινό σημείο των δύο κύκλων ,είναι προφανές ότι οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν τις εξισώσεις και των δύο κύκλων. Δηλαδή :

$$(x-1)^2+(y-3)^2=4 \quad \text{και} \quad (x-2)^2+(y-1)^2=2$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των δύο σχέσεων προκύπτει:

$$x^2-2x+1+y^2-6y+9-\left(x^2-4x+4+y^2-2y+1\right)=4-2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-6y+9-x^2+4x-4-y^2+2y-1=4-2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x-4y+5=2 \Leftrightarrow 2x-4y+3=0$$

Η σχέση όμως στην οποία καταλήξαμε παριστάνει ευθεία και επιπλέον επαληθεύεται από τις συντεταγμένες των κοινών σημείων των δύο κύκλων. Άρα η ζητούμενη εξίσωση της κοινής χορδής των δύο κύκλων είναι η ευθεία $2x-4y+3=0$.

Άσκηση 4

Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του παρακάτω κύκλου: $C:\ x^2+y^2-4x+6y+12=0$.

Λύση

Θα λύσουμε την άσκηση με δύο τρόπους:

α΄ τρόπος: *(με εφαρμογή των σχετικών τύπων)*

Η εξίσωση είναι της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$, $A, B, \Gamma \in R$

Άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\dfrac{A}{2},-\dfrac{B}{2}\right)$, δηλαδή $K(2,-3)$ και ακτίνα

$\rho=\dfrac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$ δηλαδή $\rho=1$.

β΄ τρόπος: *(με συμπλήρωση τετραγώνων)*

$$x^2+y^2-4x+6y+12=0 \Leftrightarrow \left(x^2-4x\right)+\left(y^2+6y\right)=-12 \Leftrightarrow$$
$$\left(x^2-2\cdot 2x+2^2\right)+\left(y^2+2\cdot 3y+3^2\right)=-12+2^2+3^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=1^2$$

Άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(2,-3)$ και ακτίνα $\rho=1$.

Άσκηση 5

Δείξτε ότι ο κύκλος $(c_1):\ x^2+y^2-2x-4y-4=0$ εφάπτεται εξωτερικά του κύκλου $(c_2):\ x^2+y^2-8x-12y+48=0$ και βρείτε το σημείο επαφής.

Λύση

Ο κύκλος (c_1) έχει κέντρο Κ (1, 2) και ακτίνα $\rho_1 = 3$. Ο κύκλος (c_2) έχει κέντρο Λ (4, 6) και ακτίνα $\rho_2 = 2$.

Είναι $\left|\overrightarrow{K\Lambda}\right| = \sqrt{(4-1)^2+(6-2)^2} = \sqrt{25} = 5$ και $\rho_1+\rho_2 = 2+3 = 5$, δηλαδή $\left|\overrightarrow{K\Lambda}\right| = \rho_1+\rho_2$ που σημαίνει ότι οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

Οι συντεταγμένες του σημείου επαφής, έστω A, προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-4y-4=0 & (1) \\ x^2+y^2-8x-12y+48=0 & (2) \end{cases}$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1), (2) παίρνουμε: $6x+8y-52=0 \Leftrightarrow 3x+4y-26=0 \quad (3)$

Η ευθεία με εξίσωση $3x + 4y - 26 = 0$ είναι η κοινή εφαπτομένη των δύο κύκλων.

Είναι $y = \dfrac{-3x+26}{4}$, οπότε από την (1) έχουμε:

$$x^2+\left(\frac{-3x+26}{4}\right)^2-2x-4\left(\frac{-3x+26}{4}\right)-4=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{14}{5}\right)^2=0 \Leftrightarrow x=\frac{14}{5}.$$

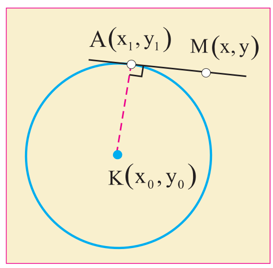
Για $x=\dfrac{14}{5}$ προκύπτει $y=\dfrac{22}{5}$. Άρα το σημείο επαφής είναι το $A\left(\dfrac{14}{5},\dfrac{22}{5}\right)$.

Άσκηση 6

Δίνεται ο κύκλος C με κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα R. Έστω $A(x_1,y_1)$ σημείο του κύκλου. Να δείξετε, ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου σε σημείο του A είναι:

$$(x-x_0)(x_1-x_0)+(y-y_0)(y_1-y_0)=R^2$$

Λύση



Έστω (ε) η εφαπτομένη στο A και $M(x,y)$ τυχαίο σημείο της.

Είναι $\overrightarrow{KA}=(x_1-x_0,y_1-y_0)$ και $\overrightarrow{AM}=(x-x_1,y-y_1)$

Επειδή $\overrightarrow{KA}\perp\overrightarrow{AM}$ ισχύει: $\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-x_1)(x_1-x_0)+(y-y_1)(y_1-y_0)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[(x-x_0)-(x_1-x_0)\right](x_1-x_0)+\left[(y-y_0)-(y_1-y_0)\right](y_1-y_0)=0$$

(προσθέσαμε και αφαιρέσαμε στην πρώτη παρένθεση το x_0 και στην τρίτη παρένθεση το y_0).

$$\Leftrightarrow (x-x_0)(x_1-x_0)-(x_1-x_0)^2+(y-y_0)(y_1-y_0)-(y_1-y_0)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-x_0)(x_1-x_0)+(y-y_0)(y_1-y_0)=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2 \qquad (1).$$

Ο κύκλος C έχει εξίσωση $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

Επειδή το A είναι σημείο του κύκλου, οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση του.

Έτσι $\quad (x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2=R^2 \qquad (3)$

Η (2) με βάση την (3) γράφεται:

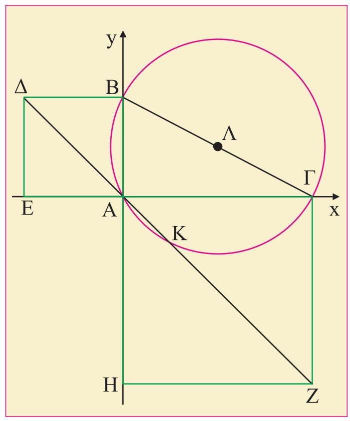
$(x-x_0)(x_1-x_0)+(y-y_0)(y_1-y_0)=R^2$, που είναι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του $A(x_1,y_1)$.

Άσκηση 7

Με πλευρές τις κάθετες πλευρές ορθογωνίου τριγώνου, κατασκευάζουμε έξω από αυτό τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Να δείξετε ότι:
α. Τα σημεία Α, Δ, Ζ είναι συνευθειακά
β. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ διέρχεται από το μέσον της ΔΖ.

Λύση

Όταν έχουμε ένα γεωμετρικό πρόβλημα στο οποίο δε μας δίνονται συντεταγμένες σημείων, ούτε εξισώσεις ευθειών ή άλλων γραμμών, συνηθίζουμε να εργαζόμαστε ως εξής:
I. Εκλέγουμε σύστημα αξόνων θεωρώντας ως αρχή ένα σημείο του σχήματος μας.
II. Θέτουμε συντεταγμένες στα σημεία του σχήματος
III. Τα δεδομένα της άσκησης καθώς και τα ζητούμενα τα εκράζουμε συναρτήσει αυτών των συντεταγμένων.



Έτσι στο συγκεκριμένο πρόβλημα επιλέγουμε οι άξονες να περιέχουν τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου και η αρχή των αξόνων να είναι η κορυφή Α. (όπως στο σχήμα).
Στο σημείο Γδίνουμε συντεταγμένες (γ, 0), αφού ανήκει στον άξονα x΄x. Δεδομένου ότι το ΑΓΖΗ είναι τετράγωνο, τα σημεία Ζ και Η έχουν συντεταγμένες (γ, -γ) και (0, -γ) αντίστοιχα.
Με την ίδια λογική εργαζόμενοι, δίνουμε συντεταγμένες και στα σημεία Β, Δ, Ε και έχουμε $B(0,\beta)$, $E(-\beta,0)$ και $\Delta(-\beta,\beta)$.

α. Τα σημεία Ζ και Δ ανήκουν στην ευθεία $y=-x$ (αφού επαληθεύουν την εξίσωσή της). Αυτή ως γνωστόν διέρχεται από την αρχή Α των αξόνων. Επομένως τα σημεία Ζ, Α και Δ είναι συνευθειακά.

β. Το Κ είναι μέσον του ΔΖ, επομένως έχει συντεταγμένες $\left(\dfrac{\gamma-\beta}{2},\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)$.

Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ έχει κέντρο Λ το μέσο της υποτείνουσας ΒΓ (αφού η γωνία Α είναι ορθή και είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο, γνωρίζουμε ότι βαίνει σε ημικύκλιο).

Έχουμε $\Lambda\left(\dfrac{\gamma}{2},\dfrac{\beta}{2}\right)$.

Η ακτίνα του κύκλου αυτού είναι $R=\dfrac{(B\Gamma)}{2}=\dfrac{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}{2}$.

Επομένως η εξίσωση του κύκλου είναι: $C: \left(x-\frac{\gamma}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\beta}{2}\right)^2=\frac{\beta^2+\gamma^2}{4}$

Θα εξετάσουμε αν το μέσον της ΔΖ, το Κ, επαληθεύει την εξίσωση του κύκλου.

Έχουμε: $\left(\frac{\gamma-\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta-\gamma}{2}-\frac{\beta}{2}\right)^2=\frac{\beta^2+\gamma^2}{4} \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{4}+\frac{\gamma^2}{4}=\frac{\beta^2+\gamma^2}{4}$ που ισχύει.

Επομένως ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ διέρχεται από το μέσον της ΔΖ.

Άσκηση 8

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τα σταθερά σημεία $A(2,0)$ και $B(-2,0)$ είναι C (σταθερός) και διάφορος της μονάδας.

Λύση

Έστω $M(x,y)$ τυχαίο σημείο του γεωμετρικού τόπου.

Είναι $\frac{d(M,A)}{d(M,B)}=C \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}{\sqrt{(x+2)^2+y^2}}=C \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=C^2\left[(x+2)^2+y^2\right] \Leftrightarrow$

$x^2-4x+4+y^2=C^2x^2+4C^2x+4C^2+C^2y^2 \Leftrightarrow$

$C^2x^2-x^2+C^2y^2-y^2+4C^2x+4x+4C^2-4=0 \Leftrightarrow$

$(C^2-1)x^2+(C^2-1)y^2+(4C^2+4)x+4C^2-4=0$.

Επειδή $C^2-1\neq 0$ $(C\neq 1)$, διαιρούμε και τα δύο μέλη με C^2-1 και έχουμε:

$$x^2+y^2+\frac{4C^2+4}{C^2-1}x+\frac{4(C^2-1)}{C^2-1}=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{4(C^2+1)}{C^2-1}x+4=0 \quad (1)$$

Η τελευταία εξίσωση είναι της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ και παριστάνει κύκλο όταν $A^2+B^2-4\Gamma>0$.

Είναι $A^2+B^2-4\Gamma=\frac{16(C^2+1)^2}{(C^2-1)^2}-16=\frac{16(C^2+1)^2-16(C^2-1)^2}{(C^2-1)^2}$

$$=\frac{16(C^4+2C^2+1-C^4+2C^2-1)}{(C^2-1)^2}=\frac{16\cdot 4C^2}{(C^2-1)^2}>0$$

Επομένως η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=\left(-\frac{2\left(C^2+1\right)}{C^2-1},0\right)$ και ακτίνα $R=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{4C}{C^2-1}$.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $C:\ x^2+y^2=4$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $\delta:\ x+y=0$.

(**Απ.:** $x+y-2\sqrt{2}=0$ και $x+y+2\sqrt{2}=0$)

2. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, ο οποίος είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο που σχηματίζει η ευθεία $\varepsilon: x+y-6=0$ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(**Απ.:** $\left(x-6+3\sqrt{2}\right)^2+\left(y-6+3\sqrt{2}\right)^2=\left(6-3\sqrt{2}\right)^2$)

3. Να αποδειχθεί ότι οι κύκλοι $C_1:\ (x-2)^2+y^2=4$ και $C_2:\ x^2-2x+y^2=0$ εφάπτονται εσωτερικά.

4. Να βρεθεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ομόκεντροι οι κύκλοι:
$C_1:\ x^2+y^2+A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$ και $C_2:\ x^2+y^2+A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$.

(**Απ.:** $\left(\begin{cases}A_1=A_2\\B_1=B_2\end{cases}\right)$)

5. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $C:\ x^2+y^2+\lambda x=0$ παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in R^*$. Να βρεθεί η γραμμή πάνω στην οποία βρίσκονται τα κέντρα αυτών των κύκλων.

(**Απ.:** $y=0$)

6. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $K(-3,1)$ και εφάπτεται στηνευθεία $\varepsilon:\ 4x-3y+5=0$.

(**Απ.:** $(x+3)^2+(y-1)^2=2^2$)

7. Δίνεται ο κύκλος $C:\ (x-1)^2+y^2=4$. Να βρείτε τιςεξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο $M(3,3)$.

(**Απ.:** $x=3$ και $5x-12y+21=0$)

8. Να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων, οι οποίοι εφάπτονται στον κύκλο με εξίσωση $x^2+y^2=25$ στο σημείο $M(3,4)$ και έχουν ακτίνα 10.

(**Απ.:** $(x-9)^2+(y-12)^2=100$ και $(x+3)^2+(y+4)^2=100$)

9. Από το σημείο $M(3,2)$ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ, ΜΒ προς τον κύκλο $C: x^2+y^2=2$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ΑΒ.

(**Απ.:** $3x+2y=2$)

10. Να βρεθεί η εξίσωση της κοινής χορδής δύο κύκλων με κέντρα $K(1,2)$, $\Lambda(3,1)$ και ακτίνες 3 και 2 αντίστοιχα.

(**Απ.:** $2x-y-5=0$)

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

α. Να εξετάσετε αν η οικογένεια των ευθειών:

$$(\varepsilon): (\lambda^2-1)x+2\lambda y-3\lambda^2-4\lambda-1=0$$

διέρχεται από το ίδιο σημείο του επιπέδου για κάθε $\lambda \in R$.

β. Να καθορίσετε το μέρος του επιπέδου από κάθε σημείο του οποίου διέρχονται δύο ευθείες της οικογένειας (ε).

γ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου που είναι τέτοια ώστε οι ευθείες (ε) που διέρχονται από το Μ να τέμνονται κάθετα.

(**Υπ.: β.** Να μετασχηματίσετε την (1) σε εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς λ. Ζητάμε τα ζεύγη (x,y) για τα οποία η δευτεροβάθμια έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ. Θεωρείστε δύο ευθείες από τις (1) για $\lambda=\lambda_1$, $\lambda=\lambda_2$ και χρησιμοποιείστε ότι το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των θεωρούμενων ευθειών είναι ίσο με -1)