Μάθημα 6

Απόσταση σημείου από ευθεία
Εμβαδόν τριγώνου

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

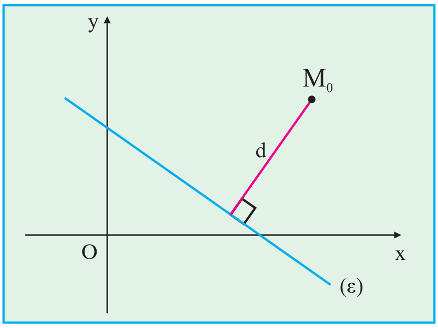
Απόσταση σημείου απο ευθεία

1. Η απόσταση d ενός σημείου $M_0(x_0, y_0)$ από μία ευθεία με εξίσωση:

$$Ax + By + \Gamma = 0\,,\ |A| + |B| \neq 0$$

δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{d = d(M_0, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$



π.χ. Η απόσταση του σημείου Μ (2, –3) από την ευθεία $(\varepsilon): 3x + 4y - 9 = 0$ είναι ίση με:

$$d = d(M, \varepsilon) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) - 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-15|}{5} = 3$$

Εμβαδόν τριγώνου

2. Αν είναι γνωστές οι κορυφές τριγώνου ΑΒΓ, το εμβαδόν του δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})\right|}$$

όπου $\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})$ είναι η ορίζουσα των συντεταγμένων των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$.

Ισοδύναμα ισχύει $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det(\vec{BA}, \vec{B\Gamma})\right| = \frac{1}{2}\left|\det(\vec{\Gamma A}, \vec{\Gamma B})\right|$.

π.χ. Αν Α (-1, 2), Β (1, 4) και Γ (2, 6) είναι οι κορυφές ενός τριγώνου ΑΒΓ, τότε: $\vec{AB} = (2, 2)$

και $\vec{A\Gamma} = (3, 4)$, οπότε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο

είναι: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det(\overline{AB}, \overline{A\Gamma})\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ τ.μ

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία - Μέθοδος 1

Όταν ζητείται να βρεθεί το σύνολο των σημείων Μ που ικανοποιούν κάποια ιδιότητα ή να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ, τότε: θεωρούμε Μ (x, y) το τυχαίο σημείο του τόπου και από τα δεδομένα της άσκησης προσπαθούμε να βρούμε μία εξίσωση μεταξύ των συντεταγμένων x και y.

Παράδειγμα 1

Δίνονται τα σημεία Α (-2, 1) και Β (4, 6). Να βρείτε το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία το εμβαδόν του τριγώνου ΜΑΒ είναι ίσο με 2 τ.μ.

Λύση

Έστω Μ (x, y) τυχαίο σημείο για το οποίο ισχύει (ΜΑΒ) = 2. Το εμβαδόν του τριγώνου (ΜΑΒ) είναι ίσο με:

$$(\text{MAB}) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{\text{MA}}, \overrightarrow{\text{MB}})\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -2-x & 1-y \\ 4-x & 6-y \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|(2+x)(y-6)-(4-x)(1-y)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|2y-12+xy-6x-4+4y+x-xy\right| = \frac{1}{2}\left|-5x+6y-16\right|.$$

$$(\text{MAB}) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|-5x+6y-16\right| = 2 \Leftrightarrow \left|-5x+6y-16\right| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} -5x+6y-16=4 \\ \text{ή} \\ -5x+6y-16=-4 \end{cases}$$

Άρα το ζητούμενο σύνολο των σημείων Μ, είναι τα σημεία των ευθειών :

$$-5x+6y-20=0 \quad \text{και} \quad -5x+6y-12=0.$$

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών με εξισώσεις

$$(\varepsilon_1): 3x+4y+12=0 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2): 3x+4y+22=0.$$

Λύση

Έστω Μ (x, y) τυχαίο σημείο της μεσοπαράλληλης (ε). Τότε:

$$d(M,\varepsilon_1) = d(M,\varepsilon_2) \Leftrightarrow \frac{|3x+4y+12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|3x+4y+22|}{\sqrt{3^2+4^2}} \Leftrightarrow |3x+4y+12| = |3x+4y+22| \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x+4y+12=3x+4y+22 & (\text{αδύνατη}) \\ 3x+4y+12=-3x-4y-22 \end{cases} \Leftrightarrow 6x+8y+34=0 \Leftrightarrow 3x+4y+17=0$$

Επομένως η εξίσωση της μεσοπαράλληλης είναι $3x+4y+17=0$

Κατηγορία - Μέθοδος 2

Η εύρεση των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν δύο ευθείες, ανάγεται στην εύρεση του γεωμετρικού τόπου των σημείων, που ισαπέχουν από τις δύο ευθείες, αφού η διχοτόμος γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων, που ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν οι εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες με εξισώσεις: $x + y - 2 = 0$ και $3x - 3y - 1 = 0$.

Λύση

Έστω Μ (x, y) τυχαίο σημείο της διχοτόμου. Τότε: $d(M,\varepsilon_1) = d(M,\varepsilon_2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{|x+y-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|3x-3y-1|}{\sqrt{3^2+3^2}} \Leftrightarrow 3\cdot|x+y-2| = |3x-3y-1| \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+3y-6 = 3x-3y-1 \\ 3x+3y-6 = -3x+3y+1 \end{cases}$$

Προκύπτουν επομένως οι εξισώσεις των ευθειών: $y = \frac{5}{6}$ και $x = \frac{7}{6}$.

Κατηγορία - Μέθοδος 3

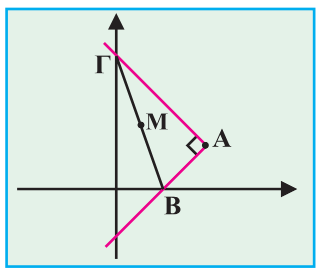
Πολλές φορές δεν είναι προφανής η ιδιότητα που ικανοποιούν τα σημεία Μ των οποίων ζητείται ο γεωμετρικός τόπος.Γι' αυτό θέτουμε παραμέτρους στα μεταβλητά σημεία του σχήματος.Αν χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε περισσότερες από μία παραμέτρους, τότε για να μπορέσουμε να κάνουμε την απαλοιφή αυτών, πρέπει να βρίσκουμε μία εξίσωση επιπλέον από τις παραμέτρους που χρησιμοποιήσαμε.

Παράδειγμα 1

Ορθή γωνία στρέφεται γύρω από το σημείο Α (2, 1) και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες στα σημεία Β, Γ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου του ΒΓ.

Λύση

Έστω M(x, y) σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου. Έστω Β (β, 0) και Γ (0, γ) τα σημεία τομής με τους άξονες. Σύμφωνα με όσα αναφέραμε προηγουμένως, θα πρέπει να βρούμε τρεις εξισώσεις για να μπορέσουμε να κάνουμε την απαλοιφή των παραμέτρων β και γ. Επειδή το Μ είναι μέσο τουΒΓ έχουμε:



$$\frac{\beta+0}{2} = x \quad \text{και} \quad \frac{\gamma+0}{2} = y, \text{ άρα } \beta = 2x \text{ και } \gamma = 2y \quad (1)$$

Ακόμη είναι:

$$\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma} = 0 \Leftrightarrow (\beta-2)\cdot(-2)+(-1)\cdot(\gamma-1) = 0 \Leftrightarrow 2\beta+\gamma = 5 \quad (2).$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε: $2\cdot(2x)+2y = 5 \Leftrightarrow 4x+2y = 5$ που είναι η εξίσωση του γεωμετρικού τόπου του σημείου Μ. Επειδή το Μ βρίσκεται πάντα στο 1^o τεταρτημόριο, ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Μ, θα είναι το τμήμα της ευθείας $4x+2y = 5$, που βρίσκεται στο τεταρτημόριο αυτό. Είναι λοιπόν, ο γεωμετρικός τόπος του Μ το τμήμα της ευθείας:

$4x+2y=5$ με $0 \le x \le \frac{5}{4}$ και $0 \le y \le \frac{5}{2}$.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από την αρχή των αξόνων και απέχουν από το σημείο Α (2, 1) απόσταση ίση με 1.

Λύση

Όλες οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή Ο (0, 0) έχουν εξισώσεις: $\begin{cases} y=\lambda x,\ \lambda \in R \\ \quad ή \\ x=0 \end{cases}$

Η x = 0 δεν είναι δεκτή , διότι η απόσταση του σημείου Α (2, 1) από την x = 0 (δηλ. τον άξονα $y'y$) είναι 2.

Θα εξετάσουμε αν υπάρχει $\lambda \in R$ τέτοιος ώστε: $d(A,\varepsilon)=1$.

Έχουμε: $d(A,\varepsilon)=1 \Leftrightarrow \frac{|2\lambda-1|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=1 \Leftrightarrow (2\lambda-1)^2=\lambda^2+1 \Leftrightarrow 3\lambda^2-4\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=0,\ \lambda=\frac{4}{3}$

Για $\lambda=0$, παίρνουμε την ευθεία $y=0$ και για $\lambda=\frac{4}{3}$, παίρνουμε την ευθεία $y=\frac{4}{3}x$, οι οποίες είναι οι εξισώσεις των ζητούμενων ευθειών .

Άσκηση 2

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από τις ευθείες: $(\varepsilon_1): 3x+4y+5=0$ και $(\varepsilon_2): 4x+3y-3=0$.

Λύση

Έστω Μ(x, y) σημείο τέτοιο ώστε: $d(M,\varepsilon_1)=d(M,\varepsilon_2)$ (1). Έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{|3x+4y+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|4x+3y-3|}{\sqrt{4^2+3^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y+5=4x+3y-3 \\ 3x+4y+5=-(4x+3y-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-8=0 \\ 7x+7y+2=0 \end{cases}$$

Επομένως, τα σημεία Μ που ικανοποιούν την (1) βρίσκονται στις παραπάνω ευθείες.

Παρατήρηση:

Οι ευθείες που δόθηκαν δεν είναι παράλληλες, άρα τέμνονται και είναι γνωστό από την Ευκλείδεια γεωμετρία ,ότι τα σημεία του επιπέδου που ισαπέχουν από τις πλευρές μιας γωνίας είναι τα σημεία της εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας.

Άσκηση 3

Να βρεθούν τα σημεία της ευθείας $x+y-1=0$ που απέχουν από την ευθεία με εξίσωση (ε): $3x+4y-2=0$ απόσταση ίση με 2.

Λύση

Έστω Μ (x, y) σημείο της ευθείας $x+y-1=0$ (1)

Πρέπει: $d(M,\varepsilon)=2 \Leftrightarrow \dfrac{|3x+4y-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2 \Leftrightarrow |3x+4y-2|=10 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y=12 \\ \text{ή} \\ 3x+4y=-8 \end{cases}$

Από τα συστήματα: $\begin{cases} x+y-1=0 \\ 3x+4y=12 \end{cases}$ (2) και $\begin{cases} x+y-1=0 \\ 3x+4y=-8 \end{cases}$ (3) προσδιορίζουμε τα ζητούμενα σημεία

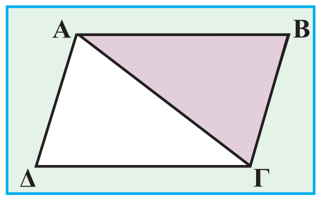
Από (2) $\Leftrightarrow x=-8,\ y=9$ και από (3) $\Leftrightarrow x=12,\ y=-11$.

Επομένως τα ζητούμενα σημεία είναι τα: (-8, 9) και (12, -11).

Άσκηση 4

Να βρεθεί το εμβαδόν του παραλληλογράμμου, του οποίου οι τρείς κορυφές είναι: Α (-3, 1), Β (4, -5), Γ (-2, 3)

Λύση



Είναι $\vec{AB}=(7,-6),\ \vec{A\Gamma}=(1,2)$.

Έστω Ε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου, τότε:

$E=2\cdot(AB\Gamma)=2\cdot\dfrac{1}{2}\left|\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})\right|=\left|\begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right|=20$ τ.μ. .

Άσκηση 5

Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας ε των ευθειών με εξισώσεις:

$\eta_1: 3x+4y-7=0$ και $\eta_2: 3x+4y-16=0$.

Λύση

Το σημείο Μ (x ,y) θα είναι σημείο της ευθείας ε, αν και μόνον αν, ισαπέχει απο τις ευθείες η_1 και η_2, δηλαδή αν και μόνον αν ισχύει: $d(M, n_1) = d(M, n_2)$

Είναι: $d(M,\eta_1)=d(M,\eta_2) \Leftrightarrow \dfrac{|3x+4y-7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|3x+4y-16|}{\sqrt{3^2+4^2}} \Leftrightarrow$

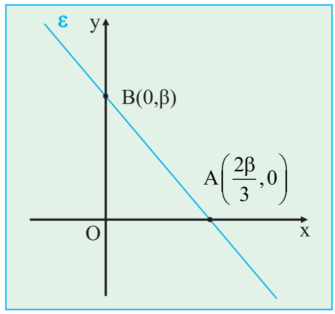
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y-7=3x+4y-16\ ,\text{αδύνατη} \\ \text{ή} \\ 3x+4y-7=-(3x+4y-16) \Leftrightarrow 6x+8y-23=0 \end{cases}$$

η οποία είναι η εξίσωση της μεσοπαράλληλης των η_1 και η_2.

Άσκηση 6

Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες στην ευθεία η: $3x+2y-1=0$ και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 12 τ.μ.

Λύση



Η ζητούμενη ευθεία ε ως παράλληλη προς την ευθεία η: $3x+2y-1=0$ θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=\lambda_\eta=-\frac{3}{2}$.

Άρα η εξίσωσή της θα είναι της μορφής : $y=-\frac{3}{2}x+\beta$.

Η ευθεία ε τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία $A\left(\frac{2\beta}{3},0\right)$ και $B(0,\beta)$ αντίστοιχα. Έτσι σχηματίζεται το τρίγωνο OAB με O(0,0) το οποίο έχει εμβαδόν (AOB) = 12 τ.μ.

Είναι: $(AOB)=12 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\det\left(\vec{OA},\vec{OB}\right)\right|=12 \Leftrightarrow \left|\frac{2\beta}{3}\cdot\beta\right|=24 \Leftrightarrow \beta^2=36 \Leftrightarrow \beta=6$ η $\beta=-6$

Άρα υπάρχουν δύο ευθείες, με εξισώσεις: $y=-\frac{3}{2}x+6$ και $y=-\frac{3}{2}x-6$

Άσκηση 7

Θεωρούμε τα σημεία Α (-4, 0), Β (2, 0) και Γ (-1, 4). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ (x, y) για τα οποία ισχύει: $(M B\Gamma)=\frac{1}{2}\cdot(AB\Gamma)$.

Λύση

Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με: $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})\right|=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix}6 & 0\\ 3 & 4\end{vmatrix}|=12$ και του τριγώνου ΜΒΓ είναι: $(MB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det(\vec{MB},\vec{M\Gamma})\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}2-x & -y\\ -1-x & 4-y\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}|-4x-3y+8|$.

Οπότε, το σημείο Μ (x, y) είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\frac{1}{2}|4x+3y-8|=\frac{1}{2}\cdot 12 \Leftrightarrow \begin{cases}4x+3y-8=12\\ \text{ή}\\ 4x+3y-8=-12\end{cases}$$

Άρα, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι τα σημεία των ευθειών με εξισώσεις:

$$4x+3y+4=0 \text{ και } 4x+3y-20=0.$$

Άσκηση 8

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: x+\mu y+1=0$ και $\varepsilon_2: 2\mu x+2y+\lambda=0$. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί λ,μ ώστε να είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και η απόστασή τους να είναι $2\sqrt{2}$.

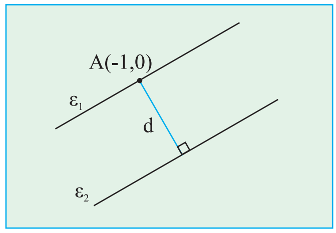
Λύση

Αν μ = 0 οι ευθείες είναι κάθετες. Επειδή θέλουμε οι ευθείες να είναι παράλληλες πρέπει

$\mu \neq 0$. Τότε ορίζονται οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών που είναι : $\lambda_1 = \dfrac{-1}{\mu}, \lambda_2 = -\mu$

Είναι: $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{\mu} = -\mu \Leftrightarrow \mu^2 = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$ η $\mu = -1$

Η απόσταση των δύο παραλλήλων ευθειών θα είναι ίση με την απόσταση τυχαίου σημείου έστω Α (- 1 ,0) της ε_1 απο την ε_2.



Είναι:

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(A, \varepsilon_2) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|2\mu(-1) + 2\cdot 0 + \lambda|}{\sqrt{(2\mu)^2 + 2^2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$|-2\mu + \lambda| = 2\sqrt{2}\sqrt{(2\mu)^2 + 2^2} \Leftrightarrow (\lambda - 2\mu)^2 = 32(\mu^2 + 1)$$

Με $\mu = 1$ παίρνουμε απο την παραπάνω εξίσωση:

$$(\lambda - 2)^2 = 32(1^2 + 1) \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 64 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - 2 = 8 \\ \lambda - 2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 10 \\ \lambda = -6 \end{cases}$$

και με $\mu = -1$ παίρνουμε:

$$(\lambda + 2)^2 = 32((-1)^2 + 1) \Leftrightarrow (\lambda + 2)^2 = 64 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 2 = 8 \\ \lambda + 2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 6 \\ \lambda = -10 \end{cases}$$

Άρα οι ζητούμενες τιμές των λ και μ είναι:

$$(\lambda, \mu) = (-6, 1), (\lambda, \mu) = (6, -1), (\lambda, \mu) = (10, 1), (\lambda, \mu) = (-10, -1)$$

Άσκηση 9

Δίνονται οι ευθείες ε_1: $\alpha x - y - 1 = 0$ και ε_2: $x + \alpha y - \alpha = 0$, $\alpha > 0$

α. Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1, ε_2 και ο άξονας y΄y σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο για κάθε $\alpha > 0$.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε (α) του τριγώνου που σχηματίζεται με τον τρόπο που περιγράφεται στο πρώτο ερώτημα.

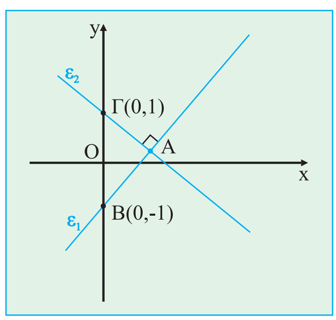
γ. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $E(\alpha) \leq E(1)$.

Λύση

α. Αν λ_1, λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών ε_1, ε_2 αντίστοιχα τότε έχουμε

$\lambda_1 = \alpha$ και $\lambda_2 = -\dfrac{1}{\alpha}$, οπότε $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

Άρα οι ευθείες ε_1, ε_2 είναι κάθετες μεταξύ τους και σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με τον άξονα y΄y.



β. Η ευθεία (ε_1) τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Β (0, -1).
Η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Γ (0,1).
Το σημείο τομής Α των ε_1, ε_2 προσδιορίζεται από τη λύση του συστήματος: $\begin{cases} \alpha x - y = 1 \\ x + \alpha y = \alpha \end{cases}$

Είναι: $D=\begin{vmatrix}\alpha & -1\\ 1 & \alpha\end{vmatrix}=\alpha^2+1\neq 0$, $D_x=\begin{vmatrix}1 & -1\\ \alpha & \alpha\end{vmatrix}=2\alpha$, $D_y=\begin{vmatrix}\alpha & 1\\ 1 & \alpha\end{vmatrix}=\alpha^2-1$

Αφού $D\neq 0$ για κάθε α, το σύστημα έχει πάντα λύση, που σημαίνει ότι οι ευθείες ε_1, ε_2 τέμνονται για κάθε τιμή του α. Το σημείο τομής τους είναι : $A\left(\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1},\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}\right)$

Η απόσταση d του Α από τον άξονα y΄y είναι $d=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}$, οπότε το εμβαδόν του τριγώνου είναι : $E(\alpha)=\dfrac{1}{2}d(B\Gamma)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}\cdot 2=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}$ (1), με $\alpha>0$.

γ. Από την (1) έχουμε: $E(1)=1$. Έστω ότι ισχύει $E(\alpha)\le E(1)$

Τότε $E(\alpha)\le E(1)\Leftrightarrow\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}\le 1\Leftrightarrow\alpha^2+1\ge 2\alpha\Leftrightarrow\alpha^2-2\alpha+1\ge 0\Leftrightarrow(\alpha-1)^2\ge 0$

που ισχύει για κάθε α.

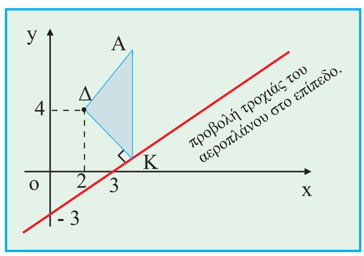
Άσκηση 10

Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων η θέση ενός αεροδρομίου προσδιορίζεται από το σημείο Δ (2, 4) και η προβολή της θέσης ενός αεροπλάνου πάνω στο καρτεσιανό σύστημα δίνεται από το σημείο Κ (t + 1, t - 2), $t\in\mathbb{R}$.

α. Να εξετάσετε αν το αεροπλάνο θα περάσει πάνω από το αεροδρόμιο όταν κινείται ευθύγραμμα.

β. Ποια θα είναι η ελάχιστη απόσταση του αεροπλάνου από το αεροδρόμιο αν κινείται ευθύγραμμα σε σταθερό ύψος 2 km.

Λύση



α. Η προβολή Κ του αεροπλάνου βρίσκεται πάνω στην ευθεία (ε) με εξίσωση: $x-y-3=0$ που προκύπτει με απαλοιφή του t απο τις σχέσεις:

$$x=t+1,\quad y=t-2.$$

Παρατηρούμε, ότι το σημείο Δ δεν ανήκει σε αυτήν την ευθεία, άρα το αεροπλάνο δε θα περάσει πάνω από το αεροδρόμιο.

β. Αφού $AK=2$ km η απόσταση ΑΔ γίνεται ελάχιστη όταν γίνει ελάχιστη η ΔΚ. Η ΔΚ γίνεται ελάχιστη όταν είναι κάθετη στην (ε) και είναι:

$$\Delta K_{min}=d(\Delta,K)=\frac{|2-4-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

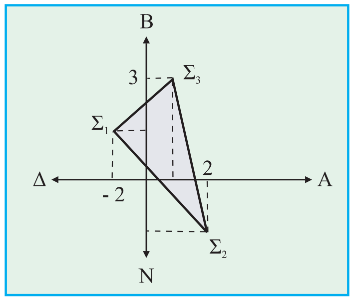
Τότε $A\Delta_{min}=\sqrt{AK^2+\Delta K^2}=\sqrt{2^2+\dfrac{25}{2}}=\dfrac{\sqrt{66}}{2}$ km.

Άσκηση 11

Ανοικτά κάποιου λιμανιού υπάρχουν τρεις σημαδούρες Σ_i, $i = 1, 2, 3$ που οριοθετούν μία τριγωνική περιοχή στην οποία απαγορεύονται οι καταδύσεις. Ο υπεύθυνος λιμενάρχης, ο οποίος βρίσκεται σε ένα πλοίο κάπου μέσα στην τριγωνική περιοχή, στέλνει τρεις βάρκες με δύο ναύτες στην καθεμία να μετρήσουν τις αποστάσεις των Σ_i, $i = 1, 2, 3$ από το πλοίο. Η πρώτη βάρκα πλέει 2 ναυτικά μίλια δυτικά και 1 μίλι βόρεια και εκεί συναντά την πρώτη σημαδούρα. Η δεύτερη βάρκα πλέει 2 μίλια νότια και 2 ανατολικά και εκεί συναντά τη δεύτερη σημαδούρα. Η τρίτη βάρκα πλέει 3 μίλια βόρεια και 1 μίλι ανατολικά και συναντά την τρίτη σημαδούρα. Με τα παραπάνω δεδομένα να υπολογίσετε το εμβαδόν της τριγωνικής περιοχής.

Λύση

Θεωρώντας ως αρχή των συντεταγμένων τη θέση του πλοίου έχουμε το διπλανό σχήμα, όπου: $\Sigma_1(-2,1)$, $\Sigma_2(2,-2)$, $\Sigma_3(1,3)$.



Είναι: $\overrightarrow{\Sigma_1\Sigma_2} = (4,-3)$ και $\overrightarrow{\Sigma_1\Sigma_3} = (3,2)$.

Οπότε το εμβαδόν του τριγώνου $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3$ είναι :

$$E = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\Sigma_1\Sigma_2}, \overrightarrow{\Sigma_1\Sigma_3}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right| = \frac{17}{2} \text{ τετρ. μίλια.}$$

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Το εμβαδόν παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ με Α (0, 0), Β (3, 1) και Γ (5, 3) είναι ίσο με:
Α: 1 Β: 8 Γ: 4 Δ: 5 Ε: 2.

2. Η απόσταση του σημείου Μ (4, 3) από τον άξονα $y'y$ είναι:
Α: 4 Β: 3 Γ: 7 Δ: 5 Ε: 2.

3. Η μεσοπαράλληλη ευθεία των ευθειών : $x = -2$, $x = 4$ είναι η:
Α: $x = 1$ Β: $x = 3$ Γ: $x = 2$ Δ: $x = 0$ Ε: $y = 1$.

4. Η $y = x$ είναι μεσοπαράλληλη της $x - y = 2$ και της ευθείας:
Α: $x + y = 2$ Β: $x - y = -2$ Γ: $-x + y = -2$
Δ: $x + y = -2$ Ε: $x - y = 2$.

5. Δίνονται οι ευθείες (ε_1): $3x - 4y + 10 = 0$ και (ε_2): $3x - 4y + 20 = 0$.
i. Να δείξετε ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.
ii. Να υπολογίσετε τις αποστάσεις της αρχής Ο από τις ε_1 και ε_2.
iii. Να υπολογίσετε την απόσταση των ε_1 και ε_2.

(**Απ.: ii.** $d(O,\varepsilon_1) = 2$, $d(O,\varepsilon_2) = 4$ **iii.** $d(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = 2$)

6. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη προς την ευθεία y = -3x + 10 και απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 5 μονάδες μήκους.

(**Απ.:** $y=-3x+5\sqrt{10}$ ή $y=-3x-5\sqrt{10}$)

7. Δίνονται τα σημεία Α (1, 3) και Β (-2, 4). Να βρείτε σημείο Μ του άξονα $x'x$ για το οποίο το εμβαδόν του τριγώνου ΜΑΒ είναι ίσο με 8 τ.μ. .

(**Απ.:** $M(-6,0)$ ή $M(26,0)$)

8. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών, οι οποίες διέρχονται από το σημείο Μ (2, 2) και σχηματίζουν με τους θετικούς ημιάξονες τρίγωνο με εμβαδόν Ε = 8 τ.μ. .

(**Απ.:** $y=-x+4$)

9. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Α (1, 1), Β (2, 2) και Γ είναι σημείο της ευθείας $y = x + 1$.

(**Απ.:** $E=\frac{1}{2}$)

10. **α.** Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των παραλλήλων ευθειών: $2x+y=4$ και $4x+2y=2$.
β. Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης αυτών.

(**Απ.: i.** $d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\frac{3\sqrt{5}}{5}$, **ii.** $(\varepsilon):4x+2y=5$)

11. Δίνονται τα σημεία Α (-3, -4) και Β (2, 1). Να βρείτε το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει (ΜΑΒ) = 5 τ.μ. .

(**Απ.:** Είναι οι ευθείες $x-y=3$ ή $x-y=-1$)

12. Σε ένα χάρτη με καρτεσιανό σύστημα αξόνων Οxy ένα πλοίο ξεκινά από κάποιο λιμάνι Λ και κατευθύνεται προς το λιμάνι Ο. Το ραντάρ θέσης του πλοίου δίνει για κάθε χρονική στιγμή συντεταγμένες: $\Pi_1(t-40,t-10),\ t\geq 0$.
α. Πού βρίσκεται το λιμάνι Λ στον χάρτη;
β. Πόσο απέχει το λιμάνι Λ από το λιμάνι Ο;
γ. Βρίσκεται το πλοίο στη σωστή πορεία για το λιμάνι Ο;
δ. Αν η θέση ενός άλλου πλοίου προσδιορίζεται από το σημείο $\Pi_2(t+10,t-30),\ t\geq 0$ υπάρχει περίπτωση τα πλοία να συναντηθούν;
ε. Ποια είναι η απόστασή τους τη χρονική στιγμή $t=10$;

(**Απ.: i.** $\Lambda(-40,-10)$, **ii.** $(\Lambda O)=10\sqrt{17}$, **iii.** Όχι, **iv.** Όχι, **v.** $d=10\sqrt{29}$)

13. Ανοικτά κάποιου λιμανιού υπάρχουν τρεις σημαδούρες που οριοθετούν μία τριγωνική περιοχή στην οποία απαγορεύονται οι καταδύσεις. Ο υπεύθυνος λιμενάρχης, ο οποίος βρίσκεται σε ένα πλοίο, στέλνει τρεις βάρκες με δύο ναύτες στην καθεμία να μετρήσουν τις αποστάσεις των σημαδούρων από το πλοίο. Η πρώτη βάρκα κινείται με 4 ναυτικά μίλια δυτικά και 2 μίλια βόρεια και εκεί συναντά την πρώτη σημαδούρα. Η δεύτερη βάρκα πλέει 4 μίλια νότια και 4 ανατολικά και εκεί συναντά τη δεύτερη σημαδούρα. Η τρίτη βάρκα πλέει 6 μίλια βόρεια και 2 μίλια ανατολικά και συναντά την τρίτη σημαδούρα. Με τα παραπάνω δεδομένα να υπολογίσετε το εμβαδόν της τριγωνικής περιοχής.

(**Απ.:** $E = 34$)

14. Η ευθεία 3x - 5y = 2 χωρίζει το επίπεδο xOy σε δύο ημιεπίπεδα Ι και ΙΙ. Τα σημεία (1, -2) και (-2, 1) βρίσκονται:
Α. και τα δύο στο ίδιο ημιεπίπεδο;
Β. σε διαφορετικά ημιεπίπεδα;
Γ. το ένα βρίσκεται στο Ι και το άλλο πάνω στην ευθεία;
Δ. και τα δύο βρίσκονται πάνω στην ευθεία;
Ε. κανένα από τα παραπάνω;

15. Αν η απόσταση του σημείου (α, 2α), όπου α > 1, από την ευθεία 13x + y = 5 είναι $\sqrt{170}$, τότε το α είναι ίσον με:

Α. $\frac{5}{11}$ **Β.** 7 **Γ.** $\frac{66}{7}$ **Δ.** 5 **Ε.** 3.

16. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ισαπέχει από τα σημεία Α(2,0) και Β(0,6).

(**Απ.:** $y = 3x$ ή $y = -3x$)

17. Να βρείτε σημείο του άξονα x΄x που ισαπέχει από την αρχή των αξόνων και από την ευθεία ε : 3x - 4y - 24 = 0.

(**Απ.:** $M(-12,0)$ ή $M(3,0)$)

18. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ του οποίου οι τρείς κορυφές είναι τα σημεία Α (-2, 3), Β (4, -5), Γ(-3,1).

(**Απ.:** $E = 20$)

19. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την τομή των ευθειών ε_1: x + y -3 = 0 και ε_2 : x - y + 1 = 0 και απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 1.

(**Υπ.** Βρίσκουμε την τομή των δύο ευθειών και από τη δοσμένη απόσταση βρίσκουμε το λ. Είναι $\zeta : x = 1$ ή $\zeta : y - 2 = \frac{3}{4}(x-1)$)

20. Να βρείτε τα σημεία της ευθείας ε : x + y -1 = 0 που απέχουν από την ευθεία ζ: 3x + 4y - 2 = 0 απόσταση ίση με 2.

(**Απ.:** Έστω Μ(μ,ν) τα ζητούμενα σημεία και βρίσκουμε δύο σχέσεις με μ, ν. $M(-8,9)$ ή $M(12,-11)$)

21. Έστω τα σημεία Α (1, 1) και Β (5, 5) και η ευθεία $x - 2y - 1 = 0$. Να βρείτε σημείο Γ της ευθείας ε, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ να είναι ίσο με 4 τ.μ. .

(**Απ.:** $\Gamma(-5,-3)$ ή $\Gamma(3,1)$)

22. i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση των παραλλήλων ευθειών:

$\varepsilon_1: \alpha x + \beta y + \gamma_1 = 0$ και $\varepsilon_2: \alpha x + \beta y + \gamma_2 = 0$, είναι ίση με $\dfrac{|\gamma_1 - \gamma_2|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$.

ii. Να δείξετε ότι η μεσοπαράλληλη των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι $\alpha x + \beta y + \dfrac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = 0$.

iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται στις ευθείες: $\zeta_1: 5x - 12y - 65 = 0$ και $\zeta_2: 5x - 12y + 26 = 0$.

(**Απ.: i.** Παίρνουμε σημείο στην ε_1 και βρίσκουμε την απόστασή του από την ε_2 . **ii.** $E = 49$)

23. Η ευθεία με εξίσωση $(\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y - \lambda - 3 = 0$, με λ πραγματικό περιγράφει την φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ.

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του Φ

ii. Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία Κ(2 ,2) Λ(-1, 5) και Μ(1, 3). Βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτίνων που διέρχονται από τα Κ, Λ, Μ.

iii. Βρείτε ποιο από τα πλοία Κ, Λ βρίσκεται πλησιέστερα στην φωτεινή ακτίνα που περνάει από το Μ.

iv. Βρείτε το εμβαδόν της θαλάσσιας περιοχής που ορίζεται από το φάρο Φ και τα πλοία Λ και Μ.

(**Απ.:i.**(Η δοσμένη εξίσωση είναι δέσμη ευθειών) $\Phi(-1,2)$ **ii.** $\Phi K: y = 2$, $\Phi\Lambda: x = -1$,

$\Phi M: y - 3 = \frac{1}{2}(x - 1)$, **iii.** Βρίσκουμε τις αποστάσεις των Κ, Λ από την ευθεία ΦΜ.

iv. $(\Phi\Lambda M) = 3$)

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Δύο πλοία αναχωρούν από τα λιμάνια του Πειραιά και της Ραφήνας την 6η πρωϊνή ώρα κινούμενα ευθύγραμμα. Οι συντεταγμένες των πλοίων στο ραντάρ του κέντρου επιχειρήσεων από το οποίο παρακολουθούνται είναι Α (t + 1, t-1) και Β (20 - t, t +20) αντίστοιχα, όπου t ο χρόνος, σε ώρες που έχει περάσει από την στιγμή της αναχώρησής τους. Αν ο Πειραιάς βρίσκεται στη θέση Π(1, -1) και η Ραφήνα στη θέση Ρ(20, 20) τότε:

α. Να βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα πλοία.

β. Να εξετάσετε αν υπάρχει κίνδυνος σύγκρουσης των δύο πλοίων .

γ. Να βρείτε ποιο από τα δύο πλοία έχει διανύσει τη μεγαλύτερη απόσταση μέχρι το μεσημέρι στις 12.

δ. Να βρείτε ποιο πλοίο θα διέλθει πιο κοντά από τη βραχονησίδα Ι (2002, 2002).

ε. Να εξετάσετε αν κάποιο από τα δύο πλοία έχει τη δυνατότητα χωρίς να εκτραπεί από την πορεία του να περισυλλέξει ναυαγούς που βρίσκονται στη θέση Ν(2040, -2000).