Μάθημα 5

Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Θεώρημα

Κάθε ευθεία έχει εξίσωση της μορφής: $Ax+By+\Gamma=0$, με $A\neq 0$ η $B\neq 0$ (1)
και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.

Παρατηρήσεις :

Αν $B\neq 0$ τότε:

α. Η ευθεία με εξίσωση (1) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\dfrac{A}{B}$

β. Η ευθεία με εξίσωση (1) είναι παράλληλη στο μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{\delta}=(B,-A)$.

γ. Η ευθεία με εξίσωση (1) είναι κάθετη στο μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{k}=(A,B)$.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία - Μέθοδος 1

Για να δείξουμε ότι μία εξίσωση της μορφής: $Ax+By+\Gamma=0$, όπου τα Α, Β, Γ δίνονται συναρτήσει μιας παραμέτρου, παριστάνει ευθεία, πρέπει να δείξουμε ότι τα Α και Β δε μηδενίζονται ταυτόχρονα (για την ίδια τιμή της παραμέτρου).

Παράδειγμα 1

Δίνεται η εξίσωση $(\mu^2-1)x+(\mu+1)y+(\mu^2-3\mu+2)=0$ $\mu\in R$ (1). Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες η (1) παριστάνει ευθεία. Πότε είναι παράλληλη στον άξονα x΄x, πότε στον y΄y και πότε διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

Λύση

$$\left.\begin{array}{l}\mu^2-1=0\Leftrightarrow \mu=\pm 1\\ \mu+1=0\Leftrightarrow \mu=-1\end{array}\right\}$$ Επομένως για $\mu=-1$ η (1) δεν παριστάνει ευθεία.

Για να είναι ευθεία παράλληλη στον άξονα x΄x πρέπει να ισχύουν συγχρόνως :

$$\mu^2 - 1 = 0 \text{ και } \mu \neq -1, \text{ δηλαδή } \mu = 1.$$

Για να είναι ευθεία παράλληλη στον y΄y πρέπει να ισχύουν συγχρόνως :

$$\mu + 1 = 0 \text{ και } \mu \neq -1, \text{ που είναι αδύνατο.}$$

Άρα η (1) δεν γίνεται παράλληλη στον y΄y για καμία τιμή του μ.
Για να περνά από την αρχή Ο πρέπει να ισχύουν συγχρόνως :

$$\mu^2 - 3\mu + 2 = 0 \text{ και } \mu \neq -1$$

δηλαδή μ = 1 ή μ = 2.

Κατηγορία - Μέθοδος 2

Για να αποδείξουμε ότι ένα σύνολο ευθειών της μορφής: $\varepsilon_1 + \lambda \cdot \varepsilon_2 = 0, \lambda \in R$ (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο:

1ος τρόπος

Δίνουμε αυθαίρετα δύο τιμές στην παράμετρο λ και προκύπτουν έτσι οι εξισώσεις δύο ευθειών. Βρίσκουμε το σημείο τομής αυτών των δύο ευθειών,λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων τους και εξετάζουμε αν οι συντεταγμένες του, επαληθεύουν την αρχική εξίσωση (1). Αν την επαληθεύουν, τότε όλες οι ευθείες που παριστάνει η εξίσωση (1) θα διέρχονται από το σημείο αυτό.

2ος τρόπος

Μετασχηματίζουμε την εξίσωση που δίνεται σε πολυωνυμική εξίσωση ως προς λ (αν δεν δίνεται έτσι). Για να είναι το πολυώνυμο ως προς λ, του 1ου μέλους ,της εξίσωσης ίσο με μηδέν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ , πρέπει οι συντελεστές του να είναι ίσοι με μηδέν.

Παράδειγμα 1

Δίνεται η εξίσωση: $-x - 2 + \lambda(2x + 3y - 1) = 0, \lambda \in R$ **(1).**

α. Να αποδειχθεί ότι:

i. Για κάθε $\lambda \in R$ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.

ii. Όλες οι ευθείες που ορίζονται από την (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

β. Ποια από τις παραπάνω ευθείες είναι κάθετη στην ευθεία (η): $y = \frac{1}{2}x + 3$;

Λύση

α. i. Η **(1)** γράφεται ισοδύναμα: (2λ - 1)x + 3λy - λ - 2 = 0.

Επειδή το σύστημα $\begin{cases} 2\lambda - 1 = 0 \\ 3\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{2} \\ \lambda = 0 \end{cases}$

είναι αδύνατο, δεν υπάρχει $\lambda \in R$ ώστε να μηδενίζονται συγχρόνως οι συντελεστές του x και του y. Άρα η **(1)** παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in R$.

ii. 1ος τρόπος

Για $\lambda = 0$ και $\lambda = \frac{1}{2}$, παίρνουμε τις ευθείες: $-x - 2 = 0$ και $y - \frac{5}{3} = 0$.

Αυτές τέμνονται στο σημείο $\left(-2, \frac{5}{3}\right)$ και έχουμε: $(2\lambda - 1)\cdot(-2) + 3\lambda\left(\frac{5}{3}\right) - \lambda - 2 = 0$.

Άρα, όλες οι ευθείες της παραπάνω μορφής διέρχονται από το σημείο $\left(-2, \frac{5}{3}\right)$.

2ος τρόπος

Έστω ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από το σημείο (x_0, y_0), τότε:

$(2\lambda - 1)x_0 + 3\lambda y_0 - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow (2x_0 + 3y_0 - 1)\lambda - x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 + 3y_0 - 1 = 0 \\ -x_0 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = -2, y_0 = \frac{5}{3}.$$

Άρα όλες οι ευθείες διέρχονται από το σημείο $\left(-2, \frac{5}{3}\right)$.

Η εξίσωση (1) αποτελεί μία δέσμη ευθειών με κέντρο το σημείο $\left(-2, \frac{5}{3}\right)$.

β. Έστω (ε) μία ευθεία της οικογένειας των ευθειών (1).

Πρέπει $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\eta = -1 \overset{\lambda \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{1 - 2\lambda}{3\lambda} \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow 1 - 2\lambda = -6\lambda \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{4}$.

Για $\lambda = -\frac{1}{4}$ παίρνουμε από την (1) την ευθεία: $-\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}y = \frac{7}{4} \Leftrightarrow 6x + 3y = -7$.

Για $\lambda = 0$ είναι $-x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ η οποία δεν είναι κάθετη στην $y = \frac{1}{2}x + 3$

Κατηγορία - Μέθοδος 3

Αν το σύνολο των ευθειών (1) της προηγούμενης μεθόδου μας δοθεί ή το βρούμε με δύο παραμέτρους, απαλείφουμε τη μία από τις δύο με κάποια σχέση που δίνεται ή προκύπτει από τα δεδομένα.

Παράδειγμα 1

Δύο σημεία Α και Β κινούνται επάνω στους θετικούς ημιάξονες Οx και Οy ενός ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων Οxy, έτσι ώστε να ισχύει:

$\frac{1}{(OA)} + \frac{1}{(OB)} = 1 \ (1)$. **Να δείξετε ότι η ευθεία ΑΒ διέρχεται από σταθερό σημείο.**

Λύση

Έστω Α(α,0) και Β(0,β) με $\alpha, \beta \neq 0$. Βρίσκουμε την εξίσωση της ΑΒ. Είναι $\lambda_{AB} = -\frac{\beta}{\alpha}$.

Επομένως η εξίσωση της ΑΒ είναι: $y=-\frac{\beta}{\alpha}(x-\alpha)$. Η ευθεία ΑΒ λοιπόν είναι μία μεταβλητή ευθεία, αφού στην εξίσωσή της έχει δύο παραμέτρους. Πρέπει να απαλείψουμε την μία παράμετρο.

Από τη σχέση (1) έχουμε: $\alpha=\alpha\beta-\beta \Leftrightarrow \alpha=\beta(\alpha-1) \Leftrightarrow \beta=\frac{\alpha}{\alpha-1}$ (2)

(είναι $\alpha\neq 1$ γιατί αν $\alpha=1$ δε θα μπορούσε να ισχύει η (1)).

Έτσι η εξίσωση της ΑΒ γίνεται λόγω της σχέσης (2): $y=-\frac{\frac{\alpha}{\alpha-1}}{\alpha}(x-\alpha) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{\alpha-1}(x-\alpha)$,

που είναι εξίσωση ευθείας με μία όμως παράμετρο και τη γράφουμε με μορφή πολυωνύμου ως προς την παράμετρο. Έτσι

έχουμε: $(\alpha-1)y=-x+\alpha \Leftrightarrow \alpha y-y+x-\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha(y-1)+x-y=0$.

Η τελευταία εξίσωση αληθεύει για κάθε τιμή του λ, αν και μόνον αν, ισχύουν :

και $\begin{cases} y-1=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$. Επομένως η ΑΒ διέρχεται από το σταθερό σημείο (1,1).

Κατηγορία - Μέθοδος 4

Πως υπολογίζουμε την οξεία γωνία δυο ευθειών.

Έστω ότι οι ευθείες ε_1, ε_2 έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα.

Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\delta_1},\vec{\delta_2}$ τέτοια ώστε: $\vec{\delta_1}//\varepsilon_1$ και $\vec{\delta_2}//\varepsilon_2$

Υπολογίζουμε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\delta_1},\vec{\delta_2}$ απο τον τύπο:

$$\text{συν}\phi=\frac{\vec{\delta_1}\cdot\vec{\delta_2}}{|\vec{\delta_1}|\cdot|\vec{\delta_2}|}$$

Τότε η οξεία γωνία θ των ευθειών θα είναι ίση ή παραπληρωματική της γωνίας φ των δύο διανυσμάτων.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η οξεία γωνία των ευθειών με εξισώσεις:

(ε_1): $-x+2y=3$ και (ε_2): $4x+3y=5$

Λύση

Θα υπολογίσουμε τη γωνία δύο διανυσμάτων παραλλήλων προς τις προηγούμενες ευθείες. Οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν συντελεστές διεύθυνσης:

$$\lambda_1=\frac{1}{2} \text{ και } \lambda_2=-\frac{4}{3}.$$

Άρα είναι παράλληλες προς τα διανύσματα $\vec{\delta_1}=(2,1)$ και $\vec{\delta_2}=(3,-4)$.
Επομένως, η οξεία γωνία των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι ίση ή παραπληρωματική της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\delta_1}$ και $\vec{\delta_2}$. Από τον τύπο του εσωτερικού γινομένου, έχουμε :

$$\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{\vec{\delta_1}\cdot\vec{\delta_2}}{|\vec{\delta_1}|\cdot|\vec{\delta_2}|}=\frac{2\cdot3+1\cdot(-4)}{\sqrt{2^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{2}{5\sqrt5}=\frac{2\sqrt5}{25}$$, οπότε $\theta\cong79,7^0$ αφού $\sigma\upsilon\nu\varphi>0$.

Κατηγορία - Μέθοδος 5

Για να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση της μορφής $Ax^2+Bxy+\Gamma y^2+\Delta x+Ey+Z=0$ παριστάνει δύο ευθείες, παραγοντοποιούμε το πρώτο μέλος. Αυτό γίνεται εύκολα, αν θεωρήσουμε το πρώτο μέλος τριώνυμο $2^{ου}$ βαθμού ως προς x ή ως προς y. (Πρέπει η διακρίνουσα του τριωνύμου να είναι θετική).

Παράδειγμα 1

Να δείξετε ότι: α. η εξίσωση $6x^2 - xy - y^2 = 0$ παριστάνει δύο ευθείες.
β. Η οξεία γωνία που σχηματίζουν είναι 45^0.

Λύση

α. Θεωρούμε το πρώτο μέλος ως τριώνυμο $2^{ου}$ βαθμού του y.

Τότε η διακρίνουσα του είναι: $\Delta=(-x)^2-4\cdot(-1)\cdot6x^2=25x^2$.

Οι ρίζες του δίνονται από τον τύπο:

$$y=\frac{-x\pm\sqrt{25x^2}}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x\\y=-3x\end{cases}$$ οπότε $6x^2-xy-y^2=0\Leftrightarrow(y-2x)(y+3x)=0$.

Επομένως, οι ευθείες που παριστάνει η $6x^2-xy-y^2=0$ έχουν εξισώσεις:

$y=2x$ και $y=-3x$

β. Οι ευθείες $y=2x$ και $y=-3x$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1=2$ και $\lambda_2=-3$ αντιστοίχως.

Άρα, είναι παράλληλες προς τα διανύσματα $\vec{\delta_1}=(1,2)$ και $\vec{\delta_2}=(1,-3)$. Επομένως, η οξεία γωνία θ των ευθειών είναι ίση ή παραπληρωματική της γωνίας φ των διανυσμάτων $\vec{\delta_1}$ και $\vec{\delta_2}$. Είναι $\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{\vec{\delta_1}\cdot\vec{\delta_2}}{|\vec{\delta_1}|\cdot|\vec{\delta_2}|}=\frac{1\cdot1+2\cdot(-3)}{\sqrt5\cdot\sqrt{10}}=\frac{-5}{\sqrt{50}}=-\frac{\sqrt2}{2}$, δηλαδή $\varphi=135^o$.

Επομένως $\theta=45^0$.

Κατηγορία - Μέθοδος 6

Για να βρούμε τη σχετική θέση δύο ευθειών επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεών τους.
Αν οι εξισώσεις των ευθειών έχουν κάποια παράμετρο, κάνουμε διερεύνηση του συστήματος, συνήθως με ορίζουσες.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών (ε_1): μx - y = μ + 1 και (ε_2): x - y = 2, $\mu \in R$.

Λύση

Έχουμε το σύστημα: (Σ): $\begin{matrix} \mu x - y = \mu + 1 \\ x - y = 2 \end{matrix}$

$D = \begin{vmatrix} \mu & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\mu + 1$, $\qquad D_x = \begin{vmatrix} \mu+1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -\mu - 1 + 2 = -\mu + 1$,

$Dy = \begin{vmatrix} \mu & \mu+1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\mu - \mu - 1 = \mu - 1$

α. Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow \mu \neq 1$ το (Σ) έχει μοναδική λύση $x = \dfrac{D_x}{D} = 1$ και $\dfrac{D_y}{D} = -1$, άρα οι δύο ευθείες τέμνονται στο σημείο (1, -1).

β. Αν D = 0 ⇔ μ = 1 το (Σ) γίνεται (ε_1): x - y = 2 και (ε_2): x - y = 2. Δηλαδή οι ευθείες ταυτίζονται.

Κατηγορία - Μέθοδος 7

Εύρεση γεωμετρικού τόπου:

Όταν ζητείται ο γεωμετρικός τόπος σημείου M(x, y) του οποίου οι συντεταγμένες είναι εκφρασμένες συναρτήσει μίας παραμέτρου κάνουμε απαλοιφή της παραμέτρου και βρίσκουμε τη σχέση μεταξύ των συντεταγμένων x και y του σημείου M.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η γραμμή επάνω στην οποία κινείται το σημείο M(3λ+1, 2λ), $\lambda \in R$.

Λύση

Είναι $\left.\begin{matrix} x = 3\lambda + 1 \\ y = 2\lambda \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x = 3\dfrac{y}{2} + 1 \\ \lambda = \dfrac{y}{2} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow 2x - 3y - 2 = 0$

Άρα το M κινείται επάνω στην ευθεία με εξίσωση $2x - 3y - 2 = 0$.

Κατηγορία - Μέθοδος 8

Όταν ζητείται ο γεωμετρικός τόπος σημείου M και δεν δίνονται οι συντεταγμένες του, προσπαθούμε από τα δεδομένα της άσκησης να τις εκφράσουμε συναρτήσει μίας παραμέτρου και στη συνέχεια να κάνουμε απαλοιφή της παραμέτρου

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής των ευθειών $\lambda x+(\lambda-1)y=2\lambda$ και $(\lambda+1)x+\lambda y=2\lambda+1$, για όλες τις τιμές του $\lambda\in R$.

Λύση

Ευκολα διαπιστώνουμε, οτι οι παραπάνω εξισώσεις παριστάνουν ευθείες για κάθε τιμή του $\lambda\in R$.Θα προσδιορίσουμε τα σημεία τομής των ευθειών συναρτήσει της παραμέτρου λ.

Το σύστημα $\begin{cases}\lambda x+(\lambda-1)y=2\lambda\\(\lambda+1)x+\lambda y=2\lambda+1\end{cases}$ έχει πάντα λύση αφού η ορίζουσα του συστήματος

είναι: $D=\begin{vmatrix}\lambda & \lambda-1\\ \lambda+1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda^2+1=1\neq 0$.

$D_x=\begin{vmatrix}2\lambda & \lambda-1\\ 2\lambda+1 & \lambda\end{vmatrix}=2\lambda^2-2\lambda^2+2\lambda-\lambda+1=\lambda+1$

$D_y=\begin{vmatrix}\lambda & 2\lambda\\ \lambda+1 & 2\lambda+1\end{vmatrix}=2\lambda^2+\lambda-2\lambda^2-2\lambda=-\lambda$

Επομένως το σημείο τομής των ευθειών είναι το σημείο Μ(λ+1, –λ).

Θέτουμε $x=\lambda+1$, $y=-\lambda$. Με απαλοιφή του λ παίρνουμε $x+y=1$ που είναι η εξίσωση του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου.

Κατηγορία - Μέθοδος 9

Όταν μας ζητούν ή προκύπτει από την άσκηση, γεωμετρικός τόπος σημείου που δίνεται με δύο παραμέτρους, απαλείφουμε διαδοχικά τις δύο παραμέτρους.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί ο.γ.τ. του Μ(2α + β, 3α + 5β) με $\alpha,\beta\in R$ και α + β = 1.

Λύση

Είναι $\alpha+\beta=1\Leftrightarrow\beta=1-\alpha$. Οπότε το σημείο Μ γίνεται $M\left(2\alpha+1-\alpha,3\alpha+5\left(1-\alpha\right)\right)$

δηλαδή $M\left(\alpha+1,-2\alpha+5\right)$ και έτσι απαλείψαμε τη μία παράμετρο.

Έστω $\left.\begin{array}{l}x=\alpha+1\\y=-2\alpha+5\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha=x-1\\y=-2\left(x-1\right)+5\end{array}\right\}\Leftrightarrow y=-2x+2+5\Leftrightarrow y=-2x+7$.

Επομένως το Μ κινείται στην ευθεία $y=-2x+7$.

Μέθοδος 10

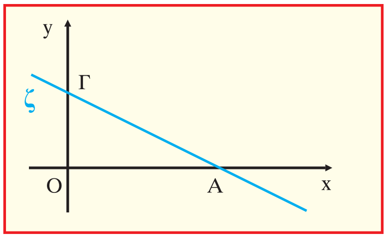
Όταν σε μία ευθεία γνωρίζουμε το συντελεστή διεύθυνσης λ, τη γράφουμε στη μορφή: **y = λx + β** και υπολογίζουμε το β από τα υπόλοιπα δεδομένα της άσκησης.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες προς την ευθεία (ε): 9x + y - 1 = 0 και ορίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν ίσο με 2 m^2.

Λύση

Η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -9$ οπότε η ζητούμενη ευθεία (ζ) θα έχει τον ίδιο συντελεστή $\lambda_\zeta = -9$. Άρα (ζ): $y = -9x + \beta$.



Βρίσκουμε τα σημεία στα οποία η (ζ) τέμνει τους άξονες.

Θέτουμε στην εξίσωσή της $y = 0$ και έχουμε: $x = \beta/9$. Επομένως $A(\beta/9, 0)$.

Θέτουμε στην εξίσωση της $x = 0$ και έχουμε: $y = \beta$. Επομένως $\Gamma(0, \beta)$.

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΓ είναι:

$$\left.\begin{aligned}&(\text{ΟΑΓ}) = \frac{1}{2}\left|\frac{\beta}{9}\right||\beta|\\ &\text{αλλά } (\text{ΟΑΓ}) = 2\end{aligned}\right\} \quad \text{Άρα} \quad \frac{1}{2}\left|\frac{\beta}{9}\right||\beta| = 2 \Leftrightarrow |\beta|^2 = 36 \Leftrightarrow \beta = \pm 6.$$

Επομένως οι ζητούμενες ευθείες είναι οι: (ζ_1): $y = -9x + 6$ και (ζ_2): $y = -9x - 6$

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Δίνεται η εξίσωση (ε) : $(2\lambda^2 - \lambda - 1)x - (\lambda^2 - 3\lambda + 1)y - (\lambda^2 + 2\lambda - 2) = 0$, $\lambda \in R$ **.**

Να αποδειχθεί ότι:

α. Η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθείες για κάθε πραγματική τιμή του λ.

β. Όλες οι ευθείες που ορίζονται απο την παραπάνω εξίσωση , διέρχονται απο το ίδιο σημείο για κάθε τιμή του λ.

Λύση

α. Η εξίσωση (ε) είναι της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ η οποία παριστάνει ευθεία όταν $A \neq 0$ ή $B \neq 0$

Επειδή το σύστημα $\begin{cases} 2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \\ \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{1}{2}, \ \lambda = 1 \\ \lambda = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$ είναι αδύνατο, δεν υπάρχει $\lambda \in R$ ώστε να μηδενίζονται συγχρόνως οι συντελεστές του x και του y. Άρα η (ε) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in R$.

β. Για $\lambda = 0$ προκύπτει η ευθεία με εξίσωση : $x + y - 2 = 0$ (1)

Για $\lambda = 1$ προκύπτει η ευθεία με εξίσωση : $y - 1 = 0$ (2)

Απο τη λύση του συστήματος : { x + y - 2 = 0 και y - 1 = 0 } παίρνουμε x = 1 και y =1.
Άρα οι ευθείες (1) και (2) τέμνονται στο σημείο P(1 , 1).
Οι συντεταγμένες του P επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας (ε) για κάθε λ πραγματικό, αφού: $\left(2\lambda^2-\lambda-1\right)\cdot 1-\left(\lambda^2-3\lambda+1\right)\cdot 1-\left(\lambda^2+2\lambda-2\right)=0$
Άρα όλες οι ευθείες που παριστάνει η (ε), διέρχονται απο το σταθερό σημείο P(1,1) για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ.

Άσκηση 2

Δίνεται η εξίσωση (σ) : $\left(\lambda^2-1\right)x+\left(2\lambda^2+\lambda-3\right)y-5=0$, $\lambda\in R$

i. Για ποιες τιμές του λ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία;
ii. Για ποιες τιμές του λ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία
α. παράλληλη στον άξονα x΄x.
β. παράλληλη στον άξονα y΄y.

Λύση

i. Η (σ) παριστάνει ευθεία για τις τιμές του λ, για τις οποίες δεν μηδενίζονται συγχρόνως οι συντελεστές των x και y.

Έχουμε: $\begin{cases}\lambda^2-1=0\\ 2\lambda^2+\lambda-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=1 \text{ ή } \lambda=-1\\ \lambda=1 \text{ ή } \lambda=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$. Άρα $\lambda=1$.

Άρα η (σ) παριστάνει ευθεία , όταν και μόνο όταν, $\lambda\neq 1$.

ii. α. Η (σ) παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα x΄x, όταν και μόνο όταν:

$$\begin{cases}\lambda^2-1=0\\ 2\lambda^2+\lambda-3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=1 \ \text{η} \ \lambda=-1\\ \lambda\neq 1 \ \text{και} \ \lambda\neq-\dfrac{3}{2}\end{cases}.\text{Αρα } \lambda=-1$$

Επομένως, είναι η ευθεία με εξίσωση: $2y+5=0 \Leftrightarrow y=-\dfrac{5}{2}$

β. Η (σ) παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα y΄y, όταν και μόνο όταν:

$$\begin{cases}\lambda^2-1\neq 0\\ 2\lambda^2+\lambda-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda\neq 1 \ \text{και} \ \lambda\neq-1\\ \lambda=1 \ \text{η} \ \lambda=-\dfrac{3}{2}\end{cases}. \text{ Αρα } \lambda=-\dfrac{3}{2}$$

Επομένως , είναι η ευθεία με εξίσωση : x - 4 = 0 ⇔ x = 4.

Άσκηση 3

Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες με εξισώσεις:
(ε_1) : y = μx και (ε_2) : (μ + 1) x = (1 - μ)y, $\mu\in R$.

Λύση

Θα υπολογίσουμε τη γωνία δύο διανυσμάτων παράλληλων προς τις προηγούμενες ευθείες. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\delta}_1=(1,\mu), \vec{\delta}_2=(1-\mu,1+\mu)$

Είναι: $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2}\right)=\dfrac{\vec{\delta}_1\cdot\vec{\delta}_2}{\left|\vec{\delta}_1\right|\cdot\left|\vec{\delta}_2\right|}=\dfrac{1\cdot(1-\mu)+\mu\cdot(1+\mu)}{\sqrt{1^2+\mu^2}\cdot\sqrt{(1-\mu)^2+(1+\mu)^2}}=$

$$\frac{1+\mu^2}{\sqrt{1^2+\mu^2}\cdot\sqrt{1^2+\mu^2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Επομένως, η οξεία γωνία των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι ίση με τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\delta}_1$ και $\vec{\delta}_2$, που είναι 45^0.

Σχόλιο : Η αμβλεία γωνία των ευθειών, είναι 135^0.

Άσκηση 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-y^2-4\lambda y-2\lambda x-3\lambda^2=0,\ \ \lambda\in R$ **(1)**

α. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ζεύγη καθέτων μεταξύ τους ευθειών.

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων τομής των άπειρων αυτών ζευγών καθέτων ευθειών.

Λύση

α. Είναι: $x^2-y^2-4\lambda y-2\lambda x-3\lambda^2=0 \Leftrightarrow x^2-2\lambda x-y^2-4\lambda y-3\lambda^2=0$

Η παραπάνω είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού ως πρός x με διακρίνουσα:

$\Delta=(-2\lambda)^2-4\left(-y^2-4\lambda y-3\lambda^2\right)=4(2\lambda+y)^2\geq 0$, για κάθε λ πραγματικό.

Επομένως έχει ρίζες:

$$x=\frac{2\lambda-\sqrt{4(2\lambda+y)^2}}{2}=-\lambda-y \quad , \quad x=\frac{2\lambda+\sqrt{4(2\lambda+y)^2}}{2}=3\lambda+y$$

Άρα η εξίσωση (1) παριστάνει τις κάθετες ευθείες με εξισώσεις
$y=-x-\lambda$ και $y=x-3\lambda$.

β. Απο τη λύση του συστήματος: $\begin{cases} y=-x-\lambda \\ y=x-3\lambda \end{cases}$ προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των ευθειών.

Έχουμε: $x-3\lambda=-x-\lambda \Leftrightarrow 2x=2\lambda \Leftrightarrow x=\lambda$,οπότε $y=\lambda-3\lambda \Leftrightarrow y=-2\lambda$

Με απαλοιφή του λ απο τις $\{x=\lambda\ \ ,\ \ y=-2\lambda\}$ παίρνουμε: $y=-2x$

που είναι η εξίσωση του γεωμετρικού τόπου των σημείων τομής των καθέτων μεταξύ τους ευθειών.

Άσκηση 5

Σε καρτεσιανό σύστημα Oxy, η εξίσωση ευθείας:

$$(2\lambda^2+\lambda+1)x-(\lambda^2-\lambda+1)y-(\lambda^2+2\lambda)=0 \text{ όπου } \lambda\in A=\{0,1,2,....,19\}$$

παριστάνει τις πορείες 20 πλοίων που κατευθύνονται σε κάποιο λιμάνι.

α. Να βρεθεί η θέση του λιμανιού.

β. Ανοικτά του λιμανιού στο σημείο (1, 2) υπάρχει φάρος που δε λειτουργεί. Να εξετάσετε αν υπάρχει περίπτωση, κάποιο από τα πλοία να συγκρουστεί με τον φάρο.

γ. Εξετάστε αν κάποιο από τα 20 πλοία κινείται παράλληλα με μικρό σκάφος που κινείται στην ίδια περιοχή και του οποίου η πορεία δίνεται από την εξίσωση $11x-3y-22=0$.

Λύση

α. Το λιμάνι βρίσκεται στο σημείο από το οποίο διέρχονται όλες οι ευθείες με εξισώσεις: $(2\lambda^2+\lambda+1)x-(\lambda^2-\lambda+1)y-(\lambda^2+2\lambda)=0$ (1) για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda\in A$.
Θέτουμε δύο τιμές στο λ και βρίσκουμε έτσι τις εξισώσεις δύο ευθειών από τις (1).
π.χ. για $\lambda=0$ και $\lambda=1$ βρίσκουμε τις ευθείες: $x-y=0$ και $4x-y-3=0$.
Οι ευθείες αυτές τέμνονται στο σημείο του οποίου οι συντεταγμένες είναι λύση του συστήματος :

$$\begin{cases} x-y=0 \\ 4x-y-3=0 \end{cases}$$

που φανερά είναι το σημείο (1, 1). Οι συντεταγμένες του σημείου αυτού επαληθεύουν την εξίσωση (1) για κάθε λ πραγματικό, αφού ισχύει:

$$(2\lambda^2+\lambda+1)\cdot 1-(\lambda^2-\lambda+1)\cdot 1-(\lambda^2+2\lambda)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda^2+\lambda+1-\lambda^2+\lambda-1-\lambda^2-2\lambda=0 \Leftrightarrow 0=0$$

Άρα το σημείο (1, 1) ανήκει σε όλες τις ευθείες (1) και συνεπώς το λιμάνι βρίσκεται στη θέση (1, 1).

β. Για να συγκρουστεί κάποιο πλοίο με τον φάρο πρέπει να υπάρχει $\lambda\in\{0,1,2,....,19\}$ τέτοιο ώστε η ευθεία που θα προκύψει να διέρχεται από το σημείο (1, 2).

Όμως: $(2\lambda^2+\lambda+1)1-(\lambda^2-\lambda+1)2-(\lambda^2+2\lambda)=0 \Leftrightarrow -\lambda^2+\lambda-1=0$.

Η τελευταία είναι 2ου βαθμού ως πρός λ με αρνητική διακρίνουσα, οπότε είναι αδύνατη. Έτσι καμία από τις ευθείες (1), δεν διέρχεται από το σημείο (1, 2) και επομένως δεν υπάρχει περίπτωση κάποιο πλοίο να συγκρουστεί με τον φάρο.

γ. Θα προσδιορίσουμε το λ ώστε κάποια από τις ευθείες (1) να έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{11}{3}$.

Πρέπει: $\frac{2\lambda^2+\lambda+1}{\lambda^2-\lambda+1}=\frac{11}{3} \Leftrightarrow 5\lambda^2-14\lambda+8=0 \Leftrightarrow \lambda=2$ ή $\lambda=\frac{4}{5}$. Η $\lambda=\frac{4}{5}$ απορρίπτεται.

Για $\lambda=2$, παίρνουμε την εξίσωση $11x-3y-8=0$ (2).
Άρα, υπάρχει πλοίο, αυτό που η πορεία του καθορίζεται από την εξίσωση (2), που κινείται παράλληλα προς το μικρό σκάφος.

Παρατήρηση:

Για $\lambda = \frac{4}{5}$ προφανώς θα πάρουμε την ίδια εξίσωση, αφού από ένα σημείο μπορούμε να φέρουμε μόνο μία παράλληλη προς γνωστή ευθεία.

Άσκηση 6

Τί γραμμές παριστάνουν οι εξισώσεις:

α. $(x+y+2)^2-4=0$ **(1)** **β.** $|x|-|y|=0$ **(2)** **γ.** $x^2-2xy+y^2-5x+5y+6=0$ **(3)**

Λύση

α. Μετασχηματίζουμε την (1) και έχουμε:

$(x+y+2-2)(x+y+2+2)=0 \Leftrightarrow (x+y)(x+y+4)=0 \Leftrightarrow x+y=0$ ή $x+y+4=0$.

Επομένως η (1) παριστάνει τις δύο παραπάνω ευθείες.

β. $|x|-|y|=0 \Leftrightarrow x \pm y=0$. Επομένως η (2) παριστάνει δύο ευθείες $y=x$ και $y=-x$ (είναι οι διχοτόμοι των γωνιών xOy και $x'Oy$).

γ. Από την (3) $\Leftrightarrow (x-y)^2-5(x-y)+6=0$. Θέτουμε $x-y=t$ και έχουμε: $t^2-5t+6=0$.

Η τελευταία σχέση είναι τριώνυμο προς t και έχει ρίζες $t_1=2$ και $t_2=3$.

Επομένως: $x-y=2$ ή $x-y=3$

Η (3) παριστάνει αυτές τις δύο ευθείες.

Άσκηση 7

Δίνεται η "οικογένεια των ευθειών" με εξίσωση $(x-y-5)+\lambda(x-6y-5)=0$, $\lambda \in R$. Να εξετάσετε αν η ευθεία (ε): $x+2002y=5$ ανήκει σε αυτή την "οικογένεια ευθειών".

Λύση

Βρίσκουμε το σημείο από το οποίο περνούν όλες οι ευθείες της δοσμένης οικογένειας, (το κέντρο της δέσμης όπως λέγεται), λύνοντας το σύστημα τους.

$$\left.\begin{array}{l} x-y-5=0 \\ x-6y-5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=5 \text{ και } y=0.$$

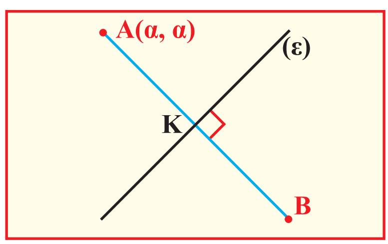
Επομένως όλες οι ευθείες διέρχονται από το σημείο $K(5, 0)$.

Η ευθεία (ε) ανήκει σε αυτή την οικογένεια ευθειών, αφού διέρχεται και αυτή από το σημείο Κ. (Οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν την εξίσωσή της).

Άσκηση 8

Το σημείο Α κινείται επάνω στην ευθεία $y=x$. Να δείξετε ότι το συμμετρικό του ως προς την ευθεία (ε): $x+2y+1=0$ κινείται επάνω στην ευθεία με εξίσωση :

$$y=7x+2.$$



Λύση

Επειδή το σημείο Α κινείται πάνω στην ευθεία $y=x$, έχει συντεταγμένες $A(\alpha,\alpha)$.

Είναι $\lambda_\varepsilon = -\frac{1}{2}$. Επειδή $AK \perp (\varepsilon) \Leftrightarrow \lambda_{AK}=2$

Επομένως η εξίσωση της ΑΚ είναι: $y - \alpha = 2(x - \alpha) \Leftrightarrow y - \alpha = 2x - 2\alpha \Leftrightarrow y = 2x - \alpha$.

Λύνουμε το σύστημα των (ε) και ΑΚ για να βρούμε το σημείο Κ:

$$\begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ y = 2x - \alpha \end{cases}$$

Είναι: $x + 2(2x - \alpha) + 1 = 0 \Leftrightarrow x + 4x - 2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow 5x = 2\alpha - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{2\alpha - 1}{5}$

$$y = 2x - \alpha \Leftrightarrow y = 2\frac{2\alpha - 1}{5} - \alpha \Leftrightarrow y = \frac{4\alpha - 2 - 5\alpha}{5} \Leftrightarrow y = \frac{-\alpha - 2}{5}$$

Άρα το σημείο Κ έχει συντεταγμένες: $K\left(\dfrac{2\alpha - 1}{5}, \dfrac{-\alpha - 2}{5}\right)$

Το σημείο Κ είναι μέσο του ΑΒ. Από τον τύπο που μας δίνει το μέσο ευθυγράμμου τμήματος, γνωρίζοντας το Α και το Κ μπορούμε να υπολογίσουμε το Β. Έτσι έχουμε:

$$\frac{x_A + x_B}{2} = x_K \Leftrightarrow \frac{\alpha + x_B}{2} = \frac{2\alpha - 1}{5} \Leftrightarrow 5\alpha + 5x_B = 4\alpha - 2 \Leftrightarrow x_B = \frac{-\alpha - 2}{5}$$

$$\frac{y_A + y_B}{2} = y_K \Leftrightarrow \frac{\alpha + y_B}{2} = \frac{-\alpha - 2}{5} \Leftrightarrow 5\alpha + 5y_B = -2\alpha - 4 \Leftrightarrow y_B = \frac{-7\alpha - 4}{5}$$

Επομένως: $B\left(\dfrac{-\alpha - 2}{5}, \dfrac{-7\alpha - 4}{5}\right)$

Έχουμε λοιπόν το σημείο $B\left(\dfrac{-\alpha - 2}{5}, \dfrac{-7\alpha - 4}{5}\right)$ με μια παράμετρο α και θέλουμε να βρούμε την ευθεία στην οποία κινείται.

Θέτουμε: $x = \dfrac{-\alpha - 2}{5}$ (1) και $y = \dfrac{-7\alpha - 4}{5}$ (2) και απαλείφουμε την παράμετρο α.

Απο (1) προκύπτει $\alpha = -5x - 2$ και αντικαθιστώντας στη (2):

$$y = \frac{-7(-5x - 2) - 4}{5} \Leftrightarrow 5y = 35x + 14 - 4 \Leftrightarrow 35x - 5y + 10 = 0 \Leftrightarrow 7x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 7x + 2$$

Παρατήρηση :

Εδώ επειδή δίνεται η ευθεία στην οποία κινείται το Β θα μπορούσαμε απλώς να εξετάσουμε αν η δοσμένη ευθεία επαληθεύεται απο τις συντεταγμένες του.

Άσκηση 9

Να υπολογισθεί ο $\kappa \in R$ έτσι ώστε η ευθεία (ζ): $-\kappa x + y - 3 = 0$ να διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών (ε_1): $2x + 5y = 12$ και (ε_2): $x - y + 1 = 0$.

Λύση

Βρίσκουμε το σημείο τομής των δύο ευθειών λύνοντας το σύστημά τους:

$$\begin{cases} (\varepsilon_1): 2x + 5y = 12 \\ (\varepsilon_2): x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ και } y = 2.$$ Δηλαδή οι δύο ευθείες τέμνονται στο σημείο Α(1, 2).

Για να περνάει η (ζ) από το Α πρέπει να επαληθεύεται η εξίσωσή της από τις συντεταγμένες του Α. Επομένως: $-\kappa \cdot 1 + 2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \kappa = -1$

Άσκηση 10

Δίνεται η εξίσωση της ευθείας $(\varepsilon): Ax + B\psi + \Gamma = 0$ **με** $A \neq 0$ **και** $B \neq 0$.

Να δείξετε ότι:

α. Τέμνει τους άξονες στα σημεία $K\left(-\frac{\Gamma}{A}, 0\right)$ **και** $\Lambda\left(0, -\frac{\Gamma}{B}\right)$

β. Αν ονομάσουμε τις συντεταγμένες $-\frac{\Gamma}{A} = \alpha$ **και** $-\frac{\Gamma}{B} = \beta$, **η εξίσωση (ε) παίρνει τη μορφή** $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$.

Λύση

α. Για να βρούμε τα σημεία στα οποία μία ευθεία τέμνει τους άξονες θέτουμε στην εξίσωσή της διαδοχικά $x = 0$ και $y = 0$.

Έτσι έχουμε:

Για $y = 0$: $Ax + \Gamma = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\Gamma}{A}$, $A \neq 0$, δηλαδή η ευθεία τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $K\left(-\frac{\Gamma}{A}, 0\right)$

Για $x = 0$: $By + \Gamma = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{\Gamma}{B}$, $B \neq 0$, δηλαδή η ευθεία τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $\Lambda\left(0, -\frac{\Gamma}{B}\right)$.

ii. $Ax + By + \Gamma = 0 \Leftrightarrow Ax + By = -\Gamma \Leftrightarrow \frac{Ax}{-\Gamma} + \frac{By}{-\Gamma} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{-\frac{\Gamma}{A}} + \frac{y}{-\frac{\Gamma}{B}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$

Παρατήρηση:

(Οι αριθμοί $\alpha = -\frac{\Gamma}{A}$ και $\beta = -\frac{\Gamma}{B}$ λέγονται **συντεταγμένες επί την αρχή** της ευθείας (ε)).

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού μ η εξίσωση: $(\mu^2 - \mu)x + (\mu^2 - 1)y + \mu + 3 = 0$ παριστάνει ευθεία γραμμή;
Πότε η ευθεία αυτή είναι παράλληλη με τον άξονα $y'y$;
Πότε είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$;
Πότε περνάει από την αρχή των αξόνων;

(**Υπ.:** Χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο 1)

(**Απ.:** Για να είναι ευθεία πρέπει: $\mu \neq 1$. Για να είναι παράλληλη στον $y'y$ πρέπει $\mu = -1$. Για να είναι παράλληλη στον $x'x$ πρέπει $\mu = 0$. Για να περνάει από το Ο πρέπει $\mu = -3$)

2. Δείξτε ότι η εξίσωση: $\left(\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta}{2}\right)x+\left(\eta\mu^2\frac{\theta}{2}\right)y+\sigma\upsilon\nu\theta-1=0$ παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του $\theta\in[0,\pi]$. Δείξτε ότι όλες οι ευθείες που περιγράφονται με την παραπάνω εξίσωση διέρχονται απο σταθερό σημείο.

(**Απ.:** Η $Ax+By+\Gamma=0$ είναι ευθεία όταν $A\neq 0$ ή $B\neq 0$ (Μέθοδος 1). Για το β΄ ερώτημα χρησιμοποιήστε τη μέθοδο 2). Είναι (0, 2)

3. Θεωρούμε την εξίσωση: $\left(2\alpha^2+\alpha+1\right)x+\left(\alpha^2-\alpha+1\right)y-\alpha^2-2\alpha=0$, $\alpha\in R$

i. Για ποιες τιμές του α η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία;
ii. Για τις τιμές του α που θα βρείτε να εξετάσετε αν οι αντίστοιχες ευθείες διέρχονται απο το ίδιο σημείο.

(**Απ.:** [i. Για κάθε $\alpha\in R$ / ii. το (1, -1)]. (Όπως η άσκηση 2))

4. Δίνεται η ευθεία με εξίσωση (ε): $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ με $|\alpha|+|\beta|\neq 0$.
Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται απο το σημείο (x_1 , y_1) και είναι παράλληλη στην (ε) έχει εξίσωση: $\alpha\left(x-x_1\right)+\beta\left(y-y_1\right)=0$.

(**Απ.:** Από τη ζητούμενη ευθεία γνωρίζουμε ένα σημείο και το συντελεστή διεύθυνσης. Ελέγξτε την περίπτωση $\beta=0$)

5. Αν 3x + y - 5 = 0 και x - 3y + 5 = 0 είναι οι εξισώσεις δύο πλευρών παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και Κ (2,4) είναι το κέντρο του, να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

(**Υπ.:** Δείξτε ότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και στη συνέχεια, ότι $(AB)=(B\Gamma)$)

6. Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις: (ε_1): 2x - 3y = 0 και (ε_2): -x + 4y +3 = 0 και το σημείο Α(-1 ,2). Να βρείτε σημείο Μ της ε_2 τέτοιο ώστε το μέσο του ΑΜ να ανήκει στην ε_1.

(**Απ.:** $M\left(\frac{23}{5},\frac{2}{5}\right)$)

7. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με Α(- 1,9) και διαγωνίους δ_1 :2x - y + 1 = 0 και δ_2 : 3x + y - 6 = 0. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των άλλων κορυφών του ορθογωνίου.

(**Απ.:** $\left(\Gamma(3,-3),B\left(1+\sqrt{2}\right),\Delta\left(1-\sqrt{2},3-2\sqrt{2}\right)\right)$)

8. Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις: $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$, $\frac{x}{\beta}+\frac{y}{\alpha}=1$, με $\alpha\beta\neq 0$ και $\alpha\neq\pm\beta$

i. Να βρείτε το κοινό τους σημείο , έστω Μ.
ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΟΜ, όπου Ο η αρχή των αξόνων.
iii. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΜ με Α(α,β).

(**Απ.: i.** $M\left(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta},\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)$ **ii.** $OM: y = x$, **iii.** $AM: y-\beta=\frac{\beta^2}{\alpha^2}(x-\alpha)$)

9. Ορθή γωνία ΒΑΓ στρέφεται γύρω απο την κορυφή της Α(4,6) και οι πλευρές της τέμνουν τους θετικούς ημιάξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ.

(**Απ.:** $2x+3y=13$, $0\le x\le\frac{13}{2}$.)

Ε ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Ορθή γωνία ΒΑΓ στρέφεται γύρω απο την κορυφή της Α(1,1) και οι πλευρές της τέμνουν τους θετικούς ημιάξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της προβολής Μ του Α πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ.

(**Απ:** $x+2y=2$, $0\le x\le 2$)