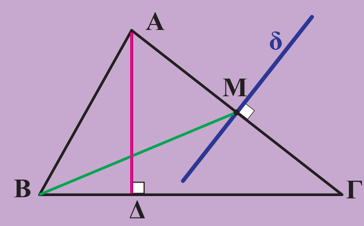
2^{o} Κεφάλαιο

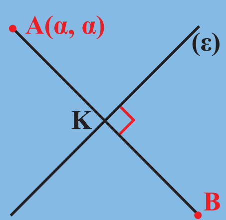
4^{o} μάθημα

Η ευθεία στο επίπεδο



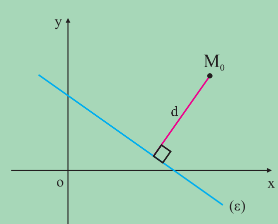
5^{o} μάθημα

Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας



6^{o} μάθημα

Απόσταση σημείου από ευθεία



Μάθημα 4

Η ευθεία στο επίπεδο

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

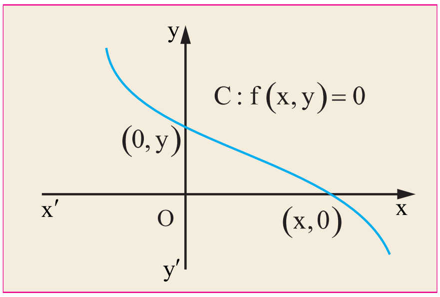
Ορισμός

Μια εξίσωση $f(x, y) = 0$ με δύο αγνώστους x, y λέγεται **εξίσωση μιας γραμμής C** όταν οι συντεταγμένες των σημείων της C και μόνον αυτές την επαληθεύουν.
Τότε γράφουμε $C: f(x, y) = 0$.

Παρατηρήσεις

1. Το σημείο Ρ(α, β) ανήκει στη γραμμή C ή ισοδύναμα η γραμμή C διέρχεται από το σημείο Ρ(α, β), αν και μόνο αν, τα α,β επαληθεύουν την εξίσωση C, δηλ. $f(\alpha, \beta) = 0$.

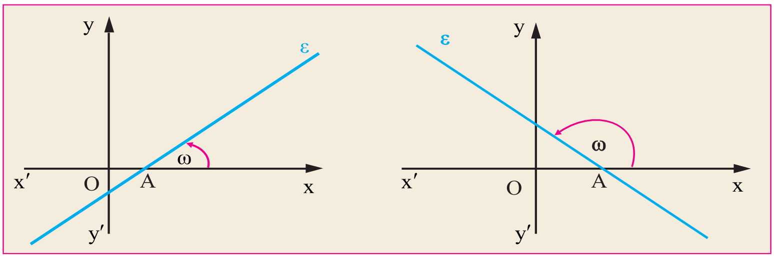
2. Η γραμμή C τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y σε σημεία των οποίων οι συντεταγμένες είναι λύσεις των εξισώσεων $f(x, 0) = 0$ και $f(0, y) = 0$ αντίστοιχα.
Με άλλα λόγια, για να βρούμε που τέμνει τον άξονα x΄x μια γραμμή, θέτουμε στην εξίσωσή της $y = 0$ και λύνουμε ως προς το x, ενώ για να βρούμε που τέμνει τον y΄y θέτουμε $x = 0$ στον τύπο της και λύνουμε ως προς το y.



3. Για να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου τομής δύο γραμμών, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους.

Ορισμός

Έστω Oxy σύστημα συντεταγμένων και (ε) μία ευθεία που τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Α.



Τη γωνία ω που διαγράφει ο άξονας x΄x όταν στραφεί γύρω από το Α κατά τη θετική φορά (αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού) μέχρι να συμπέσει με την ευθεία (ε) τη λέμε γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα x΄x.
Ορίζουμε ως **συντελεστή διεύθυνσης ή κλίση της ευθείας** (ε) την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα x΄x.

Παρατηρήσεις

1. Αν η ευθεία (ε) είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\omega = 0$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) είναι $\lambda = \varepsilon\varphi 0 = 0$.

2. Αν η ευθεία (ε) είναι παράλληλη προς τον y΄y, σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\omega = \frac{\pi}{2}$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) δεν ορίζεται.

3. Σε κάθε περίπτωση για την γωνία ω ισχύει $0 \le \omega < \pi$.

4. Όταν μια ευθεία (ε) και ένα διάνυσμα $\vec{\delta}$ είναι παράλληλα έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.

5. Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$ με $x_A \neq x_B$ είναι $\lambda = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, ενώ αν $x_A = x_B$ ο συντελεστής διεύθυνσης λ δεν ορίζεται.

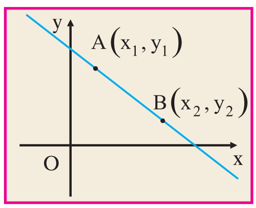
6. Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα τότε:

$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \text{ και } \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

Εξίσωση ευθείας

α. Η εξίσωση ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι:

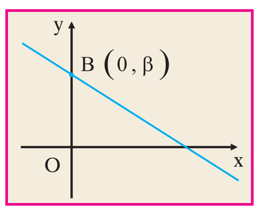
$$\boxed{\varepsilon: y - y_0 = \lambda(x - x_0)}$$



β. Η εξίσωση ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $A \neq B$.

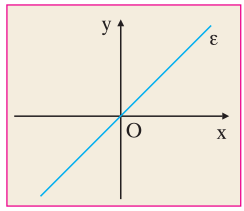
Αν $x_1 \neq x_2$ ισχύει $\lambda_\varepsilon = \lambda_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ οπότε είναι:

$$\boxed{\varepsilon: \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$



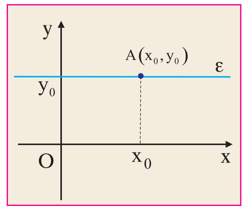
γ. Η εξίσωση της ευθείας (ε) που τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0, β) είναι $\varepsilon: \quad y = \lambda x + \beta$

όπου λ ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε)



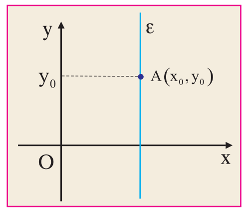
δ. Η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο O(0, 0) και δεν είναι ο άξονας y΄y είναι:

$$\boxed{\varepsilon: \quad y = \lambda x}$$



ε. Η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $A(x_o, y_o)$ και είναι παράλληλη στον άξονα x΄x είναι:

$$\boxed{\varepsilon: y = y_0}$$



στ. Η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $A(x_o, y_o)$ και είναι παράλληλη στον άξονα y΄y είναι:

$$\boxed{\varepsilon: x = x_0}$$

B. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία - Μέθοδος 1

Για να προσδιορίσουμε το συντελεστή διεύθυνσης ευθείας χρειαζόμαστε:
- **α.** τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x΄x ή
- **β.** δύο σημεία της ευθείας ή
- **γ.** παραλληλία ή καθετότητα της ευθείας με μια άλλη ευθεία .

Αν γνωρίζουμε την εξίσωση μιας ευθείας, ο συντελεστής διεύθυνσης λ είναι ο συντελεστής του x, όταν η εξίσωση είναι λυμένη ως προς y, για παράδειγμα η ευθεία

$3x + 2y = 5$ γίνεται: $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{3}{2}$.

Παράδειγμα 1.

Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης ευθείας (ε) η οποία:
- **α. Σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία π/4.**
- **β. Διέρχεται από τα σημεία: A(3, 1), B(6, 5)**
- **γ. Διέρχεται από τα σημεία: A(5, 1), B(-3, 1)**
- **δ. Διέρχεται από τα σημεία: A(6, 1), B(6, -4)**
- **ε. Είναι κάθετη στην ευθεία (ζ): $y = 2x + 1$.**
- **στ. Είναι παράλληλη στην ευθεία (η): $2x + y = 4$**

Λύση

α. Προφανώς $\lambda = \text{εφ}\,\dfrac{\pi}{4} = 1$.

β. Αφού γνωρίζουμε δύο σημεία της ευθείας με διαφορετικές τετμημένες χρησιμοποιούμε τον τύπο: $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, οπότε: $\lambda_\varepsilon = \dfrac{5-1}{6-3} = \dfrac{4}{3}$.

γ. Είναι $\lambda = \dfrac{-1-1}{-3-5} = 0$. Δηλαδή η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στον x΄x.

δ. Δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης, αφού $x_A = 6$ και $x_B = 6$.

ε. Η ευθεία (ζ) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\zeta = 2$.

Επειδή $(\varepsilon) \perp (\zeta) \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot 2 = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -\dfrac{1}{2}$

στ. Είναι $\lambda_\eta = -2$. Επομένως $\lambda_\varepsilon = -2$, αφού είναι παράλληλες.

Κατηγορία - Μέθοδος 2

Για να βρούμε την εξίσωση μιας ευθείας (ε) χρειαζόμαστε:

α. Τις συντεταγμένες ενός σημείου της και το συντελεστή διεύθυνσής της ή

β. Τις συντεταγμένες δύο σημείων της.

Οι συντεταγμένες σημείου που ανήκει σε δύο ευθείες προσδιορίζονται από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων των δύο ευθειών.

Παράδειγμα 1

Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζουν τα σημεία στις παρακάτω περιπτώσεις

i. Α (1, 2) και Β (1, - 3) ii. Α (1, 2), Β (-3, 2) iii. Α (1, 2) και Β (- 2, 4)

Λύση

i. Τα σημεία Α, Β έχουν ίδια τετμημένη x = 1 οπότε η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι x = 1.

ii. Τα σημεία Α, Β έχουν ίδια τεταγμένη y = 2 οπότε η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι y = 2.

iii. Είναι $\lambda_{AB} = \dfrac{4-2}{-2-1} = -\dfrac{2}{3}$ οπότε η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι $y - 2 = -\dfrac{2}{3}(x-1)$.

Παράδειγμα 2

Οι κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ είναι Α (-1, 2), Β (3, 4), Γ (- 5, 6). Να βρεθούν:

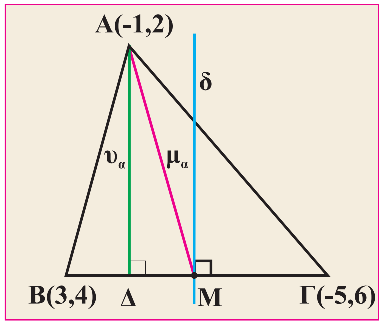
α. Η εξίσωση του ύψους υ_α.

β. Η εξίσωση της διαμέσου μ_α.

γ. Η εξίσωση της μεσοκαθέτου δ της πλευράς ΒΓ του τριγώνου.

Λύση

α. Γνωρίζουμε ότι το ύψος υ_α διέρχεται απο το σημείο Α (- 1, 2) και μπορούμε να προσδιορίσουμε το συντελεστή διεύθυνσής του $\lambda_{\upsilon_\alpha}$ αφού $B\Gamma \perp \upsilon_\alpha$.



Είναι $λ_{ΒΓ} = \frac{6-4}{-5-3} = -\frac{1}{4}$ και $λ_{ΒΓ} \cdot λ_{υ_α} = -1$ οπότε $λ_{υ_α} = 4$. Έτσι η εξίσωση του $υ_α$ είναι:

$y - 2 = 4(x+1) \Leftrightarrow y = 4x + 6$

β. Η διάμεσος $μ_α$ διέρχεται απο το σημείο Α (- 1, 2) και μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα δεύτερο σημείο της το μέσο Μ του ΒΓ.

Είναι $M\left(\frac{x_B + x_Γ}{2}, \frac{y_B + y_Γ}{2}\right) = (-1, 5)$

Τα σημεία Α (- 1, 2) και Μ (- 1, 5) έχουν ίδια τετμημένη x = - 1, οπότε η εξίσωση της $μ_α$ είναι: x = - 1.

γ. Η μεσοκάθετος δ του ΒΓ διέρχεται απο το σημείο Μ (- 1, 5) και μπορούμε να προσδιορίσουμε το συντελεστή διεύθυνσης $λ_δ$ αυτής ,αφού $δ//υ_α$.

Είναι $λ_{υ_α} = 4 = λ_δ$. Έτσι η εξίσωση της δ είναι: $y - 5 = 4(x+1) \Leftrightarrow y = 4x + 9$

Κατηγορία - Μέθοδος 3

Για να βρούμε την εξίσωση μιας ευθείας (ε) που διέρχεται από γνωστό σημείο $P(x_0, y_0)$ και έχει μία επιπλέον ιδιότητα, γράφουμε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το $P(x_0, y_0)$:

$$δ: x = x_0 \quad \text{και} \quad η: y - y_0 = λ(x - x_0),\ λ \in R$$

i. Εξετάζουμε αν η γνωστή ευθεία $δ: x = x_0$ έχει ή όχι την αναφερόμενη ιδιότητα.

ii. Απαιτούμε οι ευθείες (η) να έχουν την ιδιότητα και έτσι προσδιορίζουμε το $λ \in R$.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο Μ (1, 4) τέμνει τις ευθείες $δ_1: y = -x + 4$, $δ_2: y = 2x + 3$ **στα Α, Β αντίστοιχα έτσι ώστε το Μ να είναι μέσο του ΑΒ.**

Λύση

Οι εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το Μ (1, 4) είναι οι:

$$δ: x = 1 \quad ή \quad η: y - 4 = λ(x-1) \Leftrightarrow y = λx + 4 - λ$$

Έστω Α το σημείο τομής των: $\begin{cases} δ: x = 1 \\ δ_1: y = -x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$ Τότε Α (1, 3)

Έστω Β το σημείο τομής των: $\begin{cases}\delta: x=1\\ \delta_2: y=2x+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=5\end{cases}$, τότε Β (1, 5)

Ισχύει $2x_M = x_A + x_B$ και $2y_M = y_A + y_B$ οπότε Μ μέσον του ΑΒ και η ευθεία $\delta: x=1$ είναι λύση του προβλήματος.
Έστω Α το σημείο τομής των η και δ_1:

$$\begin{cases}\eta: y=\lambda x+4-\lambda\\ \delta_1: y=-x+4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda x+4-\lambda=-x+4\\ y=-x+4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{\lambda}{\lambda+1},\ \lambda\neq -1\\ y=-x+4\end{cases} \text{Άρα } x_A=\frac{\lambda}{\lambda+1},\ \lambda\neq -1$$

Έστω Β το σημείο τομής των :

$$\begin{cases}\eta: y=\lambda x+4-\lambda\\ \delta_2: y=2x+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda x+4-\lambda=2x+3\\ y=2x+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{\lambda-1}{\lambda-2}, \lambda\neq 2\\ y=2x+3\end{cases} \text{Άρα } x_B=\frac{\lambda-1}{\lambda-2},\ \lambda\neq 2$$

Αφού το Μ είναι μέσον του ΑΒ πρέπει να ισχύει :

$2x_M = x_A + x_B \Leftrightarrow 2=\dfrac{\lambda}{\lambda+1}+\dfrac{\lambda-1}{\lambda-2} \Leftrightarrow 2\lambda^2-2\lambda-4=\lambda^2-2\lambda+\lambda^2-1 \Leftrightarrow -4=-1$, που είναι αδύνατη.

Αν $\lambda=-1$ ή $\lambda=2$ θα είναι $\eta // \delta_1$ ή $\eta // \delta_2$ και δεν υπάρχουν σημεία τομής.
Επομένως η ζητούμενη ευθεία είναι η $x = 1$.

Παρατήρηση :
Αφού βρήκαμε την ευθεία $x = 1$ μπορούσαμε να αποκλείσουμε την ύπαρξη άλλης ευθείας διότι , αν υπήρχε κι'άλλη ευθεία που θα έτεμνε τις δ_1,δ_2 σε σημεία Γ,Δ με Μ μέσο του ΓΔ το τετράπλευρο ΑΒΓΔ θα ήταν παραλληλόγραμμο.Πράγμα που δεν γίνεται αφού οι δ_1,δ_2 δεν είναι παράλληλες. Η παραπάνω απόδειξη έγινε για διδακτικούς λόγους.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1.

Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x΄x η καθεμιά από τις παρακάτω ευθείες:

α. Η ευθεία που περνά από τα σημεία Α(–3, 2), Β(–7, 6).

β. Η ευθεία που περνά από τα σημεία Α(10, 1), Β(–10, 1).

γ. Η ευθεία που είναι κάθετη προς την ευθεία (ζ): $y=\dfrac{-\sqrt{3}}{3}x+1$.

δ. Η ευθεία που περνά από τα σημεία Α(7, 3), Β(7, 1).

ε. Η ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων και το σημείο Α(–2, –2).

Λύση

α. $\lambda=\dfrac{6-2}{-7+3}=\dfrac{4}{-4}=-1$. Η ζητούμενη γωνία είναι $\hat{\varphi}=\dfrac{3\pi}{4}$, αφού $\text{εφ}\dfrac{3\pi}{4}=-1$.

β. Είναι $\lambda = \dfrac{1-1}{-10-10} = 0$. Επομένως $\hat{\varphi} = 0^0$ αφού $\varepsilon\varphi 0^0 = 0$.

γ. $\lambda_\zeta = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Επειδή $(\varepsilon) \perp (\zeta) \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \sqrt{3}$. Άρα $\hat{\varphi} = 60^o$.

δ. Παρατηρούμε ότι δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης για την ευθεία (ε). Επομένως είναι παράλληλη στον άξονα y΄y και η γωνία που μας ζητείται είναι: $\hat{\varphi} = 90^o$

ε. Είναι $\lambda = \dfrac{-2-0}{-2-0} = 1$. Επομένως: $\hat{\varphi} = 45^o$ αφού $\varepsilon\varphi 45^o = 1$

Άσκηση 2.

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο Α(1, 3) και:

α. Είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha} = (5, 2)$

β. Είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\beta} = (0, 6)$

γ. Διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Λύση

α. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ έχει συντελεστή διεύθυνσης: $\dfrac{2}{5}$. Επομένως: $\lambda_\varepsilon = \dfrac{2}{5}$.

Η ευθεία (ε) διέρχεται απο το γνωστό σημείο Α(1, 3) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = \dfrac{2}{5}$.

Άρα έχει εξίσωση (ε): $y - 3 = \dfrac{2}{5}(x-1)$.

β. Είναι: $\vec{\beta}$// y΄y. Επομένως (ε) // y΄y και αφού διέρχεται από το σημείο Α(1, 3) έχει εξίσωση: $x = 1$.

γ. Αφού η (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι της μορφής: $y = \lambda x$. Επίσης διέρχεται από το σημείο Α(1, 3), επομένως οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν.
Έτσι: $3 = \lambda \cdot 1 \Leftrightarrow \lambda = 3$. Άρα (ε): $y = 3x$.

Άσκηση 3.

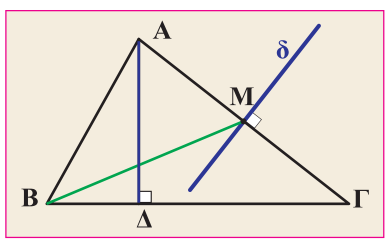
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με Α(2, –1), Β(4, 1) και Γ(2, 7).
Να βρείτε τις εξισώσεις:

α. Της πλευράς ΒΓ.

β. Του ύψους ΑΔ

γ. Της διαμέσου ΒΜ

δ. Της μεσοκαθέτου της πλευράς ΑΓ



Λύση

α. Γνωρίζουμε δύο σημεία της ΒΓ. Βρίσκουμε το $\lambda_{B\Gamma}$ από τον τύπο: $\lambda = \dfrac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B}$ και από τον τύπο $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$, την εξίσωσή της.

Έιναι: $\lambda_{ΒΓ} = \dfrac{7-1}{2-4} = -3$. Επομένως ΒΓ: $y - 1 = -3(x - 4)$.

β. Γνωρίζουμε ένα σημείο του ύψους ΑΔ το Α και μπορούμε να βρούμε το συντελεστή διεύθυνσης λ διότι $ΑΔ \perp ΒΓ$. Είναι: $\lambda_{ΒΓ} = -3$.

$$ΑΔ \perp ΒΓ \Leftrightarrow \lambda_{ΑΔ} \cdot \lambda_{ΒΓ} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{ΑΔ} \cdot (-3) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{ΑΔ} = \frac{1}{3}.$$

Επομένως ΑΔ: $y + 1 = \dfrac{1}{3} \cdot (x - 2)$.

γ. Γνωρίζουμε το σημείο της Β της διαμέσου και μπορούμε να υπολογίσουμε το Μ ως μέσον της ΑΓ.

Είναι: $M\left(\dfrac{x_Α + x_Γ}{2}, \dfrac{y_Α + y_Γ}{2}\right) = \left(\dfrac{2+2}{2}, \dfrac{-1+7}{2}\right) = (2, 3)$.

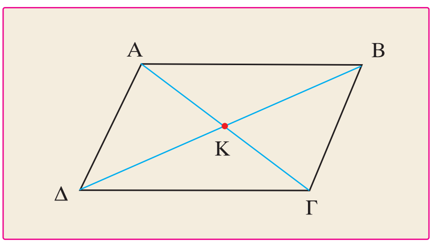
Επομένως, $\lambda_{ΒΜ} = \dfrac{3-1}{2-4} = -1$ και η εξίσωση της ΒΜ είναι: $y-1 = -1(x-4)$.

δ. Γνωρίζουμε το σημείο Μ της μεσοκαθέτου και υπολογίζουμε το συντελεστή διεύθυνσης λ_δ από την καθετότητά της με την ΑΓ.
Παρατηρούμε ότι για την ΑΓ δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης, δηλαδή ΑΓ//y΄y.
Επειδή $\delta \perp ΑΓ$ θα είναι δ//x΄x και αφού περνά από το σημείο Μ(2, 3) έχει εξίσωση: $y = 3$.

Άσκηση 4.

Να δείξετε ότι τα σημεία Α(–1, –2), Β(3, –1), Γ(4, 2), Δ(0, 1) είναι κορυφές παραλληλογράμμου. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του Κ.

Λύση



Είναι $\lambda_{ΑΒ} = \dfrac{-1+2}{3+1} = \dfrac{1}{4}$ και $\lambda_{ΓΔ} = \dfrac{1-2}{0-4} = \dfrac{1}{4}$.

Επομένως ΑΒ//ΓΔ.

Ακόμα $(ΑΒ) = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{17}$ και

$(ΓΔ) = \sqrt{(0-4)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{17}$

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει δύο πλευρές παράλληλες και ίσες. Επομένως είναι παραλληλόγραμμο. Το κέντρο του Κ είναι το μέσο της διαγωνίου ΑΓ.
Άρα:

$$K\left(\frac{-1+4}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 0\right).$$

Άσκηση 5.

α. Να δείξετε ότι τα σημεία Α(1, 3), Β(2, 6), Γ(–5, –15) είναι συνευθειακά.

β. Το ίδιο για τα σημεία Α(5, –4), Β(–2, 3), Γ(t, 1 – t), $t \in R$.

γ. Το ίδιο για τα σημεία Α(1, 3), Β(1, –2), Γ(1, 1).

Λύση

Για να δείξουμε ότι τρία σημεία είναι συνευθειακά, αρκεί να δείξουμε:

i. $\lambda_{A\Gamma} = \lambda_{B\Gamma}$ *ή* $\lambda_{A\Gamma} = \lambda_{AB}$ *(αν ορίζονται οι αντίστοιχοι συντελεστές).*

ii. *Ένα από τα τρία σημεία ανήκει στην ευθεία που ορίζουν τα άλλα δύο.*

iii. *Δύο από τα διανύσματα* $\vec{AB}, \vec{A\Gamma}, \vec{B\Gamma}$ *είναι συγγραμμικά.*

α. $\lambda_{AB} = 3$, $\lambda_{A\Gamma} = \dfrac{-18}{-6} = 3$. Άρα ΑΒ//ΑΓ και αφού έχουν κοινό το σημείο Α, ταυτίζονται.

Συνεπώς τα Α, Β, Γ συνευθειακά.

β. Επειδή $\lambda_{AB} = \dfrac{-7}{7} = -1$ η ΑΒ έχει εξίσωση : $y + 4 = -1(x - 5) \Leftrightarrow y = -x + 1$.

Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες του Γ στην εξίσωση της ΑΒ και παρατηρούμε ότι την επαληθεύουν, αφού: $1 - t = -t + 1$. Επομένως το Γ ανήκει στην ευθεία ΑΒ.

γ. Τα τρία σημεία έχουν την ίδια τετμημένη. Άρα βρίσκονται επάνω στην ευθεία $x = 1$.

Άσκηση 6.

Δίνεται η ευθεία (ε): y = x + 1 και το σημείο Α(3, 1). Να βρείτε:

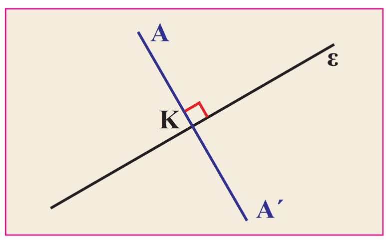
α. Την προβολή του Α πάνω στην (ε).

β. Το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία (ε).

Λύση

α. Είναι $\lambda_\varepsilon = 1$. Επειδή $AK \perp \varepsilon$ θα είναι $\lambda_{AK} = -1$.
Επομένως ΑΚ: $y - 1 = -1(x - 3) \Leftrightarrow y = -x + 4$.
Το σημείο Κ είναι το σημείο τομής των ευθειών (ε) και ΑΚ και το βρίσκουμε λύνοντας το σύστημα των εξισώσεών τους.

$$\left.\begin{array}{l} y = x + 1 \\ y = -x + 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow y = \frac{5}{2} \text{ και } x = \frac{3}{2}. \text{Άρα: } K\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$



β. Το Κ είναι μέσο του ΑΑ΄. Επομένως:

$$\left.\begin{array}{l} x_K = \dfrac{x_A + x_{A'}}{2} \\ y_K = \dfrac{y_A + y_{A'}}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x_{A'} = 2x_K - x_A \\ y_{A'} = 2y_K - y_A \end{array}\right\} \Leftrightarrow x_{A'} = 0 \text{ και } y_{A'} = 4 . \text{ Άρα } A'(0, 4).$$

Άσκηση 7

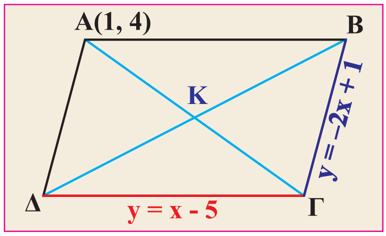
Δίνονται οι εξισώσεις δύο πλευρών παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, (ε_1): y = x – 5 και (ε_2): y = –2x + 1, καθως και οι συντεταγμένες μίας κορυφής του (1, 4). Να βρείτε:

α. Τις εξισώσεις των δύο άλλων πλευρών.

β. Τις συντεταγμένες των κορυφών του.

Λύση

Οι συντεταγμένες του σημείου (1,4), δεν επαληθεύουν καμμία από τις εξισώσεις των (ε_1) και (ε_2), δηλαδή το σημείο (1,4) δεν ανήκει σε αυτές τις ευθείες. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι το δοσμένο σημείο είναι το Α και οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι οι ΓΔ και ΒΓ αντίστοιχα.



Λύνουμε το σύστημά τους για να βρούμε το Γ:

$$\left.\begin{matrix} y = x - 5 \\ y = -2x + 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x = 2 \text{ και } y = -3, \text{ άρα } Γ(2, -3).$$

Γνωρίζουμε το σημείο Α της ΑΒ και το συντελεστή διεύθυνσής της λ = 1 (αφού ΑΒ//ΓΔ και $\lambda_{ΓΔ} = 1$). Άρα

$$ΑΒ: y - 4 = 1(x - 1) \;\Leftrightarrow\; y = x + 3.$$

Λύνουμε το σύστημα των ΑΒ και ΒΓ και βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σημείου Β:

$$\left.\begin{matrix} y = -2x + 1 \\ y = x + 3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \text{ και } y = \frac{7}{3}. \text{ Άρα } B\left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

Γνωρίζουμε το σημείο Α(1, 4) της ΑΔ και το συντελεστή διεύθυνσής της λ = –2. Επομένως:

$$ΑΔ: y - 4 = -2(x - 1) \Leftrightarrow y = -2x + 6.$$

Το κέντρο Κ του παραλληλογράμμου είναι το μέσον του ΑΓ, άρα: $K\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Το Κ είναι επίσης μέσο του ΒΔ, άρα:

$$x_K = \frac{x_B + x_Δ}{2} \Leftrightarrow x_Δ = 2x_K - x_B = 2\cdot\frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$$

$$y_K = \frac{y_B + y_Δ}{2} \Leftrightarrow y_Δ = 2y_K - y_B = 2\cdot\frac{1}{2} - \frac{7}{3} = \frac{-4}{3}. \quad \text{Άρα } Δ\left(\frac{11}{3}, \frac{-4}{3}\right)$$

Άσκηση 8.

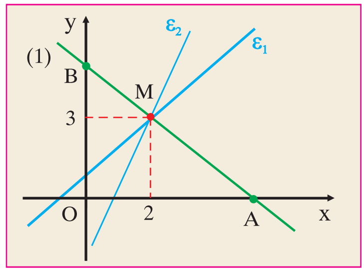
Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που περνούν από το σημείο Μ(2, 3) και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού $\frac{1}{2}$.

Λύση

Όλες οι ευθείες που περνούν από το Μ(2, 3) έχουν εξισώσεις :

$$y - 3 = \lambda(x - 2), \; \lambda \in R \;\; (1) \;\; ή \;\; x = 2$$

Η ευθεία x = 2 δεν είναι λύση της άσκησης, αφού είναι κάθετη στον x΄x και δεν σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες.
Έτσι χρησιμοποιούμε την εξίσωση (1). Η ευθείες που αυτή παριστάνει, τέμνουν τους άξονες στα σημεία Α και Β.



Για y = 0 παίρνουμε απο την (1) :

$(1) \overset{y=0}{\Leftrightarrow} x = \dfrac{2\lambda - 3}{\lambda}$ $\lambda \neq 0$, επομένως $A\left(\dfrac{2\lambda-3}{\lambda}, 0\right)$

(Για λ = 0 η ευθεία είναι παράλληλη στον x΄x).

Για x = 0 παίρνουμε απο την (1) :

$(1) \overset{x=0}{\Leftrightarrow} y = -2\lambda + 3$, επομένως $B(0, -2\lambda + 3)$

Το τρίγωνο ΒΟΑ είναι ορθογώνιο και το εμβαδόν του ισούται με το ημιγινόμενο των καθέτων πλευρών. Άρα $(BOA) = \dfrac{1}{2}(OA)\cdot(OB)$. Έτσι έχουμε:

$$\frac{1}{2}\frac{|2\lambda-3|}{|\lambda|}|-2\lambda+3| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |2\lambda-3|^2 = |\lambda| \Leftrightarrow \begin{cases} 4\lambda^2 - 12\lambda + 9 = \lambda \\ \text{ή} \\ 4\lambda^2 - 12\lambda + 9 = -\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\lambda^2 - 13\lambda + 9 = 0 \quad (2) \\ \text{ή} \\ 4\lambda^2 - 11\lambda + 9 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Η εξίσωση (2) έχει λύσεις $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 9/4$ και η (3) είναι αδύνατη.
Επομένως οι ζητούμενες ευθείες είναι

$$(\varepsilon_1): y - 3 = 1(x - 2) \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2): y - 3 = \frac{9}{4}(x - 2)$$

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Δίνονται τα σημεία Α (2α - 1, 3) και Β (5, - 2). Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ΑΒ, όταν $\alpha \in R$.

(**Απ:** Αν $\alpha \neq 3$ είναι $\lambda_{AB} = \dfrac{5}{2\alpha - 6}$ και $AB: y + 2 = \dfrac{5}{2\alpha-6}(x-5)$. Αν α = 3 τότε ΑΒ: x = 5)

2. Δίνονται τα σημεία $P\left(\kappa, \dfrac{1}{\kappa}\right)$ και $Q\left(\lambda, \dfrac{1}{\lambda}\right)$ με $\kappa, \lambda \neq 0$ και $\kappa \neq \lambda$.

i. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας PQ.
ii. Αν η ευθεία PQ τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία Α και Β αντίστοιχα να δείξετε ότι AP = BQ.

(**Απ: i.** $\lambda_{PQ} = \dfrac{-1}{\kappa\lambda}$ και $PQ: y - \dfrac{1}{\kappa} = \dfrac{-1}{\kappa\lambda}(x - \kappa)$ **ii.** Α (κ + λ, 0) $B\left(0, \dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\kappa}\right)$
$(AP) = (BQ) = \sqrt{\lambda^2 + \dfrac{1}{\kappa^2}}$)

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$, $y=-x+2$ εξισώσεις δύο εκ των υψών του και Α (1, 4). Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του καθώς και οι κορυφές του Β και Γ.

(**Απ:** ΑΓ: y = - 2x + 6, $ΒΓ: y=-\frac{2}{7}(x+3)$, ΑΒ: y = x + 3, Β (- 3, 0), Γ (4, - 2))

4. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α (- 8, 2) και Β (7, 4) οι δύο κορυφές του ενώ Η (5, 2) το ορθόκεντρό του.Βρείτε: **i.** την εξίσωση της ΒΓ **ii.** τις συντεταγμένες της κορυφής Γ.

(**Απ: i.** ΑΗ: y = 2 όπου ΒΓ: x = 7 **ii.** Γ (7, - 13))

5. Δίνεται η ευθεία ε: y = 1 - x. Να βρεθεί το συμμετρικό του Ρ (2, 3) ως προς την ευθεία ε.

(**Απ:** Μ (- 2, - 1))

6. Δίνονται τα σημεία Α (4, 2), Β (3, - 1) και η ευθεία (ε): $y=-3x$. Να βρεθεί σημείο Γ της ευθείας (ε) ώστε το ΑΒΓ να είναι ισοσκελές με κορυφή του Β.

(**Απ:** Γ (α, - 3α) $(ΒΑ)=(ΒΓ)\Leftrightarrow α=0$ ή $α=\frac{6}{5}$ άρα Γ (0, 0) ή $Γ\left(\frac{6}{5},-\frac{18}{5}\right)$)

7. Δίνονται τα σημεία Α (8, 0) και Β (0, 4)

i. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ΟΔ με Ο την αρχή των αξόνων Δ μέσο του ΑΒ.

ii. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που είναι κάθετη στην ΟΔ στο Δ.

iii. Αν Μ τυχαίο σημείο της (ε) δείξτε ότι $\vec{ΜΑ}^2+\vec{ΜΒ}^2=2\vec{ΟΜ}^2$

(**Απ: i.** Δ (4, 2) $ΟΔ: y=\frac{1}{2}x$ **ii.** $y=-2x+10$) **iii.** Αν Μ (α, - 2α + 10) τότε $\vec{ΜΑ}=(8-α, 2α-10)$,

$\vec{ΜΒ}=(-α, 2α-6)$ $\vec{ΟΜ}=(α, -2α+10)$ και $2\left|\vec{ΟΜ}\right|^2=10α^2-80α+200=\left|\vec{ΜΑ}\right|^2+\left|\vec{ΜΒ}\right|^2$

8. Έστω το τετράγωνο ΑΒΓΔ με κορυφή του Α(1,5). Η μία διαγώνιος βρίσκεται πάνω στην ευεθία $y=2x$. Βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β, Γ, Δ του τετραγώνου.

(**Υπ:** $Β\left(\frac{14}{5},\frac{28}{5}\right), Γ\left(\frac{17}{5},\frac{19}{5}\right), Δ\left(\frac{8}{5},\frac{16}{5}\right)$)

9. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία Α (συνθ, ημθ) και Β (ημθ, συνθ) αν $-\frac{π}{2}<θ<\frac{π}{2}$ και $θ\neq\frac{π}{4}$. Για ποια τιμή του θ η ευθεία αυτή διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

(**Απ:** $y=-x+(ημθ+συνθ)$, $θ=-\frac{π}{4}$ (σχ. 7 βιβλίου, σελ. 64))

10. Δίνονται τα σημεία Α (λ, 0), Β (2λ, 3λ) με $\lambda \neq 0$. Αν η κάθετη στην ΑΒ στο Α τέμνει την $x = -2\lambda$ στο Γ να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με κορυφή το Α.

(**Υπ:** $(AB) = \sqrt{10\lambda^2}$, $\Gamma(-2\lambda, y_\Gamma)$ $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{A\Gamma} = -1$, $3 \cdot \dfrac{y_\Gamma}{-3\lambda} = -1 \Leftrightarrow y_\Gamma = \lambda$.Άρα Γ (- 2λ, λ) και $(A\Gamma) = \sqrt{10\lambda^2} = (AB)$).

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Έστω ΑΒΓ το τρίγωνο που σχηματίζεται απο τις ευθείες με εξισώσεις :

$$y = \lambda_1 x + \frac{\alpha}{\lambda_1}\ ,\ y = \lambda_2 x + \frac{\alpha}{\lambda_2}\ ,\ y = \lambda_3 x + \frac{\alpha}{\lambda_3}$$

Δείξτε ότι το ορθόκεντρο του τριγώνου βρίσκεται πάνω σε μια ευθεία.

(**Υπ.:** Βρείτε τα σημεία τομής δύο ευθειών και το σημείο τομής δύο υψών.
Η ζητούμενη ευθεία είναι η $x + \alpha = 0$)