Μάθημα 3

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

A. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Εσωτερικό γινόμενο

Ορίζουμε ως **εσωτερικό γινόμενο** των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ τον πραγματικό αριθμό

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\begin{cases}|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\,\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right), & \text{αν } \vec{\alpha}\neq\vec{0} \text{ και } \vec{\beta}\neq\vec{0}\\ 0, & \text{αν } \vec{\alpha}=\vec{0} \text{ ή } \vec{\beta}=\vec{0}\end{cases}$$

Έστω $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$. Αποδεικνύεται ότι: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2$

Συμβολίζουμε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}=\vec{\alpha}^2$ (εσωτερικό τετράγωνο του $\vec{\alpha}$)

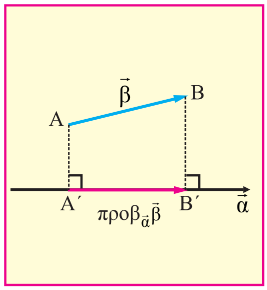
Ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου

1. $\vec{\alpha}\vec{\beta}=\vec{\beta}\vec{\alpha}$ (αντιμεταθετική).
2. $\left(\lambda\vec{\alpha}\right)\vec{\beta}=\lambda\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)=\vec{\alpha}(\lambda\vec{\beta}),\ \lambda\in R$.
3. $\vec{\alpha}^2=\left|\vec{\alpha}\right|^2$
4. $\vec{\alpha}\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)=\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\alpha}\vec{\gamma}$.
5. αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha}\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ αν $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha}\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$
6. Αν $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ και $\vec{\beta}\neq\vec{0}$ τότε $\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\dfrac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.
7. Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\vec{\beta}=0$ (με $\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}$).
8. $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_{\vec{\alpha}}\lambda_{\vec{\beta}}=-1$ (με $\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}$) αν ορίζονται οι $\lambda_{\vec{\alpha}}$, $\lambda_{\vec{\beta}}$.

Προβολή διανύσματος σε διάνυσμα

Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$.

Ονομάζουμε **προβολή του διανύσματος** $\vec{\beta}$ **στο διάνυσμα** $\vec{\alpha}$ (και συμβολίζουμε $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$) το διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$ που είναι η ορθή προβολή του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ σε ευθεία παράλληλη με τον φορέα του $\vec{\alpha}$.



Είναι δηλαδή $\overrightarrow{A'B'} = \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\overrightarrow{AB}$

Αποδεικνύεται ότι ισχύει: $\boxed{\vec{\alpha}\vec{\beta} = \vec{\alpha}\cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}}$

Σχόλιο: *Η παραπάνω σχέση "μεταφέρει" ένα εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων που σχηματίζουν μια γωνία φ σε εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων που βρίσκονται στην ίδια ευθεία και αντίστροφα.*

Δεν ισχύουν πάντοτε οι παρακάτω σχέσεις:

1. $\vec{\alpha}\left(\vec{\beta}\vec{\gamma}\right) = \left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)\vec{\gamma}$ (προσεταιριστική ιδιότητα) 2. $\vec{\alpha}\vec{\gamma} = \vec{\beta}\vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$ (ιδιότητα διαγραφής)

(Ισχύει: Αν $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha}\vec{\gamma} = \vec{\beta}\vec{\gamma}$)

3. $\left|\vec{\alpha}\vec{\beta}\right| = \left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|$ (Ισχύει: $\left|\vec{\alpha}\vec{\beta}\right| \leq \left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|$) 4. $\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2\vec{\beta}^2$ (Ισχύει: $\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)^2 \leq \vec{\alpha}^2\vec{\beta}^2$)

Τις αναφέρουμε γιατί είναι σχέσεις που ισχύουν στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R αλλά δεν ισχύουν γενικά στο εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία - Μέθοδος 1

Για να υπολογίσουμε τη γωνία δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ χρησιμοποιούμε τον τύπο $\text{συνφ} = \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|}$, όπου φ η γωνία των δυο διανυσμάτων.

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (3,3)$ **και** $\vec{\beta} = (0,2)$.

Λύση

Είναι $\vec{\alpha}\vec{\beta} = 3\cdot 0 + 3\cdot 2 = 6$ και $\left|\vec{\alpha}\right| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ και $\left|\vec{\beta}\right| = \sqrt{0^2+2^2} = 2$. Άρα

$\sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{6}{3\sqrt{2}\cdot 2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Επομένως $\hat{\varphi} = 45^{o}$.

Κατηγορία - Μέθοδος 2

Για να δείξουμε ότι δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι κάθετα, δείχνουμε ότι το εσωτερικό τους γινόμενο είναι ίσο με μηδέν.

Παράδειγμα 1

Να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{u} = \left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)\vec{\gamma} - \left(\vec{\alpha}\vec{\gamma}\right)\vec{\beta}$ είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$.

Λύση

Αρκεί το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u}\cdot\vec{\alpha}$ να είναι ίσο με μηδέν.
Είναι:

$$\vec{u}\cdot\vec{\alpha} = \left[\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)\vec{\gamma} - \left(\vec{\alpha}\vec{\gamma}\right)\vec{\beta}\right]\vec{\alpha} = \left[\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)\vec{\gamma}\right]\vec{\alpha} - \left[\left(\vec{\alpha}\vec{\gamma}\right)\vec{\beta}\right]\vec{\alpha} = \left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)\left(\vec{\gamma}\vec{\alpha}\right) - \left(\vec{\alpha}\vec{\gamma}\right)\left(\vec{\beta}\vec{\alpha}\right) = 0$$

Άρα $\vec{u} \perp \vec{\alpha}$

Κατηγορία - Μέθοδος 3

Για να υπολογίσουμε το μέτρο ενός διανύσματος που δίνεται ως γραμμικός συνδυασμός άλλων διανυσμάτων υπολογίζουμε το τετράγωνο του μέτρου χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$\left|\vec{\alpha}\right|^2 = \vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}$$

Παράδειγμα 1

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{u} = 5\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, όπου $\left|\vec{\alpha}\right| = 2$, $\left|\vec{\beta}\right| = 1$, $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$. Να υπολογισθεί το $\left|\vec{u}\right|$.

Λύση

Είναι $\left|\vec{u}\right|^2 = \left|5\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}\right|^2 = \left(5\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}\right)^2 = 25\vec{\alpha}^2 + 30\vec{\alpha}\vec{\beta} + 9\vec{\beta}^2 =$

$= 25\left|\vec{\alpha}\right|^2 + 30\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) + 9\left|\vec{\beta}\right|^2 = 25\cdot 4 + 30\cdot 2\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2} + 9\cdot 1 = 100 + 30 + 9 = 139$.

Άρα $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{139}$

Κατηγορία - Μέθοδος 4

Για να δείξουμε ισότητες ή ανισότητες με μέτρα διανυσμάτων, υψώνουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο, χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $\left|\vec{\alpha}\right|^2 = \vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}$ και γνωστές ταυτότητες.

Παράδειγμα 1

Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ μη μηδενικά διανύσματα. Να δείξετε ότι: $\left|4\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right|=\left|4\vec{\alpha}+3\vec{\beta}\right| \Leftrightarrow \vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$

Λύση

$$\left|4\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right|=\left|4\vec{\alpha}+3\vec{\beta}\right| \Leftrightarrow \left|4\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right|^2=\left|4\vec{\alpha}+3\vec{\beta}\right|^2 \Leftrightarrow \left(4\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)^2=\left(4\vec{\alpha}+3\vec{\beta}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16\vec{\alpha}^2-24\vec{\alpha}\vec{\beta}+9\vec{\beta}^2=16\vec{\alpha}^2+24\vec{\alpha}\vec{\beta}+9\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow 48\vec{\alpha}\vec{\beta}=0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta}=0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$$

(διότι $\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq 0$)

Κατηγορία - Μέθοδος 5

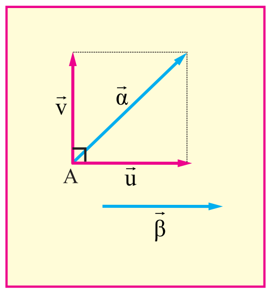
Για να αναλύσουμε ένα διάνυσμα σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, θέτουμε τις συνιστώσες με άγνωστες συντεταγμένες (παραμετρικές) και δημιουργούμε από τα δεδομένα σχέσεις με τις οποίες υπολογίζουμε τους αγνώστους αυτούς.

Παράδειγμα 1

Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(2,-3)$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\beta}=(3,-1)$

Λύση

α΄ τρόπος.



Έστω $\vec{u}=(x_1,y_1)$ και $\vec{v}=(x_2,y_2)$ οι δύο συνιστώσες.

Ισχύει $\vec{u}+\vec{v}=\vec{\alpha}$ και επειδή η σχέση των διανυσμάτων είναι και σχέση συντεταγμένων:

$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{\alpha} \Leftrightarrow (x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(2,-3) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=2 & (1) \\ y_1+y_2=-3 & (2) \end{cases}$$

Η μία από τις δύο συνιστώσες, έστω η $\vec{u}$ είναι παράλληλη προς το $\vec{\beta}$, άρα σύμφωνα με τη συνθήκη συγγραμμικότητας:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -x_1-3y_1=0 \Leftrightarrow x_1+3y_1=0 \ (3)$$

Η άλλη συνιστώσα, η $\vec{v}$ είναι κάθετη στο $\vec{\beta}$. Επομένως $\vec{v}\vec{\beta}=0 \Leftrightarrow 3x_2-y_2=0$ (4)

Λύνουμε το σύστημα των (1), (2), (3), (4) και βρίσκουμε

$x_1=\dfrac{27}{10}$, $x_2=\dfrac{-7}{10}$, $y_1=\dfrac{-9}{10}$, $y_2=\dfrac{-21}{10}$. Επομένως $\vec{u}=\left(\dfrac{27}{10},-\dfrac{9}{10}\right)$ και $\vec{v}=\left(\dfrac{-7}{10},\dfrac{-21}{10}\right)$

β΄ τρόπος

Έστω $\vec{\alpha}=\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$ (1) $\quad \vec{\alpha}_1 // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}_1=\lambda\vec{\beta}$ (2) και $\vec{\alpha}_2 \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}_2\vec{\beta}=0$ (3)

Απ' την (1) εάν πολλαπλασιάσουμε με $\vec{\beta}$ έχουμε:

$$\vec{\alpha}\vec{\beta}=\vec{\alpha}_1\vec{\beta}+\vec{\alpha}_2\vec{\beta}\overset{(2)}{\underset{(3)}{\Leftrightarrow}}\vec{\alpha}\vec{\beta}=\lambda\vec{\beta}^2+0 \Leftrightarrow 2\cdot 3+(-3)\cdot(-1)=\lambda\left(\sqrt{3^2+(-1)^2}\right)^2 \Leftrightarrow 6+3=10\lambda \Leftrightarrow \lambda=\frac{9}{10}$$

$$(2) \Leftrightarrow \vec{\alpha}_1=\frac{9}{10}\vec{\beta}=\frac{9}{10}(3,-1)=\left(\frac{27}{10},-\frac{9}{10}\right)$$

$$(1) \Leftrightarrow \vec{\alpha}_2=\vec{\alpha}-\vec{\alpha}_1=(2,-3)-\left(\frac{27}{10},-\frac{9}{10}\right)=\left(-\frac{7}{10},\frac{-21}{10}\right)$$

Βασικοί γεωμετρικοί τόποι (γ.τ.)

Κατηγορία - Μέθοδος 6

Όταν ζητείται ο γεωμετρικός τόπος σημείων Μ που ικανοποιούν μια διανυσματική σχέση, κάνουμε πράξεις σ'αυτήν για να καταλήξουμε σε απλούστερη απο την οποία θα "φαίνεται" η ιδιότητα των σημείων Μ.

Έστω Α και Β σταθερά σημεία και Μ τυχαίο σημείο του οποίου ζητείται ο τόπος.

Αν καταλήξουμε σε σχέση :

1. $|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}|$. Τότε ο γ.τ των σημείων Μ είναι η μεσοκάθετος του σταθερού ευθ.τμήματος ΑΒ.
2. $|\overrightarrow{MA}|=\rho$, όπου ρ σταθερό. Τότε ο γ.τ των σημείων Μ είναι κύκλος κέντρου Α και ακτίνας ρ.
3. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$. Τότε ο γ.τ των σημείων Μ είναι κύκλος διαμέτρου ΑΒ.
4. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$. Τότε ο γ.τ των σημείων Μ είναι κάθετη ευθεία στην ΑΒ στο σημείο Α.

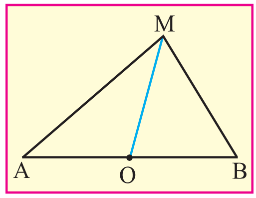
Παράδειγμα 1

Αν Α, Β είναι σταθερά σημεία του επιπέδου και Ο το μέσον του ΑΒ, να βρείτε το γ.τ των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύουν :

i. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\kappa,\quad \kappa\in R$ $\qquad$ **ii.** $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\kappa,\quad \kappa\in R$

iii. $\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2=\kappa,\quad \kappa\in R$ $\qquad$ **iv.** $\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=\kappa,\quad \kappa>0$

Λύση



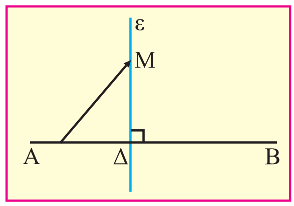
1. Από τη σχέση $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k,\quad k\in R$, αν Ο το μέσο του ΑΒ έχουμε:

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)=k \Leftrightarrow$$

$$\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OA}\right)=k \Leftrightarrow \overrightarrow{MO}^2-\overrightarrow{OA}^2=k \Leftrightarrow$$

$\left|\overrightarrow{MO}\right|^2=\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+k$ οπότε :

- Αν $\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+k<0$, γεωμετρικός τόπος του Μ είναι το κενό σύνολο.
- Αν $\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+k=0$, γεωμετρικός τόπος του Μ είναι το σημείο Ο.
- Αν $\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+k>0$, γεωμετρικός τόπος του Μ είναι κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα $\sqrt{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+k}$



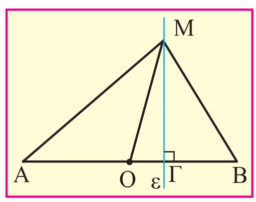
2. Από τη σχέση $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\kappa,\ \kappa\in R$, αν Δ είναι η προβολή του Μ στην ΑΒ έχουμε: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=k \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{AB}=k$.

Οπότε $\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|=|k| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{A\Delta}\right|=\dfrac{|k|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$.

Άρα προκύπτει ότι ο γεωμετρικός τόπος Μ είναι η κάθετη ευθεία ε στην ΑΒ στο σημείο Δ, αφού το Δ απέχει σταθερή απόσταση από το σημείο Α.

3. Από τη σχέση $\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2=\kappa,\quad \kappa\in R$, αν Γ η προβολή του Μ στην ΑΒ, έχουμε:

$$\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{O\Gamma}$$



Άρα $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{O\Gamma}=k$. Οπότε $2\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{O\Gamma}\right|=|k| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{O\Gamma}\right|=\dfrac{|k|}{2\left|\overrightarrow{AB}\right|}$, άρα προκύπτει, ότι ο γεωμετρικός τόπος του Μ είναι ευθεία ε, κάθετη στην ΑΒ στο σημείο Γ.

4. Από τη σχέση $\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=k$, αν Ο το μέσον του ΑΒ έχουμε:

$$\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=k \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO}^2+\frac{\overrightarrow{AB}^2}{2}=k \Leftrightarrow \overrightarrow{MO}^2=\frac{2k-\overrightarrow{AB}^2}{4}=\lambda.$$

Οπότε: Αν $\lambda<0$ ο γ.τ. του Μ είναι το κενό σύνολο

Αν $\lambda=0$ το σημείο Μ ταυτίζεται με το σημείο Ο.

Αν $\lambda>0$ ο γ.τ. του Μ είναι ο κύκλος με κέτρο Ο και ακτίνα $\sqrt{\lambda}$.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$. Να υπολογισθούν τα επόμενα :

α. $\vec{\alpha}\vec{\beta}$ **β.** $\vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2$ **γ.** $\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2$ **δ.** $\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|$ **ε.** $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\left(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)$

Λύση

α. $\vec{\alpha}\vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\,\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = 2\sqrt{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3$

β. $\vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - |\vec{\beta}|^2 = 4-3=1$

γ. $\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2 = 4-6+3=1$

δ. $\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2 = \left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2 = 1$. Άρα $\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right| = 1$

ε. $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\left(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right) = 2\vec{\alpha}^2 - 3\vec{\alpha}\vec{\beta}+2\vec{\alpha}\vec{\beta}-3\vec{\beta}^2 =$

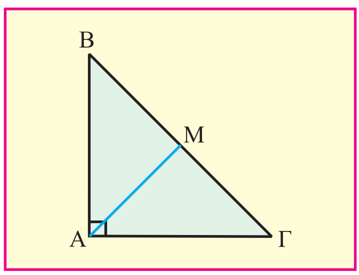
$2\vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}\vec{\beta}-3\vec{\beta}^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 - \vec{\alpha}\vec{\beta} - 3|\vec{\beta}|^2 = 2\cdot 4-3-3\cdot 3 = -4$

Άσκηση 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Αν ισχύει η ισότητα

$\left(\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}\right)\vec{A\Gamma} = \left(\vec{AM}\cdot\vec{B\Gamma}\right)\vec{AB}$ (1), να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Λύση



Τα διανύσματα $\vec{A\Gamma}$, $\vec{AB}$ δεν είναι συγγραμμικά, αφού σχηματίζουν τρίγωνο. Άρα απο την (1)πρέπει αναγκαστικά: $\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma} = 0$ και $\vec{AM}\cdot\vec{B\Gamma}=0$.

Αλλά $\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}=0$ σημαίνει $\vec{AB}\perp\vec{A\Gamma}$, επομένως το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και $\vec{AM}\cdot\vec{B\Gamma}=0 \Leftrightarrow \vec{AM}\perp\vec{B\Gamma}$ δηλαδή η διάμεσος του τριγώνου είναι και ύψος, που σημαίνει ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Άσκηση 3

α. Για δύο οποιαδήποτε μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, να δείξετε ότι: $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = \dfrac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2}\vec{\beta}$

β. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = 2\vec{i}+4\vec{j}$ και $\vec{\beta} = \vec{i}-\vec{j}$. Να βρεθεί η $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$.

γ. Έστω $\vec{\alpha} = 4\vec{i}-3\vec{j}$ και $\vec{\beta} = 2\vec{i}+5\vec{j}$. Να βρεθεί η $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)$.

Λύση

α. Το διάνυσμα $προβ_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{\beta}$. Σύμφωνα με τη συνθήκη συγγραμμικότητας, υπάρχει $\lambda \in R$ τέτοιο ώστε: $προβ_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ (1)

Όμως $\vec{\alpha}\vec{\beta} = \vec{\beta}\,προβ_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} = \left(\lambda\vec{\beta}\right)\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} = \lambda\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\left|\vec{\beta}\right|^2}$ (2)

Οπότε χρησιμοποιώντας την (2) ή (1) γίνεται $προβ_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = \dfrac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\left|\vec{\beta}\right|^2}\vec{\beta}$.

β. $\vec{\alpha} = 2\vec{i} + 4\vec{j} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = (2{,}4)$, $\quad\vec{\beta} = \vec{i} - \vec{j} \Leftrightarrow \vec{\beta} = (1{,}-1)$. Επομένως $\vec{\alpha}\vec{\beta} = 2 - 4 = -2$

Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα έχουμε: $προβ_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = \dfrac{\vec{\beta}\vec{\alpha}}{\left|\vec{\beta}\right|^2}\vec{\beta} = \dfrac{-2}{2}\vec{\beta} = -\vec{\beta} = (-1,1)$

Τελικά $προβ_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$

γ. Είναι $\vec{\alpha} = 4\vec{i}\text{ -}3\vec{j} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = (4{,}-3)$ και $\vec{\beta} = 2\vec{i} + 5\vec{j} \Leftrightarrow \vec{\beta} = (2{,}5)$. Επομένως $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (6,2)$

και $\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)\cdot\vec{\alpha} = 24 - 6 = 18$ Σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα έχουμε:

$$προβ_{\vec{\alpha}}\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) = \frac{\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)\vec{\alpha}}{\left|\vec{\alpha}\right|^2}\vec{\alpha} = \frac{18}{25}\vec{\alpha} = \frac{18}{25}(4,-3) = \left(\frac{72}{25}, \frac{-54}{25}\right)$$

Άσκηση 4

Να δειχθεί ότι κάθε εγγεγραμμένη γωνία σε ημικύκλιο είναι ορθή.

Λύση

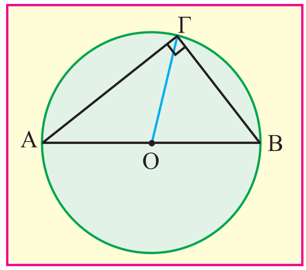
Έστω Ο το κέντρο του κύκλου και ΑΒ διάμετρος.

Θα δείξουμε ότι η γωνία $A\hat{\Gamma}B$ είναι ορθή. Αρκεί $\vec{\Gamma A}\cdot\vec{\Gamma B} = 0$.

Είναι $\vec{\Gamma A}\cdot\vec{\Gamma B} = \left(\vec{OA} - \vec{O\Gamma}\right)\left(\vec{OB} - \vec{O\Gamma}\right) = \left(\vec{OA} - \vec{O\Gamma}\right)\left(-\vec{OA} - \vec{O\Gamma}\right) =$

$$=-\left(\vec{OA}-\vec{O\Gamma}\right)\left(\vec{OA}+\vec{O\Gamma}\right)=-\left(\vec{OA}^{2}-\vec{O\Gamma}^{2}\right)=$$

$$=-\left(\left|\vec{OA}\right|^{2}-\left|\vec{O\Gamma}\right|^{2}\right)=-\left(R^{2}-R^{2}\right)=0.$$



Άσκηση 5

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύουν:

α. $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ **, β.** $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\perp\left(\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)$ **και γ.** $\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=4$**. Να υπολογίσετε** $\left|\vec{\alpha}\right|$ **και** $\left|\vec{\beta}\right|$**.**

Λύση

Είναι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, άρα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ (1). Επίσης, $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\perp\left(\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)\Leftrightarrow\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\cdot\left(\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\vec{\alpha}^{2}-3\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\alpha}\vec{\beta}-3\vec{\beta}^{2}=0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\vec{\alpha}^{2}-3\vec{\beta}^{2}=0$ (2)

Επιπλέον ισχύει $\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=4\Leftrightarrow\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^{2}=16\Leftrightarrow\vec{\alpha}^{2}-2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^{2}=16\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\vec{\alpha}^{2}+\vec{\beta}^{2}=16$ (3)

Αφαιρούμε την (2) από την (3) και έχουμε:

$\vec{\alpha}^{2}+\vec{\beta}^{2}-\vec{\alpha}^{2}+3\vec{\beta}^{2}=16\Leftrightarrow4\vec{\beta}^{2}=16\Leftrightarrow\vec{\beta}^{2}=4\Leftrightarrow\left|\vec{\beta}\right|=2.$

Αντικαθιστούμε στην (3) και έχουμε: $\vec{\alpha}^{2}+4=16\Leftrightarrow\vec{\alpha}^{2}=12\Leftrightarrow\left|\vec{\alpha}\right|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

Άσκηση 6

Αν για τα τρία διανύσματα του επιπέδου $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ισχύουν ότι $\left|\vec{\alpha}\right|=\left|\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\gamma}\right|=1$ και $\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}\vec{\gamma}=2$ να δείξετε ότι $\vec{\alpha}=\vec{\beta}=\vec{\gamma}$.

Λύση

Από τη σχέση $\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}\vec{\gamma}=2$ έχουμε: $\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)+\left|\vec{\beta}\right|\left|\vec{\gamma}\right|\text{συν}\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right)=2$

άρα $\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)+\text{συν}\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right)=2$.

Επειδή $\left|\text{συν}\varphi\right|\le1$ για να ισχύει η παραπάνω σχέση πρέπει $\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=1$ και $\text{συν}\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right)=1$.

Επομένως $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=0^{o}$ και $\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right)=0^{o}$.

Δηλαδή τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι ομόρροπα. Επειδή έχουν και ίσα μέτρα, έχουμε $\vec{\alpha}=\vec{\beta}=\vec{\gamma}$.

Άσκηση 7

α. Να αποδείξετε ότι $\left|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right|\le\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|$ (1) Πότε ισχύει η ισότητα;

β. Να εξετάσετε πότε από την ισότητα $\vec{\alpha}\vec{\beta}=\vec{\alpha}\vec{\gamma}$ προκύπτει $\vec{\beta}=\vec{\gamma}$.

γ. Αν $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right|$ να δείξετε ότι $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.

Λύση

α. Παίρνουμε τη σχέση (1) και εργαζόμαστε με ισοδυναμίες:

$$\left|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right|\le\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\Leftrightarrow\left|\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\right|\le\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\right|-\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\le 0\Leftrightarrow\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\left(\left|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\right|-1\right)\le 0 \quad (2)$$

Η τελευταία σχέση ισχύει αφού $\left|\vec{\alpha}\right|,\left|\vec{\beta}\right|\ge 0$ και $\left|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\right|\le 1$. Επομένως ισχύει και η αρχική.

Από τη σχέση (2) παρατηρούμε ότι θα ίσχυε η ισότητα αν $\left|\vec{\alpha}\right|=0$ ή $\left|\vec{\beta}\right|=0$ ή $\left|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\right|=1$ δηλαδή $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=0$ ή π, δηλαδή, όταν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά.

β. Εργαζόμαστε πάλι στην δοσμένη σχέση με ισοδυναμίες:

$$\vec{\alpha}\vec{\beta}=\vec{\alpha}\vec{\gamma}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\vec{\beta}-\vec{\alpha}\vec{\gamma}=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}\left(\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right)=0.$$

Η τελευταία ισότητα όμως μπορεί να ισχύει αν $\vec{\alpha}=0$ ή $\vec{\beta}=\vec{\gamma}$ ή $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}-\vec{\gamma}$.

Για να ισχύει λοιπόν μόνο το $\vec{\beta}=\vec{\gamma}$ πρέπει $\vec{\alpha}\ne\vec{0}$ και $\vec{\alpha}$ να μην είναι κάθετο στο $\vec{\beta}-\vec{\gamma}$.

γ. i. Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}\ne\vec{0}$ Από τη δοσμένη σχέση έχουμε:

$$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right|\Leftrightarrow\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2=\left(\left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right|\right)^2\Leftrightarrow\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=\left|\vec{\alpha}\right|^2+2\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|+\left|\vec{\beta}\right|^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=\left|\vec{\alpha}\right|^2+2\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|+\left|\vec{\beta}\right|^2\Leftrightarrow 2\vec{\alpha}\vec{\beta}=2\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|\Leftrightarrow\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)-|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|=0 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\left(\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)-1\right)=0 \overset{|\vec{\alpha}|,|\vec{\beta}|\neq 0}{\Leftrightarrow} \sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=1$$

Άρα $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=0^{o}$ δηλαδή $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.

ii. Αν $\vec{\alpha}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$ τότε προφανώς $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.

Άσκηση 8

Αν $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$, $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ (1) να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{\nu}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{u}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

Λύση

Είναι $\pi\rho o\beta_{\vec{u}}\vec{v}=\lambda\cdot\vec{u}$, $\lambda\in R^{*}$ (2)

Επίσης $\vec{u}\cdot\vec{\nu}=\vec{u}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{u}}\vec{\nu}\Leftrightarrow\left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=\lambda\cdot\vec{u}^{2}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\vec{\alpha}^{2}-2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\alpha}\vec{\beta}-\vec{\beta}^{2}=\lambda\left|2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^{2}\Leftrightarrow$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} 2|\vec{\alpha}|^{2}-|\vec{\beta}|^{2}=\lambda\left(4|\vec{\alpha}|^{2}+4\vec{\alpha}\vec{\beta}+|\vec{\beta}|^{2}\right)\Leftrightarrow 2\cdot 1^{2}-2^{2}=\lambda(4\cdot 1+4)\Leftrightarrow -2=8\lambda\Leftrightarrow\lambda=-\frac{1}{4}$$

(*)(διότι $\vec{\alpha}\vec{\beta}=0$). Άρα $\pi\rho o\beta_{\vec{u}}\vec{\nu}=-\frac{1}{4}\vec{u}=-\frac{1}{4}\left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)$.

Άσκηση 9

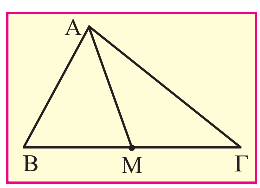
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Μ μέσο της πλευράς ΒΓ. Είναι $|\vec{AB}|=\sqrt{3}$, $|\vec{A\Gamma}|=2$ και $\left(\widehat{\vec{AB},\vec{A\Gamma}}\right)=\frac{\pi}{6}$. Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}}\right)$.

Λύση

Το συνημίτονο της γωνίας $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}}\right)$ είναι : $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}}\right)=\dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{AM}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AM}|}$ (1)

Ως γνωστόν για τη διάμεσο ενός τριγώνου ισχύει

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right)\ (2).$$



Επομένως $\vec{AB}\cdot\vec{AM}=\vec{AB}\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\vec{AB}+\vec{A\Gamma}\right)\right]=\frac{1}{2}\vec{AB}^{2}+\frac{1}{2}\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}=$

$$=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\right|^2+\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\right|\left|\vec{A\Gamma}\right|\text{συν}\left(\widehat{\vec{AB},\vec{A\Gamma}}\right)=\frac{1}{2}3+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 2\frac{\sqrt{3}}{2}=3$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο 3 και τη σχέση (2) έχουμε $\left|\vec{AM}\right|^2=\frac{1}{4}\left|\vec{AB}+\vec{A\Gamma}\right|^2=\frac{1}{4}\left(\vec{AB}+\vec{A\Gamma}\right)^2=$

$=\frac{1}{4}\left(\vec{AB}^2+2\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}+\vec{A\Gamma}^2\right)=\frac{1}{4}\left(3+2\sqrt{3}\cdot 2\frac{\sqrt{3}}{2}+4\right)=\frac{13}{4}$. Άρα $\left|\vec{AM}\right|=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Επομένως η σχέση (1) γίνεται: $\text{συν}\left(\vec{AB},\vec{AM}\right)=\frac{3}{\sqrt{3}\frac{\sqrt{13}}{2}}=\frac{6}{\sqrt{39}}=\frac{6\sqrt{39}}{39}=\frac{2\sqrt{39}}{13}$.

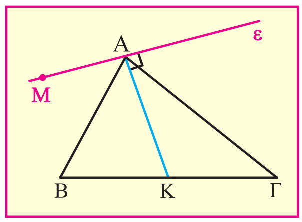
Άσκηση 10

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ. Να δείξετε ότι τα σημεία Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\vec{AB}\cdot\vec{AM}+\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AM}=0$ βρίσκονται σε ευθεία.

Λύση

Παίρνουμε τη δοσμένη σχέση και τη μετασχηματίζουμε.

$\vec{AB}\cdot\vec{AM}+\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AM}=0\Leftrightarrow\left(\vec{AB}+\vec{A\Gamma}\right)\vec{AM}=0\Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow 2\vec{AK}\cdot\vec{AM}=0$ (όπου ΑΚ η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ)

$\Leftrightarrow \vec{AK}\cdot\vec{AM}=0$ οπότε $\vec{AK}\perp\vec{AM}$. Άρα το Μ βρίσκεται επάνω σε ευθεία (ε) που είναι κάθετη στη διάμεσο ΑΚ και διέρχεται από το σημείο Α.

Άσκηση 11

α. Να δείξετε ότι για τέσσερα οποιαδήποτε σημεία Α, Β, Γ, Δ του επιπέδου ισχύει:

$$\vec{AB}\cdot\vec{\Gamma\Delta}+\vec{A\Gamma}\cdot\vec{\Delta B}+\vec{A\Delta}\cdot\vec{B\Gamma}=0 \quad \textbf{(1).}$$

β. Να δείξετε ότι τα ύψη ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση

α. Έστω Ο σημείο αναφοράς. Από τη σχέση (1) έχουμε:

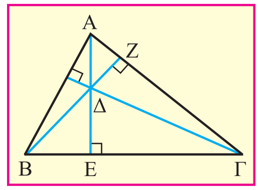
$$(1)\Leftrightarrow\left(\vec{OB}-\vec{OA}\right)\left(\vec{O\Delta}-\vec{O\Gamma}\right)+\left(\vec{O\Gamma}-\vec{OA}\right)\left(\vec{OB}-\vec{O\Delta}\right)+\left(\vec{O\Delta}-\vec{OA}\right)\left(\vec{O\Gamma}-\vec{OB}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\vec{OB}\cdot\vec{O\Delta}-\vec{OB}\cdot\vec{O\Gamma}-\vec{OA}\cdot\vec{O\Delta}+\vec{OA}\cdot\vec{O\Gamma}+\vec{O\Gamma}\cdot\vec{OB}-$$

$$\vec{O\Gamma}\cdot\vec{O\Delta}-\vec{OA}\cdot\vec{OB}+\vec{OA}\cdot\vec{O\Delta}+\vec{O\Delta}\cdot\vec{O\Gamma}-\vec{O\Delta}\cdot\vec{OB}-\vec{OA}\cdot\vec{O\Gamma}+\vec{OA}\cdot\vec{OB}=0\Leftrightarrow 0=0 \text{ που ισχύει.}$$

β. Ας υποθέσουμε ότι σε τρίγωνο ΑΒΓ, δύο ύψη του είναι ΑΕ και το ΒΖ τα οποία τέμνονται στο Δ. Θα δείξουμε ότι και το τρίτο ύψος περνά από το Δ.

Για τα τέσσερα σημεία Α, Β, Γ, Δ ισχύει η σχέση (1).



Επειδή το ΑΔ είναι ύψος ισχύει : $\vec{A\Delta}\cdot\vec{B\Gamma}=0$ (2)

Επειδή το ΒΔ είναι ύψος ισχύει : $\vec{B\Delta}\cdot\vec{A\Gamma}=0$ (3)

Οπότε η (1) σύμφωνα με τις (2) και (3) γράφεται : $\vec{AB}\cdot\vec{\Gamma\Delta}=0$,

που σημαίνει ότι $\vec{AB}\perp\vec{\Gamma\Delta}$, δηλαδή το ΓΔ είναι επίσης ύψος του τριγώνου.

Άσκηση 12

Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ διανύσματα του επιπέδου με $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$ και το διάνυσμα $\vec{u}=x\vec{\alpha}+\vec{\beta}$. Να βρεθεί το $x\in R$ ώστε το $|\vec{u}|$ να είναι ελάχιστο. Για την τιμή του x που θα βρείτε να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{u}$ είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$.

Λύση

Είναι $|\vec{u}|^2=\left(x\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=x^2\vec{\alpha}^2+2x\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2$ (1)

Η τιμή του x για την οποία είναι το $|\vec{u}|$ ελάχιστο είναι ίδια με αυτήν για την οποία είναι το $|\vec{u}|^2$ ελάχιστο.

Από τη σχέση (1) παρατηρούμε ότι το $|\vec{u}|^2$ είναι τριώνυμο ως προς x. Γνωρίζουμε ότι ένα τριώνυμο $kx^2+\lambda x+\mu$ λαμβάνει ελάχιστη τιμή για $x=-\frac{\lambda}{2k}$,αν $k>0$.

Άρα το $|\vec{u}|$ γίνεται ελάχιστο όταν :

$$x=-\frac{2\vec{\alpha}\vec{\beta}}{2\vec{\alpha}^2}\Leftrightarrow x=-\frac{2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)}{2|\vec{\alpha}|^2}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)$$

Για αυτή την τιμή του x το $\vec{u}$ γίνεται: $\vec{u}=-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

Για να δείξουμε ότι $\vec{u}\perp\vec{\alpha}$, αρκεί να δείξουμε ότι $\vec{u}\cdot\vec{\alpha}=0$.

Έχουμε : $\vec{u}\cdot\vec{\alpha}=\left[-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right]\cdot\vec{\alpha}=-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}\vec{\alpha}=$

$=-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)\cdot 4+2\cdot 1\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=-2\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)+2\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=0$. Άρα $\vec{u}\perp\vec{\alpha}$.

Άσκηση 13

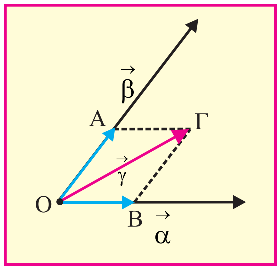
α. Δίνονται δύο μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ του επιπέδου. Να αποδείξετε

ότι οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{\gamma}$ του επιπέδου μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ κατά μοναδικό τρόπο.

β. Δίνονται τα κάθετα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|=2$. Να βρεθεί συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{u}$ το οποίο ανήκει στο ίδιο επίπεδο με τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και διχοτομεί την γωνία των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

Λύση

α. Έστω Ο η κοινή αρχή των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και $\vec{O\Gamma}=\vec{\gamma}$.



Από το Γ φέρνουμε $\Gamma A /\!/ \vec{\alpha}$ και $\Gamma B /\!/ \vec{\beta}$.

Είναι $\vec{O\Gamma}=\vec{OA}+\vec{A\Gamma}=\kappa\vec{\beta}+\lambda\vec{\alpha}$, $\kappa,\lambda\in R^*$.

Άρα $\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}+\kappa\vec{\beta}$ (1) δηλαδή το $\vec{\gamma}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

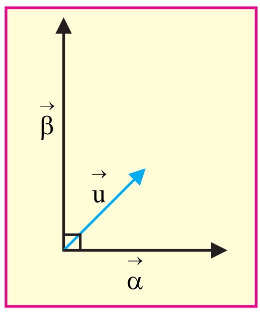
Μοναδικότητα: Έστω $\vec{\gamma}=\mu\vec{\alpha}+\nu\vec{\beta}$, $\mu,\nu\in R^*$ (2)

Από (1), (2) συμπεραίνουμε

$\lambda\vec{\alpha}+\kappa\vec{\beta}=\mu\vec{\alpha}+\nu\vec{\beta}\Leftrightarrow(\lambda-\mu)\vec{\alpha}=(\nu-\kappa)\vec{\beta}$ (3)

Αν $\lambda-\mu\neq 0$ τότε $\vec{\alpha}=\dfrac{\nu-\kappa}{\lambda-\mu}\vec{\beta}$ δηλαδή $\vec{\alpha}/\!/\vec{\beta}$ που είναι άτοπο. Ομοίως αν $\nu-\kappa\neq 0$.

Τελικά για να ισχύει η (3) πρέπει $\lambda=\mu$ και $\nu=\kappa$, δηλαδή το $\vec{\gamma}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.



β. Το διάνυσμα $\vec{u}$ σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. Δηλαδή $\vec{u}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}$, $\lambda,\mu\in R$.

Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι κάθετα και το $\vec{u}$ διχοτομεί την γωνία τους. Άρα σχηματίζει γωνία 45^{o} με κάθε ένα από αυτά.

Επιπλέον $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ (4)

Έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{u}\right)=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{u}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{u}|}=\frac{\vec{\alpha}\left(\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}\right)}{\sqrt{2}\cdot 1}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\lambda\vec{\alpha}^2+\mu\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\sqrt{2}}\overset{(4)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\lambda\cdot 2}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow 4\lambda=2\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{2}.$$

Ακόμα: $\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\beta},\vec{u}\right)=\dfrac{\vec{\beta}\cdot\vec{u}}{|\vec{\beta}|\cdot|\vec{u}|}=\dfrac{\vec{\beta}\left(\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}\right)}{2\cdot 1}\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\lambda\vec{\alpha}\vec{\beta}+\mu\vec{\beta}^2}{2}\overset{(4)}{\Leftrightarrow}$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\mu\cdot 4}{2}\Leftrightarrow\mu=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Τελικά $\vec{u}=\dfrac{1}{2}\vec{\alpha}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\vec{\beta}$.

Άσκηση 14

α. Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα. Αν $x\vec{\alpha}+\psi\vec{\beta}=\vec{0}$ (1) να δείξετε ότι $x=\psi=0$.

β. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Από τυχαίο σημείο Ζ της ΑΒ φέρνουμε παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Η. Να δείξετε ότι: $\dfrac{|\overrightarrow{AZ}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{|\overrightarrow{AH}|}{|\overrightarrow{A\Gamma}|}$.

Λύση

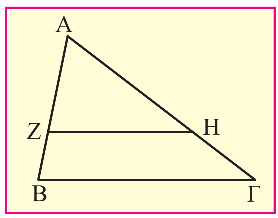
α. Έστω $x\neq 0$. Τότε $x\vec{\alpha}+\psi\vec{\beta}=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}=-\dfrac{\psi}{x}\vec{\beta}$ που σημαίνει

ότι $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$, άτοπο γιατί $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ μη συγγραμμικά. Άρα $x=0$.

Από την (1) για $x=0$ έχουμε $0\vec{\alpha}+\psi\vec{\beta}=0\Leftrightarrow\psi=0$.

Ομοίως, αν $\psi\neq 0$ καταλήγουμε σε άτοπο.

β. Επειδή Α, Ζ, Β συνευθειακά, τα διανύσματα $\overrightarrow{AZ}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι συγγραμμικά επομένως σύμφωνα με τη γνωστή συνθήκη $\overrightarrow{AZ}=\kappa\overrightarrow{AB}$ (2) με $\kappa>0$.



Άρα $\dfrac{|\overrightarrow{AZ}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\kappa$ (4). Ομοίως $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{A\Gamma}$ (3) με $\lambda>0$.

Άρα $\dfrac{|\overrightarrow{AH}|}{|\overrightarrow{A\Gamma}|}=\lambda$ (5).Επειδή $\overrightarrow{ZH}//\overrightarrow{B\Gamma}$ θα είναι $\overrightarrow{ZH}=\mu\overrightarrow{B\Gamma}$, $\mu>0$.

Έτσι έχουμε: $\overrightarrow{ZH}=\mu\overrightarrow{B\Gamma}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AZ}=\mu\left(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}\right)\overset{(2),(3)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow\lambda\overrightarrow{A\Gamma}-\kappa\overrightarrow{AB}=\mu\overrightarrow{A\Gamma}-\mu\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow(\lambda-\mu)\overrightarrow{A\Gamma}=(\kappa-\mu)\overrightarrow{AB}$.Επειδή τα $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{AB}$ δεν είναι συγγραμμικά, σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, θα είναι :

$\lambda-\mu=0$ και $\kappa-\mu=0$. Άρα $\lambda=\mu=\kappa$ (6).

Από τις σχέσεις (4), (5), (6) προκύπτει ότι: $\dfrac{|\overrightarrow{AZ}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{|\overrightarrow{AH}|}{|\overrightarrow{A\Gamma}|}$.

Άσκηση 15

Αν $\left|\vec{\alpha}\right|=3$, $\left|\vec{\beta}\right|=2$, $\left|\vec{\gamma}\right|=1$ **και για τα τρία διανύσματα** $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ **ισχύει η σχέση** $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}-3\vec{\gamma}=\vec{0}$ **(1) να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης** $\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\vec{\alpha}$.

Λύση

Από τη σχέση (1) έχουμε: $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}=3\vec{\gamma}$ οπότε

$$\left(\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right)^2=9\vec{\gamma}^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2-4\vec{\alpha}\vec{\beta}+4\vec{\beta}^2=9\vec{\gamma}^2 \Leftrightarrow 4\vec{\alpha}\vec{\beta}=\vec{\alpha}^2+4\vec{\beta}^2-9\vec{\gamma}^2$$

Άρα $4\vec{\alpha}\vec{\beta}=9+16-9 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta}=4$.

Ομοίως εργαζόμενοι, μπορούμε να υπολογίσουμε τα $\vec{\alpha}\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}\vec{\gamma}$.

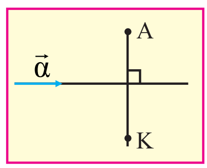
Είναι $\vec{\alpha}\vec{\gamma}=\frac{1}{3}$ και $\vec{\beta}\vec{\gamma}=-\frac{4}{3}$. Επομένως: $\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\vec{\alpha}=4-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}=\frac{9}{3}=3$.

Άσκηση 16

Δίνεται διάνυσμα $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ **και το σταθερό σημείο Α. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Κ του επιπέδου για τα οποία ισχύει:** $\vec{\alpha}\cdot\vec{AK}=\lambda$, $\lambda\in R$.

Λύση

i. Αν $\lambda=0$

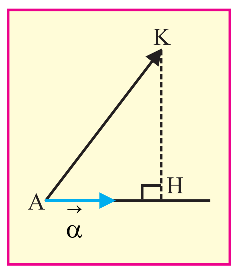


τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{AK}=0$, δηλαδή: $\vec{\alpha}\perp\vec{AK}$ οπότε το Κ κινείται σε ευθεία κάθετη στο φορέα του $\vec{\alpha}$ που περνάει από το δοσμένο σημείο Α.

ii. Αν $\lambda\neq0$

και Α η αρχή του διανύσματος $\vec{\alpha}$ και Η η προβολή του σημείου Κ στον φορέα του $\vec{\alpha}$, τότε :

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{AK}=\lambda \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{AK}=\lambda \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{AH}=\lambda\text{, οπότε}$$

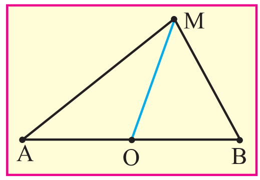


Άρα το σημείο Η βρίσκεται σε σταθερή απόσταση από το σημείο Α. Επομένως το Κ κινείται σε ευθεία κάθετη στο φορέα του $\vec{\alpha}$ που περνάει από το σταθερό σημείο Η.

Άσκηση 17

Δίνονται τα σταθερά σημεία Α, Β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα οποία ισχύει: $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=\lambda$, **(λ θετικός πραγματικός).**

Λύση



Έστω O το μέσο του τμήματος AB.

Είναι $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=\lambda \Leftrightarrow \left(\vec{MO}+\vec{OA}\right)\left(\vec{MO}+\vec{OB}\right)=\lambda \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\vec{MO}+\vec{OA}\right)\left(\vec{MO}-\vec{OA}\right)=\lambda \Leftrightarrow \vec{MO}^2-\vec{OA}^2=\lambda \Leftrightarrow$

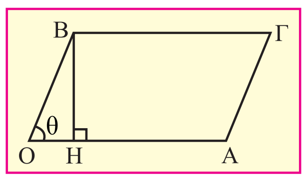
$$\Leftrightarrow \left|\vec{MO}\right|^2=\lambda+\left|\vec{OA}\right|^2 \Leftrightarrow \left|\vec{MO}\right|^2=\lambda+\left(\frac{\left|\vec{AB}\right|}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left|\vec{MO}\right|^2=\lambda+\frac{\left|\vec{AB}\right|^2}{4} \Leftrightarrow \left|\vec{MO}\right|=\sqrt{\lambda+\frac{\left|\vec{AB}\right|^2}{4}}.$$

Άρα το M απέχει από το σταθερό σημείο O σταθερή απόσταση $\sqrt{\lambda+\frac{\left|\vec{AB}\right|^2}{4}}$, δηλαδή κινείται σε κύκλο με κέντρο O (το μέσο του AB) και ακτίνα $R=\sqrt{\lambda+\frac{\left|\vec{AB}\right|^2}{4}}$.

Άσκηση 18

Έστω θ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΟΑΓΒ είναι: $E=\left(\vec{OA}\cdot\vec{OB}\right)\cdot \varepsilon\varphi\theta=\sqrt{\left|\vec{OA}\right|^2\cdot\left|\vec{OB}\right|^2-\left(\vec{OA}\cdot\vec{OB}\right)^2}$ **.**

Λύση



Έστω E το εμβαδόν του ΟΑΓΒ. Είναι $E=\left|\vec{OA}\right|\cdot\left|\vec{BH}\right|$ (1)

Επίσης $\eta\mu\theta=\frac{\left|\vec{BH}\right|}{\left|\vec{OB}\right|} \Leftrightarrow \left|\vec{BH}\right|=\left|\vec{OB}\right|\cdot\eta\mu\theta$ (2)

Η (1) γίνεται σύμφωνα με τη (2): $E=\left|\vec{OA}\right|\cdot\left|\vec{OB}\right|\cdot\eta\mu\theta=\left|\vec{OA}\right|\cdot\left|\vec{OB}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu\theta\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$

Άρα $E=\left(\vec{OA}\cdot\vec{OB}\right)\cdot\varepsilon\varphi\theta$

Ακόμα έχουμε: $E=\left|\vec{OA}\right|\cdot\left|\vec{OB}\right|\cdot\eta\mu\theta=\sqrt{\left|\vec{OA}\right|^2\cdot\left|\vec{OB}\right|^2\cdot\eta\mu^2\theta}=\sqrt{\left|\vec{OA}\right|^2\cdot\left|\vec{OB}\right|^2(1-\sigma\upsilon\nu^2\theta)}=$

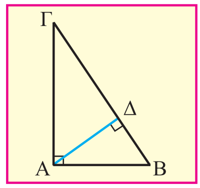
$$=\sqrt{\left|\vec{OA}\right|^2\cdot\left|\vec{OB}\right|^2-\left|\vec{OA}\right|^2\cdot\left|\vec{OB}\right|^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta}=\sqrt{\left|\vec{OA}\right|^2\cdot\left|\vec{OB}\right|^2-\left(\vec{OA}\cdot\vec{OB}\right)^2}$$

Άσκηση 19

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB \perp A\Gamma \left(\hat{A}=90^o\right)$ **να αποδείξετε τις σχέσεις:**

α. $\vec{AB}^2 = \vec{B\Gamma}\cdot\vec{B\Delta}$ **β.** $\vec{A\Gamma}^2 = \vec{\Gamma B}\cdot\vec{\Gamma\Delta}$, όπου ΑΔ ύψος

γ. $\vec{AB}^2 + \vec{A\Gamma}^2 = \vec{B\Gamma}^2$ **(Πυθαγόρειο Θεώρημα).**



Λύση

α. Είναι $\vec{AB}^2 = \vec{AB}\cdot\vec{AB} = \left(\vec{A\Delta}+\vec{\Delta B}\right)\cdot\left(\vec{A\Gamma}+\vec{\Gamma B}\right) =$

$$\vec{A\Delta}\cdot\vec{A\Gamma}+\vec{A\Delta}\cdot\vec{\Gamma B}+\vec{\Delta B}\cdot\vec{A\Gamma}+\vec{\Delta B}\cdot\vec{\Gamma B} \overset{\left(\vec{A\Delta}\perp\vec{\Gamma B}\right)}{=}$$

$$=\left(\vec{A\Delta}+\vec{\Delta B}\right)\cdot\vec{A\Gamma}+\vec{\Gamma B}\cdot\vec{\Delta B} = \vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}+\vec{\Gamma B}\cdot\vec{\Delta B} \overset{\vec{AB}\perp\vec{A\Gamma}}{=} 0+\left(-\vec{B\Gamma}\right)\left(-\vec{B\Delta}\right) = \vec{B\Gamma}\cdot\vec{B\Delta}$$

β. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\vec{A\Gamma}^2 = \vec{\Gamma B}\cdot\vec{\Gamma\Delta}$

γ. Είναι $\vec{AB}^2 = \vec{B\Gamma}\cdot\vec{B\Delta} = \left|\vec{B\Gamma}\right|\cdot\left|\vec{B\Delta}\right| = (B\Gamma)(B\Delta)$ (1) $\left(\vec{B\Gamma}\uparrow\uparrow\vec{B\Delta}\right)$

$\vec{A\Gamma}^2 = \vec{\Gamma B}\cdot\vec{\Gamma\Delta} = \left|\vec{\Gamma B}\right|\cdot\left|\vec{\Gamma\Delta}\right| = \left|\vec{B\Gamma}\right|\left|\vec{\Delta\Gamma}\right| = (B\Gamma)(\Delta\Gamma)$ (2) $\left(\vec{\Gamma B}\uparrow\uparrow\vec{\Gamma\Delta}\right)$

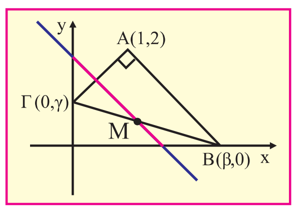
Προσθέτουμε τις σχέσεις (1) και (2) και έχουμε:

$$\vec{AB}^2+\vec{A\Gamma}^2 = (B\Gamma)\left[(B\Delta)+(\Delta\Gamma)\right] = (B\Gamma)\cdot(B\Gamma) = (B\Gamma)^2 = \left|\vec{B\Gamma}\right|^2 = \vec{B\Gamma}^2.$$

Άσκηση 20

Μια ορθή γωνία στρέφεται γύρω από τη κορυφή της Α (1, 2). Οι πλευρές της τέμνουν τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα και έστω Μ το μέσο του ΒΓ. Να δείξετε ότι το Μ κινείται σε ευθεία.

Λύση



Έστω ότι τα σημεία Β και Γ έχουν συντεταγμένες Β (β, 0) και Γ (0, γ).

Επειδή $\hat{A} = 1^L \Leftrightarrow \vec{AB}\perp\vec{A\Gamma}$ οπότε $\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma} = 0$ (1)

Είναι $\vec{AB} = (\beta-1,-2)$ και $\vec{A\Gamma} = (-1,\gamma-2)$ και

η (1) γίνεται: $1-\beta-2\gamma+4 = 0 \Leftrightarrow \beta+2\gamma = 5$ (2)

Το μέσο Μ του τμήματος ΒΓ έχει συντεταγμένες

$$\left(\frac{0+\beta}{2},\frac{\gamma+0}{2}\right) = \left(\frac{\beta}{2},\frac{\gamma}{2}\right) = (x_M, y_M).$$

Διαιρώντας τη σχέση (2) με 2 έχουμε: $\frac{\beta}{2}+2\frac{\gamma}{2} = \frac{5}{2}$. Δηλαδή

$$x_M + 2y_M = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x_M + 4y_M = 5.$$

Άρα το Μ κινείται στην ευθεία $2x+4y = 5$.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με την ένδειξη Σ (σωστό) ή Λ (λάθος)

α. Δίνονται τα σημεία Α (- 5, - 2), Β (3, - 1), Γ (11, 0), τότε:

i. Τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά

ii. Τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα: $M\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$, $N\left(7,-\frac{1}{2}\right)$

iii. $\vec{MN}\cdot\vec{A\Gamma}=0$

β. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{OA}=12\vec{\alpha}$, $\vec{OB}=6\vec{\beta}$ και $\vec{O\Gamma}=22\vec{\beta}-32\vec{\alpha}$.

i. Τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά **ii.** $\left|\vec{AB}\right|=\frac{3}{8}\left|\vec{B\Gamma}\right|$ **iii.** $\left(\widehat{\vec{AB},\vec{B\Gamma}}\right)=\pi$

γ. Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|$, αν και μόνο αν, τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ έχουν την ίδια κατεύθυνση.

δ. Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ μη μηδενικά διανύσματα. Τότε: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}\Leftrightarrow\vec{\beta}=\vec{\gamma}$ ή $\vec{\alpha}\left(\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right)=0$

ε. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει: $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2+\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2=2\left(\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2\right)$

στ. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα και ισχύει: $\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right|$, τότε:

i. $\vec{\alpha}=\vec{\beta}=\vec{0}$ **ii.** $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ **iii.** $\vec{\alpha}\nearrow\swarrow\vec{\beta}$

ζ. Αν $\vec{\alpha}=2\vec{i}-3\vec{j}$ και $\vec{\beta}=3\vec{i}+2\vec{j}$, τότε:

i. $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ **ii.** $\left|\vec{\beta}-\vec{\alpha}\right|=\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|$ **iii.** $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\left(\vec{\beta}-\vec{\alpha}\right),\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)}\right)=0$

η. $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right|\Leftrightarrow\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα

θ. Αν $\vec{\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$ και $\beta=\sqrt{3}\vec{i}+\vec{j}$, τότε $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=60^o$

ι. Θεωρούμε δυο ίσα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq 0$, τότε:

i. $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$ **ii.** $\vec{\alpha}\nearrow\nearrow\vec{\beta}$ **iii.** $\vec{\alpha}\nearrow\swarrow\vec{\beta}$

κ. Αν $\vec{\alpha}=3\vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha}\vec{\beta}=3\vec{\beta}^2$

λ. Αν $\vec{\alpha}\vec{\beta}=3\vec{\beta}^2$, τοτε: $\vec{\alpha}=3\vec{\beta}$

μ. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, ισχύει: $\vec{\alpha}=3\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\vec{\beta}=3\vec{\beta}^2$

ν. Τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ είναι κάθετα. Τότε: $(\vec{x}+\vec{y})\vec{x}=\vec{x}^2$

2. Να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}=(1,\sqrt{3})$ και $\vec{\beta}(\sqrt{3},3)$

3. Αν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$ και $(\widehat{\vec{\alpha}\vec{\beta}})=\dfrac{\pi}{3}$ να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, $\vec{v}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$

4. Αν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$ και $\hat{\theta}=(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ να δείξετε ότι: $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=2\left|\eta\mu\dfrac{\theta}{2}\right|$

(**Υπ:** Να υπολογίσετε το $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2$)

5. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει: $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$ να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|\cdot\sqrt{3}$.

(**Υπ:** Υψώστε τις δοσμένες σχέσεις στο τετράγωνο)

6. Να δείξετε ότι οι φορείς των διανυσμάτων $\vec{\alpha}=2\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{\beta}=-6\vec{i}+4\vec{j}$, $\vec{\gamma}=-4\vec{i}+7\vec{j}$ σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο.

(**Απ:** Είναι $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$)

7. Έστω ΑΒΓ είναι ορθογώνιο τριγώνο με $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{A\Gamma}$ $(\hat{A}=90^o)$ και ΑΔ είναι το ύψος του.

Αποδείξτε ότι $(A\Delta)^2=(\Delta B)\cdot(\Delta\Gamma)$.

(**Υπ:** $(A\Delta)^2=|\overrightarrow{A\Delta}|^2=\overrightarrow{A\Delta}^2=\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{A\Delta}=.....$)

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Θεωρούμε δύο μη μηδενικά διανύσματα τέτοια ώστε: $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}=4\vec{\beta}$ **και** $4\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=\vec{\alpha}$ **.**

α. Να αποδείξετε ότι : $\vec{\alpha}\vec{\beta}=2\vec{\beta}^2$

β. Να βρείτε το λογο : $\dfrac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}$

γ. Να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$

δ. Να βρείτε τον $\lambda\in R$ **, ώστε τα διανύσματα** $\overrightarrow{u_1}=\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ **και** $\overrightarrow{u_2}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ **να είναι κάθετα.**

(Απ.: β. 4, γ. $\dfrac{\pi}{3}$**, δ.** $\lambda=-\dfrac{1}{25}$**)**