Μάθημα 2

# Συντεταγμένες στο επίπεδο

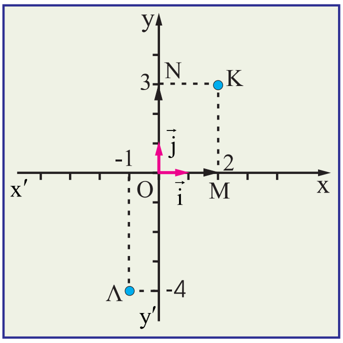
## Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

### Σύστημα συντεταγμένων

Ένα σύστημα δυο κάθετων αξόνων με κοινή αρχή O και μοναδιαία διανύσματα, $\vec{i}$ και $\vec{j}$ λέμε ότι αποτελεί ένα **καρτεσιανό σύστημα αξόνων (ορθοκανονικό όταν τα μοναδιαία είναι ισομήκη).**

Ο οριζόντιος άξονας $x'x$ ονομάζεται **άξονας των τετμημένων** και ο κατακόρυφος άξονας $y'y$ ονομάζεται **άξονας των τεταγμένων.**

Οι προβολές τυχαίου σημείου, έστω K, του επιπέδου ορίζουν στους δύο άξονες $x'x$, $y'y$ τα διανύσματα $\overrightarrow{OM}$ και $\overrightarrow{ON}$ αντίστοιχα.



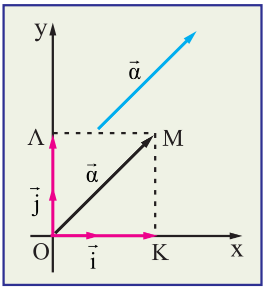

Τα διανύσματα αυτά είναι συγγραμμικά προς τα μοναδιαία $\vec{i}$ και $\vec{j}$ και επομένως υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y τέτοιοι ώστε να ισχύουν:

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{ON} = y \cdot \vec{j}$$

Ο αριθμός x ονομάζεται **τετμημένη** του σημείου K και ο αριθμός y ονομάζεται **τεταγμένη** του σημείου K. Η τετμημένη και η τεταγμένη ονομάζονται **συντεταγμένες** του K.

### Γραμμικός συνδυασμός

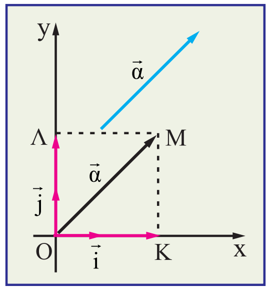
Οποιοδήποτε διάνυσμα του επιπέδου γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{i}$ και $\vec{j}$ και μάλιστα με μοναδικό τρόπο. Για το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ του διπλανού σχήματος ισχύει: $\overrightarrow{OM} = \vec{\alpha} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{O\Lambda} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$



## Συντεταγμένες διανύσματος

Τα διανύσματα $x \cdot \vec{i}$ και $y \cdot \vec{j}$ λέγονται **συνιστώσες** του $\vec{OM}$ και οι πραγματικοί αριθμοί x και y λέγονται **συντεταγμένες** του $\vec{OM}$ και γράφουμε: $\vec{OM} = \vec{\alpha} = (x, y)$.

Επομένως, **το διάνυσμα που έχει αρχή την αρχή των αξόνων έχει συντεταγμένες ίσες με τις συντεταγμένες του τέλους του.**




## Ισότητα διανυσμάτων

Δύο διανύσματα είναι ίσα, αν και μόνο αν, έχουν ίσες τις ομώνυμες συντεταγμένες τους.

## Συντεταγμένες γραμμικού συνδυασμού διανύσματος

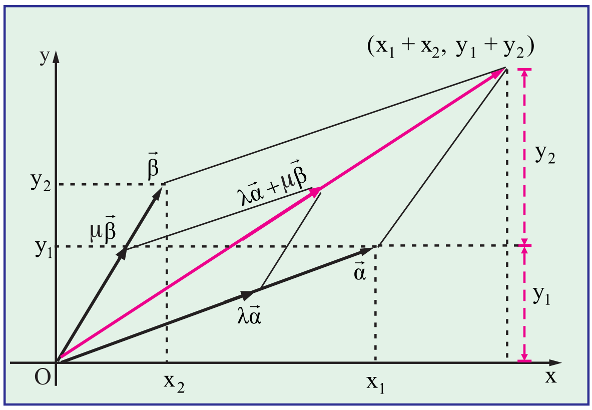
Για τα διανύσματα:

$\vec{\alpha}=(x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$

ισχύουν:

- $\vec{\alpha}+\vec{\beta} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $\lambda\vec{\alpha} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$ $\lambda \in R$
- $\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta} = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)$

όπου λ,μ είναι πραγματικοί αριθμοί.

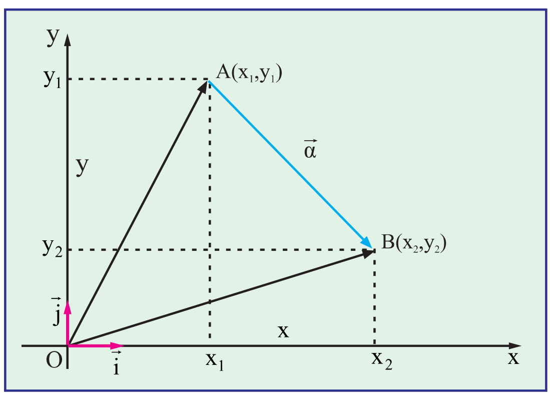



## Συντεταγμένες διανύσματος συναρτήσει των συντεταγμένων των άκρων του

Έστω το διάνυσμα $\vec{\alpha} = \vec{AB}=(x,y)$ με $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ ,τότε ισχύει:

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Δηλαδή, **κάθε μια απο τις συντεταγμένες ενός διανύσματος είναι ίση με τη διαφορά των ομώνυμων συντεταγμένων των άκρων ( τέλους - αρχής ) .**

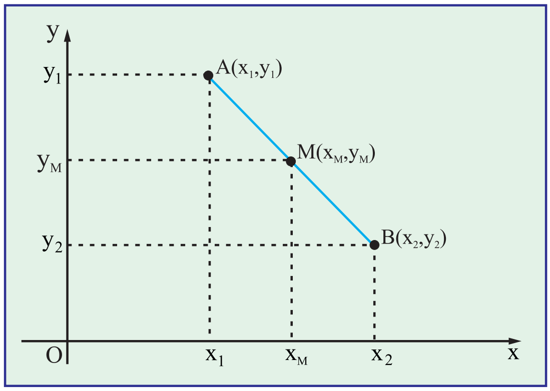


## Συντεταγμένες του μέσου ενός ευθύγραμμου τμήματος συναρτήσει των συντεταγμένων των άκρων του.

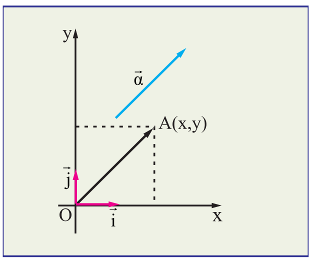
Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ σημεία του επιπέδου και $M(x_M, y_M)$ το μέσον του.

Αποδεικνύεται ότι:

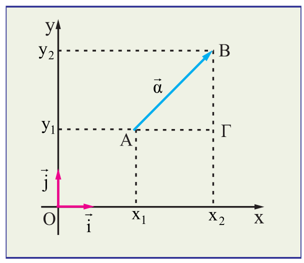
$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$




## Μέτρο διανύσματος




Το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (x, y)$ έχει μέτρο $|\overrightarrow{OA}| = |\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$



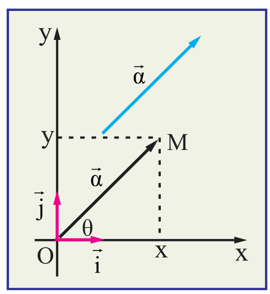

Το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (x, y)$ έχει μέτρο $|\vec{\alpha}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

## Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος

**Συντελεστή διεύθυνσης διανύσματος** ονομάζουμε το πηλίκο της τεταγμένης $y$ προς την τετμημένη $x$ και γράφουμε:

$$\lambda = \frac{y}{x} = \varepsilon\varphi\theta \;, \; \alpha\nu \;\; x \neq 0$$

Για τα διανύσματα τα παράλληλα στον άξονα y΄y δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης.

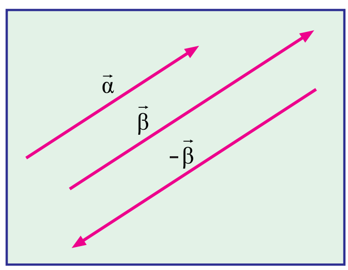



## Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ του επιπέδου ισχύει η ισοδυναμία:

$$\vec{\alpha} /\!/ \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

Αν τα διανύσματα έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_{\vec{\alpha}}$, $\lambda_{\vec{\beta}}$ τότε: $\vec{\alpha} /\!/ \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} = \lambda_{\vec{\beta}}$.



## B. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

**Κατηγορία - Μέθοδος 1**

Ο γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων γίνεται και γραμμικός συνδυασμός μεταξύ των συντεταγμένων τους. Έτσι, μπορούμε να υπολογίσουμε κάποιες παραμέτρους, που μας δίνονται με τα διανύσματα. Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε και όταν μας ζητούν να γράψουμε ένα διάνυσμα ως γραμμικό συνδυασμό γνωστών διανυσμάτων.

**Παράδειγμα 1**

**1. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(\lambda^2-4\lambda+3,\ \ \lambda^2-3\lambda)$. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες είναι:**

**α.** $\vec{\alpha}=\vec{0}$ **β.** $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ **και** $\vec{\alpha}//x'x$ **γ.** $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ **και** $\vec{\alpha}//y'y$

**Λύση**

**α.** Είναι το διάνυσμα μηδενικό, αν και μόνο αν κάθε μία απο τις συντεταγμένες του είναι ίση με το 0. Δηλαδή,

$$\vec{\alpha}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda^2-4\lambda+3=0\\ \lambda^2-3\lambda=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=1\ \eta\ \lambda=3\\ \lambda=0\ \eta\ \lambda=3\end{cases}\Leftrightarrow\lambda=3$$

**β.** $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ και $\vec{\alpha}//x'x\Leftrightarrow\lambda^2-4\lambda+3\neq0$ και $\lambda^2-3\lambda=0\Leftrightarrow(\lambda\neq1$ και $\lambda\neq3)$ και $(\lambda=0$ ή $\lambda=3)\Leftrightarrow\lambda=0$

**γ.** $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ και $\vec{\alpha}//y'y\Leftrightarrow\lambda^2-4\lambda+3=0$ και $\lambda^2-3\lambda\neq0$ και $\Leftrightarrow$ $(\lambda=1$ και $\lambda=3)$ και $(\lambda\neq0$ και $\lambda\neq3)\Leftrightarrow\lambda=1$

**Παράδειγμα 2**

**Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}=10\vec{i}+4\vec{j}$. Να γράψετε το διάνυσμα αυτό ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$, όπου $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}$ και $\vec{v}=\vec{i}+4\vec{j}$**

**Λύση**

Θα προσδιορίσουμε πραγματικούς αριθμούς λ και κ τέτοιους ώστε να ισχύει: $\vec{\alpha}=\lambda\vec{u}+\kappa\vec{v}$

Είναι:

$$\vec{\alpha}=\lambda\vec{u}+\kappa\vec{v}\Leftrightarrow10\vec{i}+4\vec{j}=\lambda(2\vec{i}-\vec{j})+\kappa(\vec{i}+4\vec{j})\Leftrightarrow\begin{cases}2\lambda+\kappa=10\\ -\lambda+4\kappa=4\end{cases}\Leftrightarrow\kappa=2\ \text{ και }\ \lambda=4$$

Επομένως, $\vec{\alpha}=4\vec{u}+2\vec{v}$.

**Παράδειγμα 3**

**Δίνονται τα σημεία Α(0,3), Β(1, -4) και Γ(2,5). Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες σημείου Μ του επιπέδου για το οποίο ισχύει: $\vec{AB}=-2\vec{M\Gamma}$**

**Λύση**

Έστω Μ(x,y), τότε είναι $\vec{AB}=(1,-7)$ και $\vec{M\Gamma}=(2-x,5-y)$, οπότε

$$\vec{AB}=-2\vec{M\Gamma}\Leftrightarrow(1,-7)=(2x-4,2y-10)\Leftrightarrow\begin{cases}2x-4=1\\2y-10=-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=5\\2y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{5}{2}\\y=\frac{3}{2}\end{cases}$$

Επομένως, $M\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$

**Κατηγορία - Μέθοδος 2**

Όταν μας δίνεται παραλληλία διανυσμάτων ή όταν μας ζητούν να αποδείξουμε ότι κάποια έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ διανύσματα είναι παράλληλα χρησιμοποιούμε τις σχέσεις:

i. $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ , $\lambda\in R$

ii. $\det\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=0$

iii. $\lambda_{\vec{\alpha}}=\lambda_{\vec{\beta}}$ ,όπου $\lambda_{\vec{\alpha}},\lambda_{\vec{\beta}}$ είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων.

**Παράδειγμα 1**

**Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(4,x)$ και $\vec{\beta}=(x,1)$ να είναι: i. ομόρροπα ii. αντίρροπα.**

**Λύση**

Είναι $\vec{\alpha}//\vec{\beta}\Leftrightarrow\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}4 & x\\x & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 4-x^2=0\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=2$ ή $x=-2$

Είναι $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$, με $\lambda>0$ και $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$, με $\lambda<0$

**i.** Άν $x=2$ τότε $\vec{\alpha}=(4,2)=2(2,1)=2\vec{\beta}$. Αρα $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.

**ii.** Άν $x=-2$ τότε $\vec{\alpha}=(4,-2)=-2\vec{\beta}$. Άρα $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$.

**Κατηγορία - Μέθοδος 3**

Στις ασκήσεις που αναφέρονται σε συνευθειακά σημεία, θεωρούμε δύο από τα έξι διανύσματα που ορίζουν τα σημεία αυτά και χρησιμοποιούμε τη συνθήκη παραλληλίας,ή ότι η ορίζουσα των συντεταγμένων τους είναι ίση με το μηδέν .

**Παράδειγμα 1**

**Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και τα διανύσματα:**

$$\vec{OA} = 2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}, \vec{OB} = \vec{\alpha}+4\vec{\beta} \text{ και } \vec{O\Gamma} = 4\vec{\alpha}+\vec{\beta}$$

**Να αποδείξετε οτι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.**

**Λύση**

Για τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{B\Gamma}$ έχουμε: $\vec{AB} = \vec{OB}-\vec{OA} = \vec{\alpha}+4\vec{\beta}-(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}) = -\vec{\alpha}+\vec{\beta}$

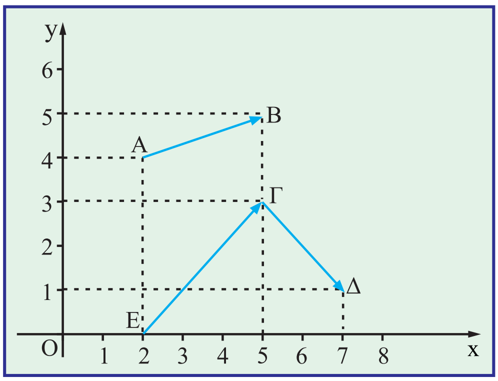
και $\vec{B\Gamma} = \vec{O\Gamma}-\vec{O\Delta} = 4\vec{\alpha}+\vec{\beta}-(\vec{\alpha}+4\vec{\beta}) = 3\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $\vec{B\Gamma} = -3(-\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = -3\vec{AB}$ που σημαίνει ότι τα σημεία Α,Β και Γ είναι συνευθειακά. ( Οι φορείς τους είναι παράλληλες ευθείες με κοινό σημείο )

## Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Άσκηση 1**

**Στο επόμενο σχήμα να γράψετε τους συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων: $\vec{AB}$ , $\vec{\Gamma\Delta}$ και $\vec{E\Gamma}$**




**Λύση**

Είναι Α ( 2 , 4 ) , Β ( 5 , 5 ) , Γ ( 5 , 3 ) , Δ ( 7 , 1 ) και Ε ( 2 , 0 ) οπότε

$\vec{AB} = (3,1)$, $\vec{\Gamma\Delta} = (2,-2)$, $\vec{E\Gamma} = (3,3)$ και

οι συντελεστές διεύθυνσης είναι:

$$\lambda_{\vec{AB}} = \frac{1}{3}, \lambda_{\vec{\Gamma\Delta}} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ και } \lambda_{\vec{E\Gamma}} = \frac{3}{3} = 1$$

**Άσκηση 2**

**Δίνονται τα σημεία Α ( 2 , 0 ) , Β ( -1 , 2 ) και Γ ( -3 , -3 ). Να υπολογίσετε το μήκος των πλευρών και το μήκος της διαμέσου που άγεται από την κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ.**

**Λύση**

Στο σχήμα που ακολουθεί παραστήσαμε τα σημεία Α , Β και Γ. Είναι:

$$\vec{AB} = (-1-2, 2-0) = (-3,2)$$

$$\vec{B\Gamma} = (-3+1, -3-2) = (-2,-5)$$

$$\vec{A\Gamma} = (-3-2, -3-0) = (-5,-3)$$

Οπότε τα αντίστοιχα μήκη είναι:

$$AB = \sqrt{(-3)^2+2^2} = \sqrt{13}$$

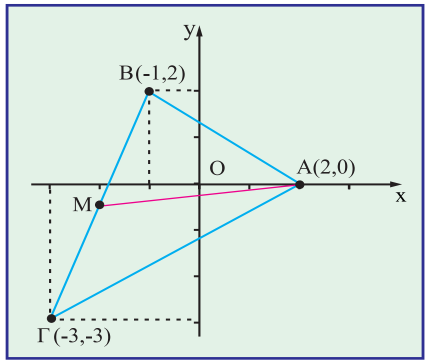
$$B\Gamma = \sqrt{(-2)^2+(-5)^2} = \sqrt{29}$$

$$A\Gamma = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$$

Οι συντεταγμένες του μέσου Μ της πλευράς ΒΓ είναι: $M\left(\frac{-3-1}{2}, \frac{-3+2}{2}\right) = \left(-2, \frac{-1}{2}\right)$

Άρα, $\vec{AM} = \left(-4, -\frac{1}{2}\right)$ και το μήκος του είναι:

$$|\vec{AM}| = \sqrt{(-4)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2}.$$




### Άσκηση 3

**Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και σημείο Μ τέτοιο ώστε να ισχύει:**

$$\vec{AM} = \lambda \cdot \vec{MB}, \lambda \in R\text{-}\{-1\}$$

**Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του Μ συναρτήσει των συντεταγμένων των σημείων Α και Β.**

### Λύση

Έστω Μ(x,y) και $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ τότε είναι: $\vec{AM} = (x - x_1, y - y_1)$ και

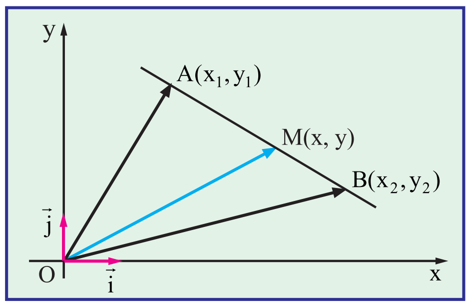
$\vec{MB} = (x_2 - x, y_2 - y)$ οπότε: $\vec{AM} = \lambda \cdot \vec{MB} \Leftrightarrow$

$(x - x_1, y - y_1) = \lambda \cdot (x_2 - x, y_2 - y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ x - x_1 = \lambda \cdot (x_2 - x)$ και $y - y_1 = \lambda(y_2 - y)$

$\Leftrightarrow x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$ και $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, με $\lambda \neq -1$

**Σχόλιο:** Για $\lambda = 1$ παίρνουμε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ.




## Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

**1.** Να προσδιορίσετε διάνυσμα που να έχει μέτρο 125 και να είναι

**i.** αντίρροπο με το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (3, -4)$ **ii.** ομόρροπο με το διάνυσμα $\vec{\beta} = (4, 3)$

(**Υπ:** Έστω $\vec{u} = (x, y)$ το ζητούμενο διάνυσμα.Τότε $\vec{u} \uparrow\downarrow \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{u} = \lambda \cdot \vec{\alpha}$ με $\lambda < 0$ και $\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{u} = \lambda \cdot \vec{\beta}$ με $\lambda > 0$ **i.** $\vec{u} = (-75, 100)$ **ii.** $\vec{u} = (100, 75)$ )

**2.** Σ' ένα σύστημα συντεταγμένων, οι τετμημένες των σημείων Α και Β είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (\lambda^2 - 6\lambda + 11) \cdot x - 2002 = 0$. Να βρείτε το λ, ώστε το μέσο του ΑΒ να έχει τετμημένη ίση με 3.

(**Υπ:** Χρησιμοποιήστε τον τύπο που δίνει το άθροισμα των ριζών τριωνύμου.Είναι $\lambda = 5$ ή $\lambda = 1$)

**3.** Δίνονται τα σημεία Α(3,0) και Β(4,2). Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες της κορυφής Γ του παραλληλογράμμου ΟΑΒΓ όπου Ο το σημείο Ο(0, 0).

(**Απ:** Γ(1, 2))

**4.** Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Α(-1,3), Β(2,0) και Γ(-3,5) είναι συνευθειακά.

(**Υπ:** Δείξτε $\vec{AB} // \vec{A\Gamma}$)

**5.** Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x, 3)$ και $\vec{\beta} = (3, x)$ να είναι ομόρροπα.

(**Απ:** x = 3)

**6.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με: Α(0,4), Β(-2,0), Γ(5,0)και σημείο Σ της ΒΓ είναι τέτοιο ώστε $3\vec{B\Sigma} - 4\vec{\Sigma\Gamma} = \vec{0}$.

**α.** Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{A\Sigma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$.

**β.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του $\vec{A\Sigma}$

(**Απ: α.** $\vec{A\Sigma} = \frac{3}{7}\vec{AB} + \frac{4}{7}\vec{A\Gamma}$ **β.** $x = \frac{-38}{21}$, $y = \frac{-328}{21}$ )

## Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

**α. Να προσδιορίσετε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda - 2, \mu + 1)$ και $\vec{\beta} = (2\lambda, -3\mu + 2)$ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ να είναι συγγραμμικά προς τα διανύσματα $\vec{\gamma} = (-2, 4)$ και $\vec{\delta} = (1, 5)$ αντίστοιχα.**

**β. Διάνυσμα με αρχή την αρχή των συντεταγμένων , έχει τετμημένη - 3 και συντελεστή διεύθυνσης -1. Να βρείτε σε ποιό τεταρτημόριο ανήκει το πέρας του.**

(**Υπ.: α.** Χρησιμοποιείστε τη συνθήκη παραλληλίας,
**β.** Πρέπει να έχει ετερόσημες συντεταγμένες)