# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

## ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝ/ΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

**Περιέχει:** Όλη την ύλη της Β΄ Λυκείου, σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα του Υπουργείου Παιδείας σε **(13)** **ΒΙΒΛΙΟμαθήματα** που το καθένα περιέχει:

**Α. Απαραίτητες γνώσεις θεωρίας**

**Β. Λυμένα παραδείγματα**

**Γ. Λυμένες ασκήσεις**

**Δ. Προτεινόμενα θέματα**

**Ε. Το ξεχωριστό θέμα**

Θέματα που κινούν τη σκέψη και βοηθούν στο σωστό τρόπο μάθησης.

# ΠΡΟΛΟΓΟΣ

**Αγαπητοί συνάδελφοι,**
**Φίλοι μαθητές και μαθήτριες**

Η καινούργια μας σειρά βιβλίων με τον τίτλο "**ΒΙΒΛΙΟμαθήματα**" δημιουργήθηκε από μια ιδέα μας για το περιοδικό "**Εξετάσεις**" της Ελευθεροτυπίας. Παρουσιάσαμε στην εφημερίδα τα μαθήματα, όπως γίνονται στον πίνακα, δημιουργώντας για το σκοπό αυτό την πολυπληθέστερη συγγραφική ομάδα που έχει ποτέ συσταθεί, προσπαθώντας την εμπειρία της τάξης να την αποτυπώσουμε στο χαρτί. Τη συγγραφική ομάδα αποτελούν καθηγητές συγγραφείς καταξιωμένοι στη συνείδηση γονιών και μαθητών για την ποιότητα της δουλειάς τους.

Η συλλογική αυτή προσπάθεια, εμπλουτισμένη, σε σχέση με το υλικό που παρουσιάστηκε στην εφημερίδα, απευθύνεται, αφενός στον καθηγητή που θέλει να παρουσιάσει το μάθημά του στην τάξη με μια μεθοδικότητα, αφετέρου στο φιλόπονο μαθητή που θέλει να διαβάσει, να μελετήσει και να κατανοήσει την ύλη, χωρίς να σπαταλήσει τον πολύτιμο χρόνο του.
Γι' αυτό κάθε μάθημα ολοκληρώνεται σ'έναν τόμο. Στο βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας περιέχονται μια σειρά από νέες, στην Ελληνική βιβλιογραφία, ασκήσεις καθώς και συνδυαστικά θέματα.

Ο σκοπός μας: να δημιουργήσουμε ένα "**εργαλείο δουλειάς**" για όλους μας.

Η ύλη χωρίστηκε σε **13 ΒΙΒΛΙΟμαθήματα** που το καθένα περιέχει:

- Τις απαραίτητες γνώσεις θεωρίας, με παρατηρήσεις για βαθύτερη κατανόηση.
- Λυμένα παραδείγματα, στα οποία καταδεικνύεται η μεθοδολογία επίλυσής τους σε **κίτρινο πλαίσιο**.
- Λυμένες ασκήσεις.
- Τα προτεινόμενα θέματα με υποδείξεις - απαντήσεις σε **μπλέ πλαίσιο**.
- Το "**ξεχωριστό θέμα**".

Όσοι από τους συναδέλφους επιθυμούν να έχουν τις λύσεις των ασκήσεων, για έλεγχο των απαντήσεων, με χαρά θα τις στείλουμε αν επικοινωνήσουν μαζί μας. Επίσης, θα θέλαμε κρίσεις, παρατηρήσεις, καθώς και επισημάνσεις γι' αυτή μας την προσπάθεια, ώστε η γόνιμη αυτή ανταλλαγή απόψεων να βοηθήσει στη βελτίωση των μελλοντικών μας εκδόσεων.

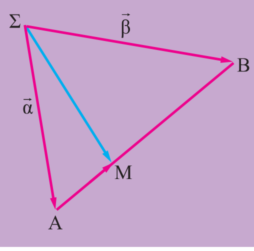
Η συγγραφική ομάδα

# Περιεχόμενα

# 1ο Κεφάλαιο

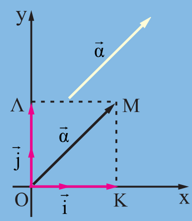
## 1ο μάθημα

### Διανύσματα



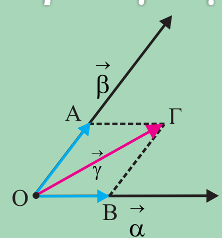

## 2ο μάθημα

### Συντεταγμένες




## 3ο μάθημα

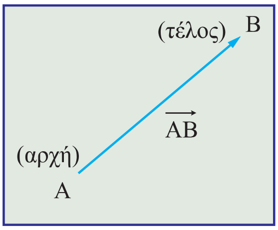
### Εσωτερικό γινόμενο



# Μάθημα 1 Διανύσματα

## Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

### Ορισμός διανύσματος - Πράξεις με διανύσματα




**Διάνυσμα**, ονομάζουμε κάθε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ του οποίου έχουμε καθορίσει την αρχή και το τέλος.

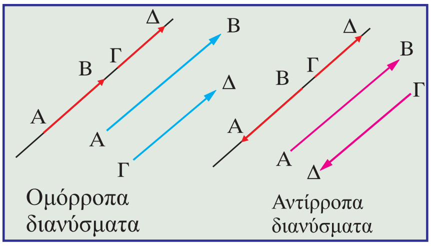
Το συμβολίζουμε με $\vec{AB}$ ή με μικρά γράμματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{u}, \vec{w}$ ...

Προφανώς είναι $\vec{AB} \neq \vec{BA}$.

Κάθε διάνυσμα χαρακτηρίζεται από:

- **Τη διεύθυνσή του**, η οποία καθορίζεται από την ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το διάνυσμα και η οποία ονομάζεται **φορέας.**
- **Τη φορά του.**
- **Το μέτρο του** δηλαδή το μήκος του. Το μέτρο ενός διανύσματος $\vec{AB}$ συμβολίζεται $|\overrightarrow{AB}|$.

Αν $|\overrightarrow{AB}| = 1$, τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ λέγεται **μοναδιαίο.**




Αν οι φορείς δύο μη μηδενικών $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ διανυσμάτων είναι παράλληλοι τότε τα διανύσματα αυτά ονομάζονται **παράλληλα** ή **συγγραμμικά**.Λέμε ότι έχουν την ίδια διεύθυνση και γράφουμε :

$$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$$

Δύο μη μηδενικά παράλληλα διανύσματα ονομάζονται **ομόρροπα** αν έχουν την ίδια φορά και **αντίρροπα** αν έχουν αντίθετες φορές.

Αν είναι ομόρροπα γράφουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, ενώ αν είναι αντίρροπα $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

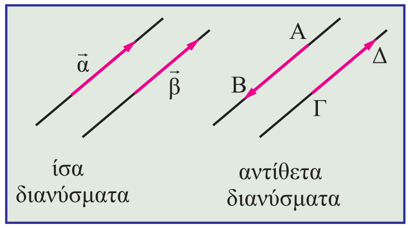
Αν η αρχή και το τέλος ενός διανύσματος συμπίπτουν τότε το διάνυσμα αυτό ονομάζεται **μηδενικό διάνυσμα** και το συμβολίζουμε $\vec{0}$.

Προφανώς το μηδενικό διάνυσμα έχει μέτρο ίσο με το μηδέν αφού ταυτίζεται με σημείο.
**Φορέας** του μηδενικού διανύσματος είναι οποιαδήποτε ευθεία διέρχεται απ' το σημείο αυτό. Συμβατικά μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι το μηδενικό διάνυσμα είναι ομόρροπο ή αντίρροπο ή κάθετο προς κάθε άλλο διάνυσμα.

**Ίσα** διανύσματα είναι τα ομόρροπα διανύσματα που έχουν το ίδιο μέτρο.

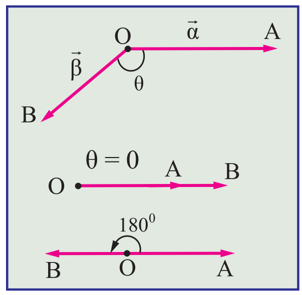
Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι ίσα γράφουμε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$

**Αντίθετα** διανύσματα είναι τα αντίρροπα διανύσματα που έχουν το ίδιο μέτρο. Στο διπλανό σχήμα τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ είναι αντίθετα διότι είναι




αντίρροπα και έχουν ίσα μέτρα $|\vec{AB}| = |\vec{\Gamma\Delta}|$. Γράφουμε τότε: $\vec{\Gamma\Delta} = -\vec{AB}$.

Ονομάζουμε **γωνία των μη μηδενικών διανυσμάτων** $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ την κυρτή γωνία $\widehat{AOB}$ και τη συμβολίζουμε με $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$ ή $(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\alpha}})$ ή απλά θ.




Είναι $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = (\widehat{\vec{\beta}, \vec{\alpha}})$

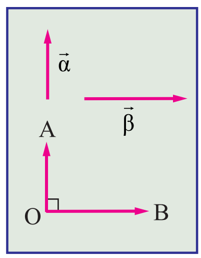
Φανερό είναι ότι: $0^o \le \theta \le 180^o$ ή $0 \le \theta \le \pi$
και ειδικότερα:

$$\hat{\theta} = 0 \text{, αν } \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$$

$$\hat{\theta} = \pi \text{, αν } \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$$

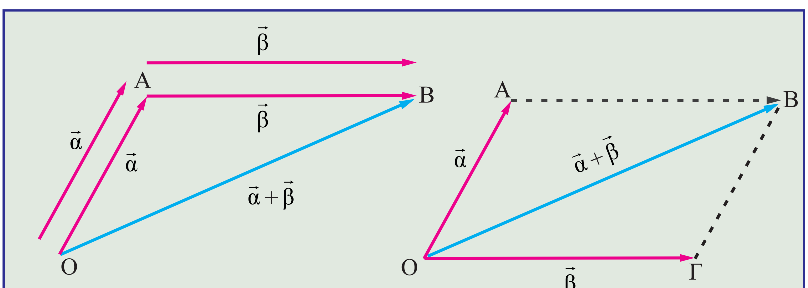
$$\hat{\theta} = \frac{\pi}{2} \text{, αν } \vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \ (\vec{\alpha}, \vec{\beta} \text{ κάθετα})$$

**Σχόλιο:** Αν ένα απ'τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα τότε γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε γωνία θ με $0 \le \theta \le \pi$.




## Πρόσθεση - Αφαίρεση διανυσμάτων

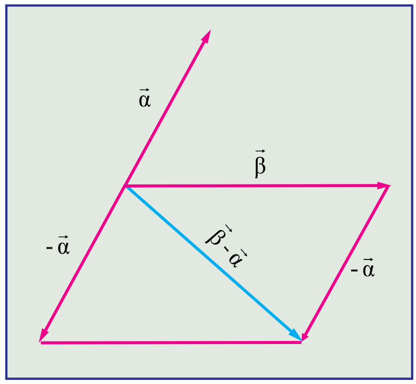
Με αρχή ένα σημείο O γράφουμε τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και $\vec{AB} = \vec{\beta}$. Το διάνυσμα $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ λέγεται **άθροισμα** των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.




Πρόσθεση διανυσμάτων που είναι διαδοχικά

Πρόσθεση διανυσμάτων με κοινή αρχή

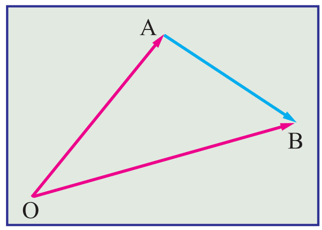
Παρατηρήστε ότι το τέλος του $\vec{OA}$ είναι η αρχή του $\vec{AB}$ **(διαδοχικά διανύσματα)**




Αν με αρχή το Ο γράψουμε το $\vec{O\Gamma}=\vec{AB}=\vec{\beta}$ τότε το $\vec{OB}=\vec{OA}+\vec{O\Gamma}$ είναι **η διαγώνιος του παραλληλογράμμου** ΟΑΒΓ.

Η **διαφορά** $\vec{\beta}-\vec{\alpha}$ του διανύσματος $\vec{\alpha}$ από το διάνυσμα $\vec{\beta}$ ορίζεται ως το άθροισμα του διανύσματος $\vec{\beta}$ με το αντίθετο του διανύσματος $\vec{\alpha}$, δηλαδή:

$$\vec{\beta}-\vec{\alpha}=\vec{\beta}+\left(-\vec{\alpha}\right)$$




Από τη σχέση $\vec{OA}+\vec{AB}=\vec{OB}$ προκύπτει $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}$ . Δηλαδή, κάθε διάνυσμα είναι ίσο με τη διαφορά των διανυσμάτων που αντιστοιχούν στα άκρα του, θεωρώντας ως κοινή αρχή ένα οποιοδήποτε σημείο, έστω Ο. Τα $\vec{OA}$ , $\vec{OB}$ λέγονται **διανυσματικές ακτίνες ή διανύσματα θέσης** των σημείων Α και Β αντιστοίχως και το τυχαίο σημείο Ο λέγεται **διανυσματική αρχή** ( ή σημείο αναφοράς ). Δηλαδή έχουμε:

$\vec{AB}$ = **διανυσματική ακτίνα του Β - διανυσματική ακτίνα του Α.**

**Για την πρόσθεση διανυσμάτων ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:**

1. $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$
2. $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)$
3. $\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{\alpha}$
4. $\vec{\alpha}+\left(-\vec{\alpha}\right)=\vec{0}$
5. $\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=\vec{\beta}+\vec{\gamma}\Leftrightarrow\vec{\alpha}=\vec{\beta}$
6. $\vec{\alpha}+\vec{x}=\vec{\alpha}\Leftrightarrow\vec{x}=0$
7. $\vec{\alpha}+\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{x}=-\vec{\alpha}$
8. $-\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=\left(-\vec{\alpha}\right)+\left(-\vec{\beta}\right)$

**Μέτρο αθροίσματος διανυσμάτων**

Έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Τότε ισχύει : $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|\le|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\le|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$.

Αν τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά ισχύει $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|<|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|<|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$.

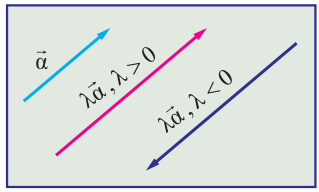
Αν τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα ισχύει $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|<|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ .

Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα ισχύει $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| = |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| < |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$

Αν ένα τουλάχιστον από τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα ισχύει

$$\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| = |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$$

## Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα




Το γινόμενο του πραγματικού αριθμού $\lambda \neq 0$ με το διάνυσμα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ είναι το διάνυσμα $\lambda \vec{\alpha}$ για το οποίο ισχύουν :

- Είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$ αν $\lambda > 0$ και αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ αν $\lambda < 0$.
- Έχει μέτρο $|\lambda||\vec{\alpha}|$

Αν $\lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$ τότε θεωρούμε ότι το γινόμενο $\lambda \vec{\alpha}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$.

## Βασικές ιδιότητες του γινομένου αριθμού με διάνυσμα

Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\lambda, \mu \in R$ ισχύουν:

| | |
|---|---|
| $1 \cdot \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$ | $(-\lambda)\vec{\alpha} = \lambda\left(-\vec{\alpha}\right) = -\lambda\vec{\alpha}$ |
| $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\alpha}$ τότε $\lambda = \mu$ | $\lambda\left(\mu\vec{\alpha}\right) = (\lambda\mu)\vec{\alpha} = \mu\left(\lambda\vec{\alpha}\right)$ |
| $\lambda\left(\vec{\alpha} \pm \vec{\beta}\right) = \lambda\vec{\alpha} \pm \lambda\vec{\beta}$ | Αν $\lambda \neq 0$ και $\lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ τοτε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ |
| $(\lambda \pm \mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} \pm \mu\vec{\alpha}$ | Αν $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\alpha}$ τότε $\lambda = \mu$ |

## Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι:

Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, τότε:

$\vec{\alpha} /\!/ \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha}, \quad \lambda \in R$ ( Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων )

## Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων

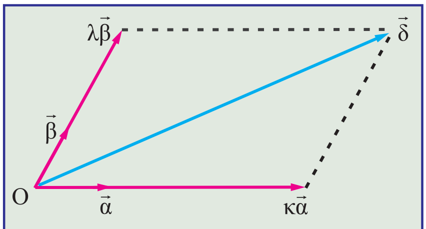
Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα, τότε κάθε διάνυσμα $\vec{\delta}$ της μορφής: $\vec{\delta} = k\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ όπου k, λ είναι πραγματικοί αριθμοί, λέγεται γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

**Παρατήρηση**.

Αποδεικνύεται ότι κάθε διάνυσμα μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός δύο μη συγγραμμικών διανυσμάτων του επιπέδου. Η γραφή αυτή είναι μοναδική. Δηλαδή αν :

$$\vec{\delta} = x_1\vec{\alpha} + y_1\vec{\beta} \text{ και } \vec{\delta} = x_2\vec{\alpha} + y_2\vec{\beta}$$

τότε ισχύουν $x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$

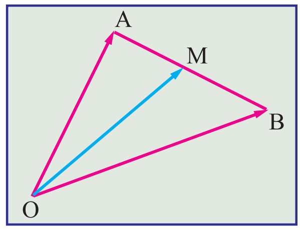


Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων

**Διανυσματική ακτίνα του μέσου ευθυγράμμου τμήματος.**

Το σημείο Μ είναι **μέσο** του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, όταν και μόνο όταν, ισχύει:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$



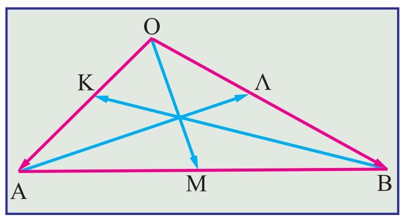

Πράγματι, έχουμε:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow$$

$$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right).$$

**Βασικές διανυσματικές σχέσεις σε τρίγωνο ΟΑΒ**

Αν Κ, Λ, Μ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΟΒΑ,όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα, ισχύουν:




**1.** $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$

**2.** $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

**3.** $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

**4.** $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

**5.** $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BM}$

**6.** $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{BM}\right| = \left|\overrightarrow{MA}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA}\right|$

**7.** $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$

8. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right)$

9. $\vec{K\Lambda} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

10. $\vec{OM} + \vec{A\Lambda} + \vec{BK} = \vec{0}$ (το διανυσματικό άθροισμα των διαμέσων ενός τριγώνου είναι $\vec{0}$ )

## Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

**Κατηγορία - Μέθοδος 1**

Για να αποδείξουμε μια διανυσματική ισότητα θεωρούμε ως διανυσματική αρχή ένα σημείο της δοσμένης σχέσης και εκφράζουμε όλα τα υπόλοιπα διανύσματα ως διαφορές διανυσματικών ακτίνων ως προς την αρχή που θεωρήσαμε.

Π.χ. Αν η αρχή είναι το σημείο Ο γράφουμε: $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

**Παράδειγμα 1**

**Να αποδειχθεί ότι για έξι τυχαία σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ισχύει:**

$$\vec{A\Delta} + \vec{BE} + \vec{\Gamma Z} = \vec{AE} + \vec{BZ} + \vec{\Gamma\Delta}$$

**Λύση**

Εκφράζουμε όλα τα διανύσματα ως διαφορές διανυσμάτων με αρχή π.χ. το σημείο Α.

Έτσι $\vec{A\Delta} + \vec{BE} + \vec{\Gamma Z} = \vec{AE} + \vec{BZ} + \vec{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow$

$\vec{A\Delta} + \vec{AE} - \vec{AB} + \vec{AZ} - \vec{A\Gamma} = \vec{AE} + \vec{AZ} - \vec{AB} + \vec{A\Delta} - \vec{A\Gamma} \Leftrightarrow \vec{0} = \vec{0}$, που ισχύει.

**Κατηγορία - Μέθοδος 2**

Όταν ζητείται να προσδιορίσουμε σημείο το οποίο ικανοποιεί μια διανυσματική ισότητα, τότε προσπαθούμε να εκφράσουμε το διάνυσμα που ορίζεται από το ζητούμενο σημείο, κι ένα άλλο σταθερό σημείο, συναρτήσει γνωστών σταθερών διανυσμάτων, δηλαδή διανυσμάτων που δεν περιέχουν το ζητούμενο σημείο. Γι' αυτό θεωρούμε ως διανυσματική αρχή ένα από τα γνωστά σημεία της δοσμένης σχέσης.

**Παράδειγμα 1**

**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να προσδιορίσετε σημείο Μ στο επίπεδο του τριγώνου τέτοιο ώστε να ισχύει:** $2\vec{MA} - \vec{MB} + 3\vec{M\Gamma} = \vec{0}$

**Λύση**

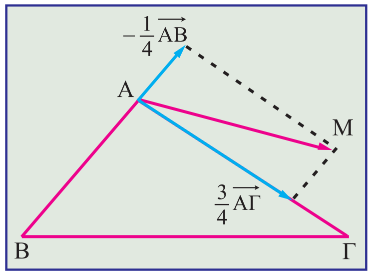
Θεωρούμε ως αρχή το σημείο Α και εκφράζουμε όλα τα διανύσματα της σχέσης ως διαφορές διανυσμάτων με αρχή το σημείο Α.

Έχουμε:

$$2\vec{MA} - \vec{MB} + 3\vec{M\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{MA} - \left(\vec{AB} - \vec{AM}\right) + 3\left(\vec{A\Gamma} - \vec{AM}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$4\vec{MA}-\vec{AB}+3\vec{A\Gamma}=\vec{0} \Leftrightarrow 4\vec{AM}=3\vec{A\Gamma}-\vec{AB} \Leftrightarrow$$

$$\vec{AM}=\frac{3}{4}\vec{A\Gamma}-\frac{1}{4}\vec{AB}$$




Άρα το $\vec{AM}$ προσδιορίζεται από το άθροισμα των διανυσμάτων $\frac{3}{4}\vec{A\Gamma}$ και $-\frac{1}{4}\vec{AB}$ τα οποία είναι γνωστά.
Δηλαδή το σημείο Μ καθορίζεται ως πέρας γνωστού διανύσματος με γνωστή αρχή.

**Κατηγορία - Μέθοδος 3**

Για να αποδείξουμε ότι δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα, αποδεικνύουμε μια σχέση της μορφής $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$, όπου $\lambda\in R$ ή ότι είναι παράλληλα προς τρίτο διάνυσμα.

### Παράδειγμα 1

**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν $\vec{A\Delta}=\kappa\vec{AB}+\lambda\vec{A\Gamma}$ (1) και $\vec{AE}=\lambda\vec{AB}+\kappa\vec{A\Gamma}$ (2) να δείξετε ότι $\vec{\Delta E}//\vec{B\Gamma}$ $(\kappa,\lambda\in R)$.**

**Λύση**

Αφαιρούμε τις σχέσεις (1) και (2) και έχουμε:

$$\vec{AE}-\vec{A\Delta}=\lambda\vec{AB}+\kappa\vec{A\Gamma}-\kappa\vec{AB}-\lambda\vec{A\Gamma} \Leftrightarrow \vec{\Delta E}=\lambda\left(\vec{AB}-\vec{A\Gamma}\right)+\kappa\left(\vec{A\Gamma}-\vec{AB}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Delta E}=\lambda\overrightarrow{\Gamma B}+\kappa\overrightarrow{B\Gamma}\Leftrightarrow \overrightarrow{\Delta E}=-\lambda\overrightarrow{B\Gamma}+\kappa\overrightarrow{B\Gamma}\Leftrightarrow \overrightarrow{\Delta E}=(\kappa-\lambda)\overrightarrow{B\Gamma}$$

Επομένως $\vec{\Delta E}=\mu\vec{B\Gamma}$ με $\mu=\kappa-\lambda$ ,δηλαδή $\overrightarrow{\Delta E}//\overrightarrow{B\Gamma}$ .

**Κατηγορία - Μέθοδος 4**

Για να αποδείξουμε ότι τρία σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά δείχνουμε ότι δύο απο τα διανύσματα $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Gamma},\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι παράλληλα.

### Παράδειγμα 1

**Αν για οποιαδήποτε σημεία Α, Β, Γ ισχύει $4\vec{OA}-\vec{OB}-3\vec{O\Gamma}=\vec{0}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά**

**Λύση**

Είναι $4\vec{OA}-\vec{OB}-3\vec{O\Gamma}=\vec{0} \Leftrightarrow 4\vec{OA}-\left(\vec{AB}-\vec{AO}\right)-3\left(\vec{A\Gamma}-\vec{AO}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow$

$$4\vec{OA}-\vec{AB}+\vec{AO}-3\vec{A\Gamma}+3\vec{AO}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{AB}=-3\vec{A\Gamma}$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$ είναι παράλληλα και επειδή έχουν κοινή αρχή το σημείο Α τα σημεία Α, Β, Γ θα είναι συνευθειακά.

### Κατηγορία - Μέθοδος 5

**1.** Αν δίνονται τα μέτρα των μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, τότε για να δείξουμε ότι τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, είναι ομόρροπα εξετάζουμε αν ισχύει $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right|$, ενώ αν ισχύει $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|\left|\vec{\alpha}\right|-\left|\vec{\beta}\right|\right|$ τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα.

**2.** Αν δίνεται μια διανυσματική ισότητα των μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τότε: **α)** $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$, $\lambda>0$ **β)** $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$, $\lambda<0$

### Παράδειγμα 1

**Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύουν $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $\left|\vec{\alpha}\right|=4\left|\vec{\gamma}\right|$, $\left|\vec{\beta}\right|=3\left|\vec{\gamma}\right|$ τότε να αποδείξετε ότι $\vec{\beta}\uparrow\uparrow\vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$.**

**Λύση**

Είναι $\dfrac{\left|\vec{\alpha}\right|}{4}=\dfrac{\left|\vec{\beta}\right|}{3}=\left|\vec{\gamma}\right|=\dfrac{\left|\vec{\beta}\right|+\left|\vec{\gamma}\right|}{3+1}=\dfrac{\left|\vec{\beta}\right|+\left|\vec{\gamma}\right|}{4}$ (1) και επειδή $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha}=-\vec{\beta}-\vec{\gamma}$,

οπότε $\dfrac{\left|\vec{\alpha}\right|}{4}=\dfrac{\left|-\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right|}{4}=\dfrac{\left|\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right|}{4}\overset{(1)}{=}\dfrac{\left|\vec{\beta}\right|+\left|\vec{\gamma}\right|}{4} \Leftrightarrow \left|\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right|=\left|\vec{\beta}\right|+\left|\vec{\gamma}\right|$, που σημαίνει ότι $\vec{\beta}\uparrow\uparrow\vec{\gamma}$.

Επειδή $\vec{\beta}\uparrow\uparrow\vec{\gamma}$ ισχύει: $\vec{\beta}=\lambda\vec{\gamma}$ με $\lambda>0$. Τότε:

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha}+\lambda\vec{\gamma}+\vec{\gamma}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha}=-(\lambda+1)\vec{\gamma}$$

με $(\lambda+1)>0$, άρα $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\gamma}$ και συνεπώς $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$.

**Κατηγορία - Μέθοδος 6**

Όταν ζητείται να εκφράσουμε ένα διάνυσμα $\vec{x}$ ως γραμμικό συνδυασμό μη συγγραμμικών διανυσμάτων έστω $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, τότε:

Εκφράζουμε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως **γραμμικό συνδυασμό** των $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ **με δύο τρόπους.**

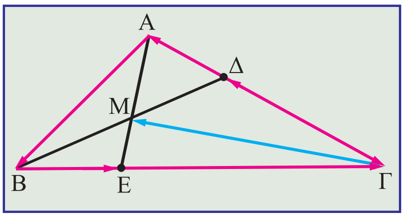
Επειδή η γραφή ενός διανύσματος ως γραμμικού συνδυασμού των $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι μοναδική, από την ισότητα των συντελεστών προκύπτει το ζητούμενο.

**Παράδειγμα 1**

**Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε πάνω στην ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα τέτοια ώστε να ισχύουν: $\vec{\Gamma\Delta}=\frac{2}{3}\vec{\Gamma A}$ και $\vec{BE}=\frac{1}{4}\vec{B\Gamma}$. Αν Μ το σημείο τομής των ΒΔ και ΑΕ να εκφράσετε το $\vec{\Gamma M}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{AB}=\vec{\beta}$ και $\vec{A\Gamma}=\vec{\gamma}$.**

**Λύση**

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε:




$$\vec{\Gamma M}=\vec{\Gamma A}+\vec{AM}=-\vec{\gamma}+\lambda\vec{AE}=-\vec{\gamma}+\lambda\left(\vec{BE}-\vec{BA}\right)=$$

$$=-\vec{\gamma}+\lambda\left(\frac{1}{4}\vec{B\Gamma}-\vec{BA}\right)=-\vec{\gamma}+\frac{\lambda}{4}\left(\vec{\gamma}-\vec{\beta}\right)-\lambda\left(-\vec{\beta}\right)=$$

$$=\left(\lambda-\frac{\lambda}{4}\right)\vec{\beta}+\left(\frac{\lambda}{4}-1\right)\vec{\gamma}=\frac{3\lambda}{4}\vec{\beta}+\frac{\lambda-4}{4}\vec{\gamma}.$$

Επίσης $\vec{\Gamma M}=\vec{BM}-\vec{B\Gamma}=\mu\vec{B\Delta}-\left(\vec{A\Gamma}-\vec{AB}\right)=\mu\left(\vec{BA}+\vec{A\Delta}\right)-\vec{A\Gamma}+\vec{AB}=$

$$(1-\mu)\cdot\vec{AB}+\mu\frac{1}{3}\vec{A\Gamma}-\vec{A\Gamma}=(1-\mu)\vec{\beta}+\left(\frac{\mu}{3}-1\right)\vec{\gamma}.$$

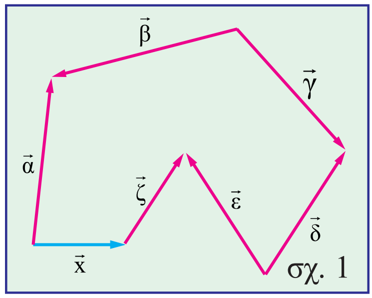
Πρέπει : $\begin{cases}\frac{3\lambda}{4}=1-\mu\\ \frac{\lambda-4}{4}=\frac{\mu-3}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\lambda+4\mu=4\\ 3\lambda-4\mu=0\end{cases}\Leftrightarrow\lambda=\frac{2}{3}$ και $\mu=\frac{1}{2}$. Άρα $\overrightarrow{\Gamma M}=\frac{1}{2}\vec{\beta}-\frac{5}{6}\vec{\gamma}$.

## Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

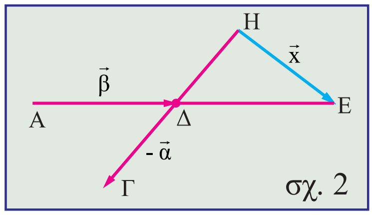
**Άσκηση 1**

**1. α. Να προσδιορίσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ συναρτήσει των άλλων διανυσμάτων στο σχήμα 1.**

**β. Έστω ΑΕ, ΓΗ δύο ευθύγραμμα τμήματα με κοινό μέσον Δ. Να υπολογίσετε το διάνυσμα $\vec{x}=\vec{HE}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ αν $-\vec{\alpha}=\vec{\Delta\Gamma}$ και $\vec{\beta}=\vec{A\Delta}$. ( σχ. 2)**



σχ. 1



σχ. 2

**Λύση**

**α.** Ισχύει: $\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma}-\vec{\delta}+\vec{\varepsilon}-\vec{\zeta}=\vec{x}$

**β.** Είναι $\vec{x}=\vec{H\Delta}+\vec{\Delta E}$. Επειδή $\vec{H\Delta}=\vec{\Delta\Gamma}$ και $\vec{\Delta E}=\vec{A\Delta}$ (Δ το κοινό σημείο των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΕ, ΓΗ) προκύπτει ότι:

$$\vec{x}=\vec{\Delta\Gamma}+\vec{A\Delta}=-\vec{\alpha}+\vec{\beta} \quad ή \quad \vec{x}=\vec{\beta}-\vec{\alpha}$$

## Άσκηση 2

**Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και Μ εσωτερικό σημείο του τέτοιο ώστε $\frac{1}{2}\left|\vec{AM}\right|=\frac{1}{5}\left|\vec{MB}\right|$.**

**Αν Σ τυχαίο σημείο του επιπέδου και $\vec{\alpha}=\vec{\Sigma A}$ , $\vec{\beta}=\vec{\Sigma B}$ να δείξετε ότι:**

**α.** $\vec{AM}=\frac{2}{7}\left(\vec{\beta}-\vec{\alpha}\right)$, **β.** $\vec{BM}=\frac{5}{7}\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)$ **και γ.** $\vec{\Sigma M}=\frac{1}{7}\left(5\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right)$

**Λύση**

**α.** Επειδή τα διανύσματα $\vec{AM}$ και $\vec{MB}$ είναι ομόρροπα από τη σχέση $\frac{1}{2}\left|\vec{AM}\right|=\frac{1}{5}\left|\vec{MB}\right|$ παίρνουμε:

$$\vec{AM}=\frac{2}{5}\vec{MB} \Leftrightarrow \vec{AM}=\frac{2}{5}\left(\vec{AB}-\vec{AM}\right) \Leftrightarrow \vec{AM}=\frac{2}{5}\vec{AB}-\frac{2}{5}\vec{AM} \Leftrightarrow$$

$$\frac{7}{5}\vec{AM}=\frac{2}{5}\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AM}=\frac{2}{7}\vec{AB}=\frac{2}{7}\left(\vec{\Sigma B}-\vec{\Sigma A}\right)=\frac{2}{7}\left(\vec{\beta}-\vec{\alpha}\right).$$

**β.** $$\vec{BM}=\frac{5}{2}\vec{MA} \Leftrightarrow \vec{BM}=\frac{5}{2}\left(\vec{BA}-\vec{BM}\right) \Leftrightarrow \vec{BM}=\frac{5}{2}\vec{BA}-\frac{5}{2}\vec{BM} \Leftrightarrow \frac{7}{2}\vec{BM}=\frac{5}{2}\vec{BA} \Leftrightarrow$$

$$\vec{BM}=\frac{5}{7}\vec{BA}=\frac{5}{7}\left(\vec{\Sigma A}-\vec{\Sigma B}\right)=\frac{5}{7}\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right).$$

**γ.** $$\vec{\Sigma M}=\vec{\Sigma A}+\vec{AM}\overset{(\alpha)}{=}\vec{\alpha}+\frac{2}{7}\left(\vec{\beta}-\vec{\alpha}\right)=\frac{5}{7}\vec{\alpha}+\frac{2}{7}\vec{\beta}=\frac{1}{7}\left(5\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right).$$

### Άσκηση 3

**Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα, να αποδείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για τα διανύσματα $\vec{u}=5\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$, $\vec{\upsilon}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$.**

**Λύση**

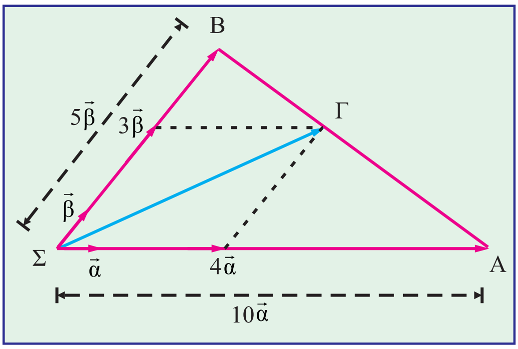
Αν $\vec{u}//\vec{\upsilon}$ θα ισχύει: $\vec{u}=\lambda\vec{\upsilon}, \lambda\in R \Leftrightarrow 5\vec{\alpha}+3\vec{\beta}=\lambda\left(\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right)\Leftrightarrow (5-\lambda)\vec{\alpha}=(-3-2\lambda)\vec{\beta}$.

Αν $5-\lambda\neq 0$ ή $-3-2\lambda\neq 0$ τότε $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$, άτοπο. Οπότε $5-\lambda=0$ και $-3-2\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=5$ και $\lambda=\frac{-3}{2}$, που είναι επίσης άτοπο.

### Άσκηση 4

**Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ (μη παράλληλα) και τα σημεία Α, Β, Γ τέτοια ώστε $\vec{\Sigma A}=10\vec{\alpha}$, $\vec{\Sigma B}=5\vec{\beta}$ $\vec{\Sigma\Gamma}=4\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ όπου Σ τυχαίο σημείο του επιπέδου. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.**

**Λύση**




Αρκεί να δείξουμε ότι $\vec{AB}=\lambda\vec{B\Gamma}, \lambda\in R$ διότι τότε τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{B\Gamma}$ είναι παράλληλα και επειδή έχουν κοινό σημείο το Β, έχουν και τον ίδιο φορέα, οπότε τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

Είναι

$$\vec{AB}=\vec{\Sigma B}-\vec{\Sigma A}=5\vec{\beta}-10\vec{\alpha}=5\left(\vec{\beta}-2\vec{\alpha}\right)\ (1)$$

$$\vec{B\Gamma}=\vec{\Sigma\Gamma}-\vec{\Sigma B}=\left(4\vec{\alpha}+3\vec{\beta}\right)-5\vec{\beta}=4\vec{\alpha}-2\vec{\beta}=-2\left(\vec{\beta}-2\vec{\alpha}\right)\Leftrightarrow \vec{\beta}-2\vec{\alpha}=-\frac{1}{2}\vec{B\Gamma} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\vec{AB}=-\frac{5}{2}\vec{B\Gamma}$ ή $\vec{AB}//\vec{B\Gamma}$ .Άρα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

### Άσκηση 5

**Θεωρούμε τα σημεία Ο, Α, Β, Γ και τα διανύσματα $\vec{OA}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}+5\vec{\gamma}$, $\vec{OB}=3\vec{\alpha}+\vec{\beta}+6\vec{\gamma}$, $\vec{O\Gamma}=-\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+4\vec{\gamma}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά**

**Λύση**

Είναι $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=3\vec{\alpha}+\vec{\beta}+6\vec{\gamma}-\left(\vec{\alpha}+2\vec{\beta}+5\vec{\gamma}\right)=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma}$.

και $\vec{B\Gamma}=\vec{O\Gamma}-\vec{OB}=\left(-\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+4\vec{\gamma}\right)-\left(3\vec{\alpha}+\vec{\beta}+6\vec{\gamma}\right)=-4\vec{\alpha}+2\vec{\beta}-2\vec{\gamma}=$

$-2\left(2\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)=-2\vec{AB}$.

Από τη σχέση $\vec{B\Gamma}=-2\vec{AB}$, προκύπτει ότι τα διανύσματα $\vec{B\Gamma}$ και $\vec{AB}$ είναι παράλληλα και επειδή έχουν κοινό το σημείο Β έχουν τον ίδιο φορέα, άρα τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

## Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

**1.** Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και ορίζουμε στο επίπεδό του τα σημεία Δ και Ε σύμφωνα με τις σχέσεις $\vec{A\Delta}=5\vec{AB}+4\vec{A\Gamma}$ και $\vec{AE}=4\vec{AB}+5\vec{A\Gamma}$. Να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{\Delta E}$ και $\vec{B\Gamma}$ είναι παράλληλα.

(**Υπ:** Εκφράστε το $\vec{\Delta E}$ με αρχή το σημείο Α).

**2.** Αν σε τετράπλευρο είναι $\vec{AB}=\vec{\alpha}$, $\vec{A\Delta}=\vec{\beta}$, $\vec{A\Gamma}=4\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ τότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

(**Υπ:** Δείξτε ότι $\vec{\Gamma\Delta}=-4\vec{AB}$).

**3.** Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα, να αποδείξετε ότι το ίδιο συμβαίνει και για τα διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$, όπου: $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}=-2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

(**Απ:** $\vec{\alpha}//\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ και υπολογίστε τα $\vec{\gamma},\vec{\delta}$ )

**4.** Αν για οποιαδήποτε σημεία Ο, Α, Β, Γ ισχύει $3\vec{OA}-2\vec{OB}-\vec{O\Gamma}=\vec{0}$ να αποδείξετε ότι τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

(**Υπ:** Δείξτε ότι $\vec{A\Gamma}//\vec{AB}$ )

**5.** Αν Α, Β, Δ, Ε, Ζ είναι σημεία ενός επιπέδου τέτοια ώστε $\vec{\Delta A}+\vec{BZ}=2\vec{\Delta B}+3\vec{BA}+2\vec{AE}$ να αποδείξετε ότι τα Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά.

(**Υπ:** Εκφράστε όλα τα διανύσματα με αρχή το Α και δείξτε ότι $\vec{\Delta Z}//\vec{E\Delta}$ )

**6.** Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα μέσα Μ και Ν των πλευρών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Να προσδιορίσετε το διάνυσμα $\vec{y}=\vec{A\Gamma}+\vec{B\Delta}+2\vec{NM}$.

(**Απ:** $\vec{y}=\vec{0}$ )

**7.** Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{5}=\frac{|\vec{\beta}|}{4}=|\vec{\gamma}|$ να αποδείξετε ότι $\vec{\beta}\uparrow\uparrow\vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$.

(**Υπ:** Μέθοδος 5)

**8.** Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}=-4\vec{\gamma}$.

**i.** Να προσδιορίσετε διάνυσμα $\vec{x}$ για το οποίο ισχύει :

$$|\vec{\alpha}|\vec{x}+|\vec{\gamma}||\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\vec{\alpha}+4\vec{\gamma}=-|\vec{\beta}|\vec{x}+|\vec{\beta}||\vec{\alpha}|\vec{\alpha}+|\vec{\beta}|^2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$$

**ii.** Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) και να δικαιολογήσετε τον χαρακτηρισμό, την πρόταση: “Το διάνυσμα $\vec{x}$ είναι αντίρροπο του $\vec{\gamma}$”

**9.** Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\gamma}$. Αν το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$ είναι 2 και το μέτρο του διανύσματος $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\vec{\gamma}$ είναι ίσο με το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$ να βρείτε την ακριβή σχέση των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

**10.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΜ, ΒΕ, ΓΖ διαμέσους

**i.** Να δείξετε ότι $\vec{AB}+\vec{A\Gamma}=2\vec{AM}$, $\vec{BA}+\vec{B\Gamma}=2\vec{BE}$, $\vec{\Gamma B}+\vec{\Gamma A}=2\vec{\Gamma Z}$.

**ii.** Να προσδιορίσετε σημείο G του επιπέδου του τριγώνου για το οποίο ισχύει $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{G\Gamma}=\vec{0}$ υπολογίζοντας τα διανύσματα $\vec{AG}$, $\vec{BG}$, $\vec{\Gamma G}$ συναρτήσει των διαμέσων $\vec{AM}$, $\vec{BE}$, $\vec{\Gamma G}$ αντίστοιχα.

**iii.** Ποια χαρακτηριστική ιδιότητα έχει το σημείο G.

**iv.** Πως χαρακτηρίζεται το σημείο G στην Γεωμετρία.

**11.** Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τέτοια ώστε: $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\neq 0$, $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|\neq 0$. Να αποδειχθεί ότι: $\frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|}+\frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}\geq 1$.

**12.** Αν $\vec{O\Gamma}=\lambda\vec{OA}$ και $\vec{O\Delta}=\mu\vec{OB}$ με $\Gamma\Delta // AB$ να αποδείξετε ότι $\lambda=\mu$. Ποιο αντίστοιχο γεωμετρικό θεώρημα προκύπτει;

**13.** Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \neq \vec{0}$ και ανα δύο μη συγγραμμικά αν $\vec{\alpha} // \left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)$ και $\vec{\beta} // \left(\vec{\alpha}+\vec{\gamma}\right)$ να αποδείξετε και $\vec{\gamma} // \left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)$.

**14.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Μ τυχαίο σημείο της πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός κ τέτοιος ώστε: $\vec{AM}=(1-\kappa)\vec{AB}+\kappa\vec{A\Gamma}$

## Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

**Για τα διανύσματα $\vec{\upsilon}_A$, $\vec{\upsilon}_B$, $\vec{\upsilon}_\Gamma$ των ταχυτήτων τριών σωματιδίων Α, Β, Γ αντίστοιχα, που κινούνται στο επίπεδο, ισχύει η σχέση:** $\vec{\upsilon}_A+\vec{\upsilon}_B-\vec{\upsilon}_\Gamma=0$

**Το μέτρο της ταχύτητας του Α είναι σταθερό και ίσο με τα $\frac{10}{3}$ του μέτρου της ταχύτητας του Β και με τα $\frac{10}{7}$ του μέτρου της ταχύτητας του Γ. Να αποδείξετε ότι τα σωματίδια Β, Γ κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις.**

(**Υπ.:** $\left|\vec{\upsilon_B}-\vec{\upsilon_\Gamma}\right|=\left|\vec{\upsilon_A}\right|$ και $\left|\vec{\upsilon_B}\right|+\left|\vec{\upsilon_\Gamma}\right|=\left|\vec{\upsilon_A}\right|$)