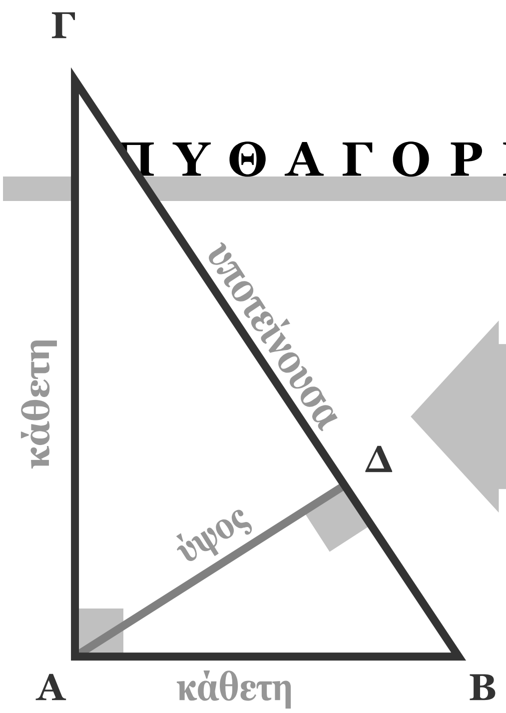
ΜΕΤΡΙΚΕΣ Σχέσεις

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

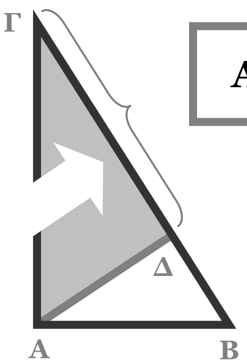
ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ



Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, έχουμε φέρει απλά το ύψος ΑΔ που καταλήγει στην υποτείνουσα ΒΓ. Είναι προφανές ότι, με αυτό τον τρόπο, το μεγάλο ορθογώνιο τρίγωνο χωρίστηκε σε δύο μικρότερα ορθογώνια, τα ΑΓΔ και ΑΒΔ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της κάθετης πλευράς πάνω στην υποτείνουσα.

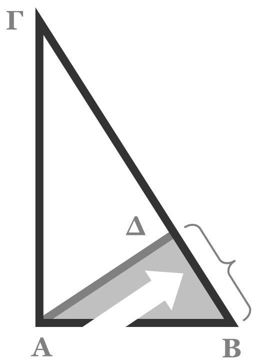


$$\boxed{ΑΓ^2 = ΒΓ \cdot ΓΔ}$$

Υπόδειξη απόδειξης

Από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΔΓ:

$$\frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{ΓΔ}{ΑΓ}$$



Υπόδειξη απόδειξης

Από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΔΒ:

$$\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΔΒ}{ΑΒ}$$

$$\boxed{ΑΒ^2 = ΒΓ \cdot ΔΒ}$$

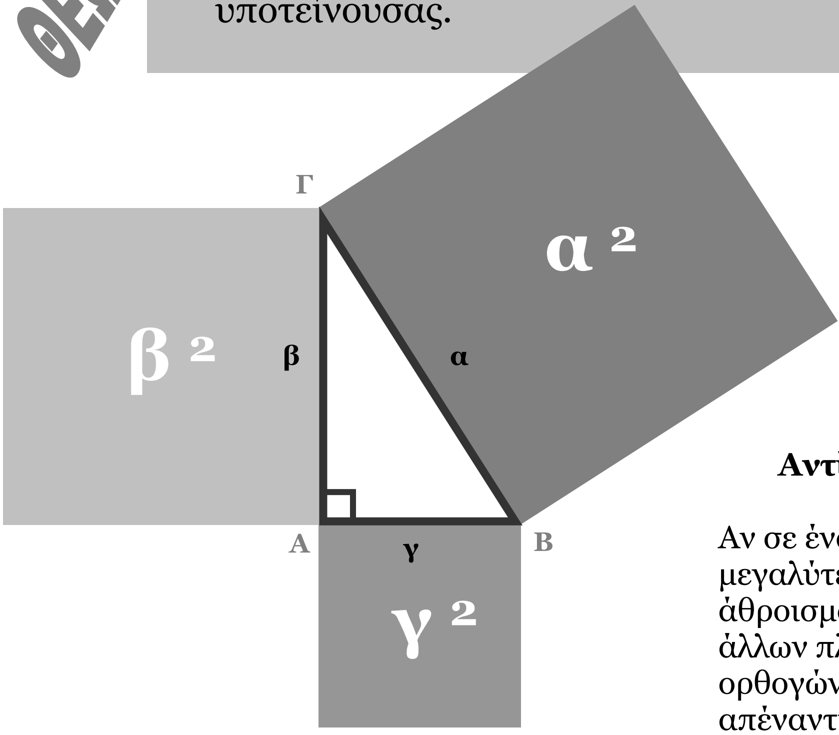
Πόρισμα

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των κάθετων πλευρών είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.

$$\frac{ΑΓ^2}{ΑΒ^2} = \frac{ΓΔ}{ΔΒ}$$

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.



$$\boxed{\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2}$$

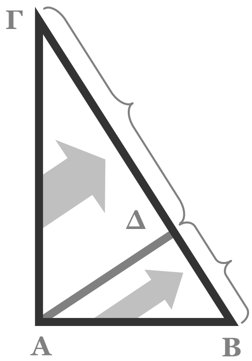
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

Αντίστροφο Πυθαγορείου

Αν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο της μεγαλύτερη πλευράς ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με την ορθή γωνία απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα.



Υπόδειξη απόδειξης

Από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΔΓ, ΑΔΒ:

$$\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{\Delta B}} = \frac{\mathrm{\Gamma\Delta}}{\mathrm{A\Delta}}$$

$$\boxed{\mathrm{A\Delta}^2 = \mathrm{\Gamma\Delta} \cdot \mathrm{\Delta B}}$$

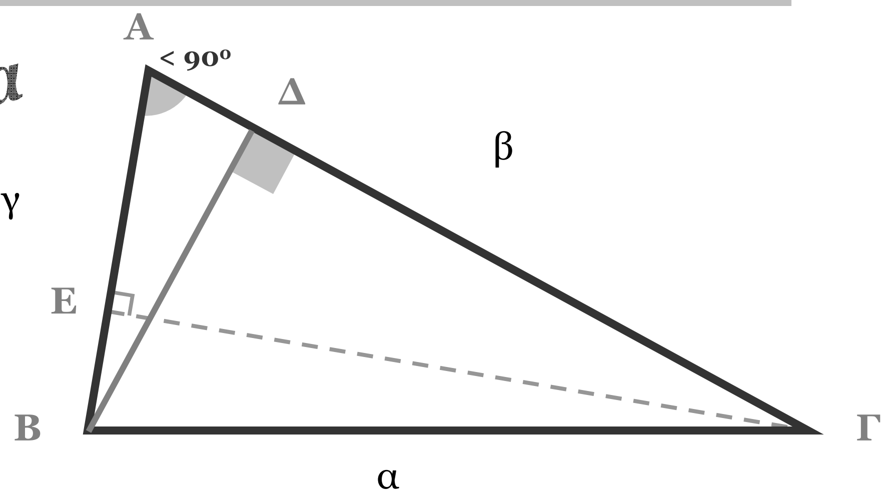
Υπόδειξη

Η απόδειξη των τριών από τα προηγούμενα θεωρήματα στηρίζονται στο γεγονός ότι, φέρνοντας το ύψος ΑΔ, τα τρία ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται (ΑΒΓ, ΑΔΓ, ΑΔΒ) είναι ανά δύο όμοια.

ΠΡΟΣΕΧΩ (Αλλά δεν παπαγαλίζω) : Εφαρμογές 1 & 2, σελ. 185.

Γ Ε Ν Ι Κ Ε Υ Σ Η   Π Υ Θ Α Γ Ο Ρ Ε Ι Ο Υ

Για οξεία γωνία



Υπόδειξη απόδειξης

Εφαρμόζουμε ΠΘ στο τρίγωνο ΒΔΓ. (1)

Εφαρμόζουμε ΠΘ στο τρίγωνο ΔΒΑ. (2)

Παρατηρούμε ότι: $ΔΓ = β – ΑΔ$ (3)

Αντικαθιστούμε τις (2), (3) στη σχέση (1).

$$\boxed{α^2 = β^2 + γ^2 – 2β \cdot ΑΔ}$$

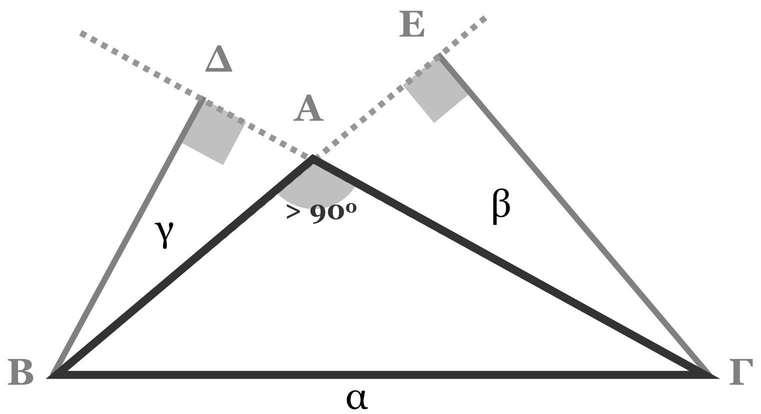
ή

$$\boxed{α^2 = β^2 + γ^2 – 2γ \cdot ΑΕ}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Για αμβλεία γωνία



Υπόδειξη απόδειξης

Εφαρμόζουμε ΠΘ στο τρίγωνο ΒΔΓ. (1)

Εφαρμόζουμε ΠΘ στο τρίγωνο ΔΒΑ. (2)

Παρατηρούμε ότι: $ΔΓ = β + ΑΔ$ (3)

Αντικαθιστούμε τις (2), (3) στη σχέση (1).

$$\boxed{α^2 = β^2 + γ^2 + 2β \cdot ΑΔ}$$

ή

$$\boxed{α^2 = β^2 + γ^2 + 2γ \cdot ΑΕ}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Τόσο για οξείες, όσο και για αμβλείες γωνίες, ισχύει σταθερά ο παρακάτω τύπος, ο οποίος είναι γνωστός ως.

Νόμος Συνημιτόνων

$$\boxed{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \text{συν}A}$$

Με λόγια: Το τετράγωνο μιας οποιασδήποτε πλευράς ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο των πλευρών αυτών επί το συνημίτονο της περιεχόμενης γωνίας.

Παρατηρούμε ότι δεν έχει σημασία το είδος της γωνίας, συνεπώς το πρόσημο του διπλασίου γινομένου είναι σταθερά «–».

Πόρισμα

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} > 90^\circ$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

$$\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} < 90^\circ$$

Συνεπώς, αν θεωρήσουμε ως **α** τη **μεγαλύτερη πλευρά** ενός τριγώνου, τότε οι παραπάνω προτάσεις χρησιμεύουν και ως **κριτήρια** για να εξετάσουμε το είδος του τριγώνου. Δηλαδή:

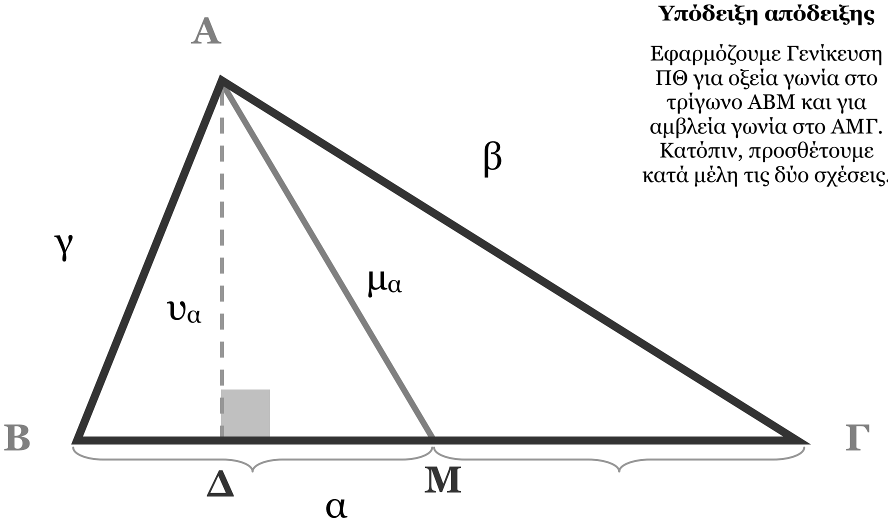
$$\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \text{ΑΒΓ αμβλυγώνιο}$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \text{ΑΒΓ ορθογώνιο}$$

$$\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \text{ΑΒΓ οξυγώνιο}$$

ΠΡΟΣΕΧΩ (Αλλά δεν παπαγαλίζω) : Εφαρμογή 2, σελ. 192.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Τ Α   Δ Ι Α Μ Ε Σ Ω Ν



Υπόδειξη απόδειξης

Εφαρμόζουμε Γενίκευση ΠΘ για οξεία γωνία στο τρίγωνο ΑΒΜ και για αμβλεία γωνία στο ΑΜΓ. Κατόπιν, προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο σχέσεις.

1ο ΘΕΩΡΗΜΑ

Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς.

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$$

Αντίστοιχα, το θεώρημα μπορεί να εκφραστεί και ως:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2\mu_\gamma^2 + \frac{\gamma^2}{2}$$

$$\alpha^2 + \gamma^2 = 2\mu_\beta^2 + \frac{\beta^2}{2}$$

Αν λύσουμε, τους παραπάνω τύπους, ως προς τη διάμεσο, τότε παίρνουμε εναλλακτικά:

$$\mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}$$

$$\mu_\beta^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4}$$

$$\mu_\gamma^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}$$

2ο ΘΕΩΡΗΜΑ

Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω στην πλευρά αυτή.

$$\boxed{\beta^2 - \gamma^2 = 2\,\alpha \cdot ΜΔ}$$

Υπόδειξη απόδειξης

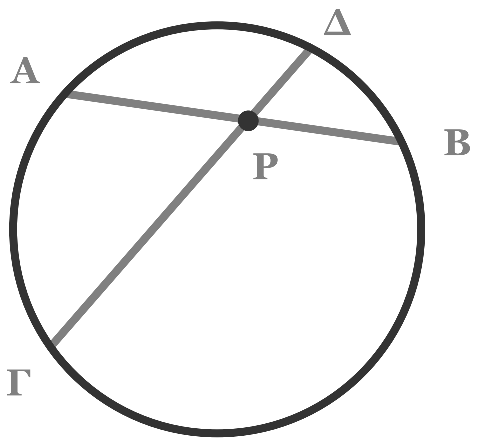
Όμοια με την απόδειξη του 1ου Θεωρήματος, μόνο που αφαιρούμε κατά μέλη τις δύο σχέσεις, αντί να προσθέτουμε.

Τ Ε Μ Ν Ο Υ Σ Ε Σ   Κ Υ Κ Λ Ο Υ

ΘΕΩΡΗΜΑ

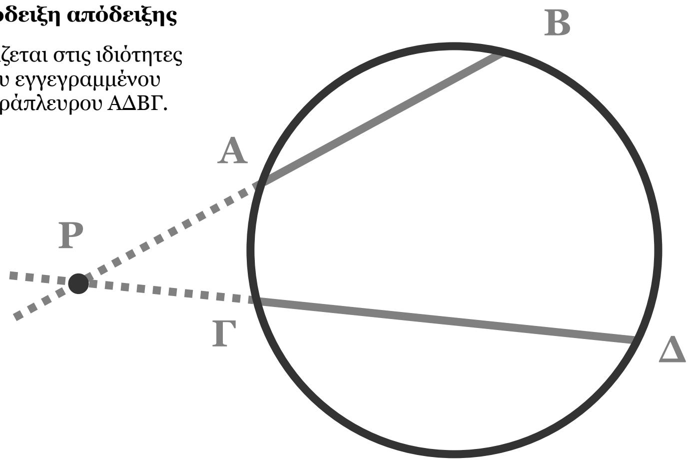
Αν δύο χορδές ΑΒ, ΓΔ ενός κύκλου ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο Ρ, τότε ισχύει:

$$ΡΑ \cdot ΡΒ = ΡΓ \cdot ΡΔ$$



Υπόδειξη απόδειξης

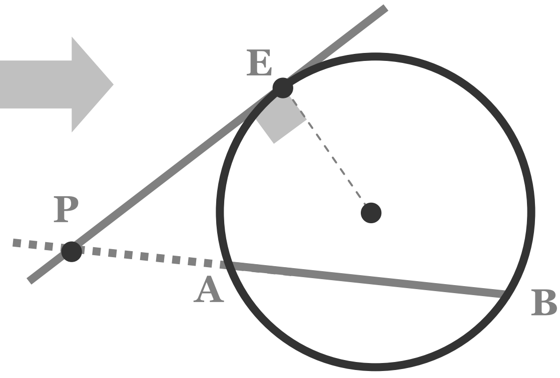
Βασίζεται στις ιδιότητες του εγγεγραμμένου τετράπλευρου ΑΔΒΓ.



ΘΕΩΡΗΜΑ

Από ένα εξωτερικό σημείο Ρ κύκλου (Ο, R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΡΕ και μία ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα σημείο Α, Β, τότε ισχύει:

$$ΡΕ^2 = ΡΑ \cdot ΡΒ$$



ΟΡΙΣΜΟΣ

Ονομάζουμε δύναμη ενός σημείου P ως προς κύκλο (O, R) τη διαφορά $OP^2 - R^2$ και συμβολίζεται:

$$\Delta^{P}_{(O,R)} = \mathbf{OP^2 - R^2 = \delta^2 - R^2}$$

όπου, προφανώς, $\delta = OP$.

Από τον ορισμό, γίνεται αντιληπτό ότι η δύναμη σημείου ως προς κύκλο αποτελεί ένα κριτήριο της σχετικής θέσης του σημείου και του κύκλου. Αναλυτικά:

$\Delta^{P}_{(O,R)} > 0$	$\Leftrightarrow$	Το P είναι **εξωτερικό** σημείο του κύκλου.
$\Delta^{P}_{(O,R)} = 0$	$\Leftrightarrow$	Το P είναι σημείο του κύκλου
$\Delta^{P}_{(O,R)} < 0$	$\Leftrightarrow$	Το P είναι **εσωτερικό** σημείο του κύκλου.