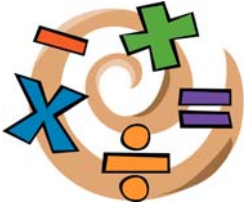


# ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## Τριγωνομετρία



# ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### ● ΛΟΓΟΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

1. Αν  $\frac{\alpha}{\beta} = 2$ , να υπολογίσετε τους λόγους :  $\frac{\alpha+\beta}{\beta}$ ,  $\frac{\alpha-\beta}{\beta}$ ,  $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$

2. Σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με πλευρά 6 cm και ύψος  $AD$ , να υπολογίσετε τους λόγους :

$$\frac{AB}{B\Gamma}, \frac{AD}{B\Gamma}, \frac{A\Gamma}{B\Delta}, \frac{AD}{\Delta\Gamma}$$

3. Σε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma = 10$  cm και ύψος  $BH = 6$  cm, να υπολογίσετε τους λόγους :

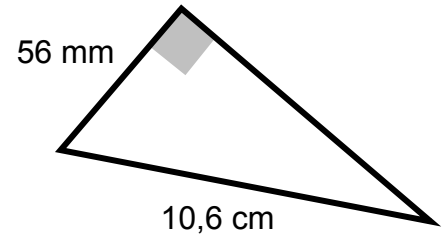
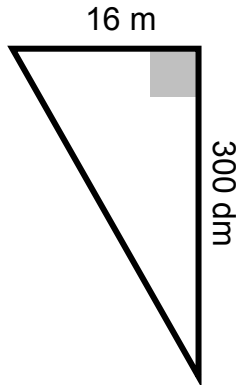
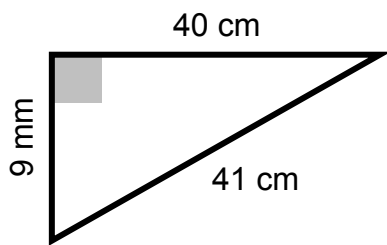
$$\frac{AB}{A\Gamma}, \frac{AB}{AH}, \frac{AH}{H\Gamma}, \frac{B\Gamma}{BH}$$

4. Σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, με περίμετρο 36 μέτρα και εμβαδό 80 τετραγωνικά μέτρα, να υπολογίσετε το λόγο του μήκους, προς το πλάτος.

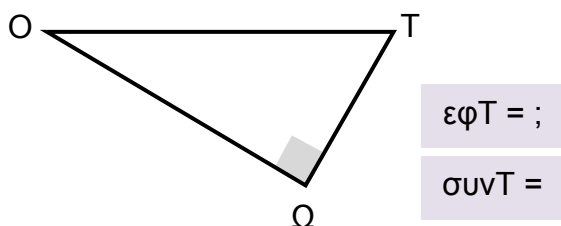
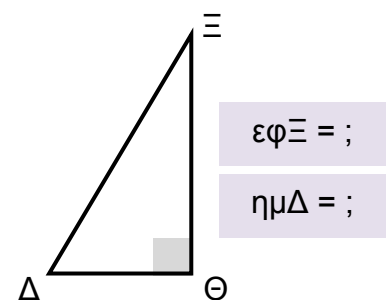
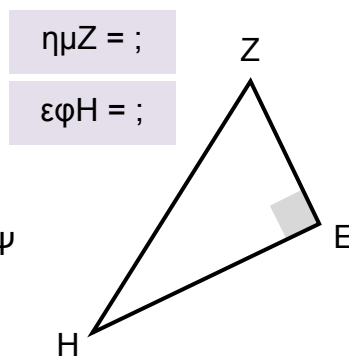
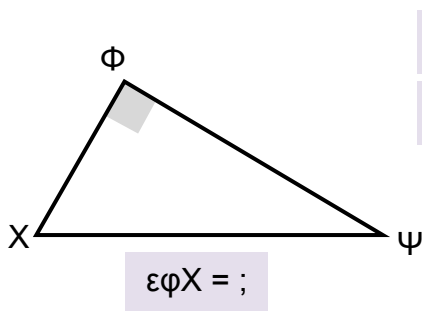
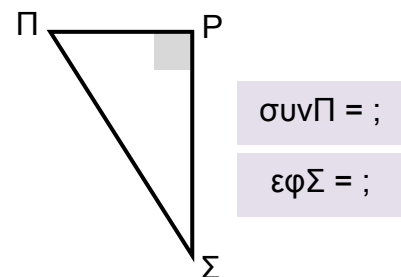
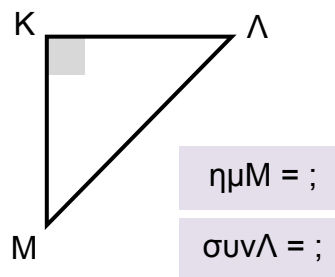
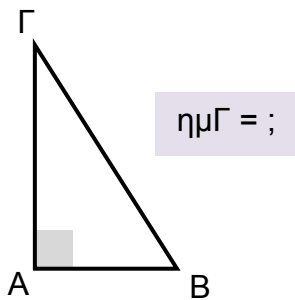
5. Να βρεθούν οι πλευρές ενός ισοσκελούς τριγώνου, αν γνωρίζετε ότι ο λόγος δύο πλευρών του είναι 2 και η περίμετρός του είναι 60 cm.

## ● ΕΥΡΕΣΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

6. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των οξείων γωνιών, στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα :

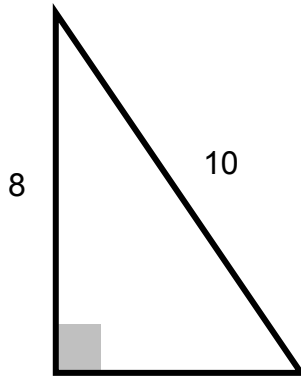


7. Στα παρακάτω τρίγωνα να εφαρμόσετε τους ορισμούς, για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς που σας ζητούνται:

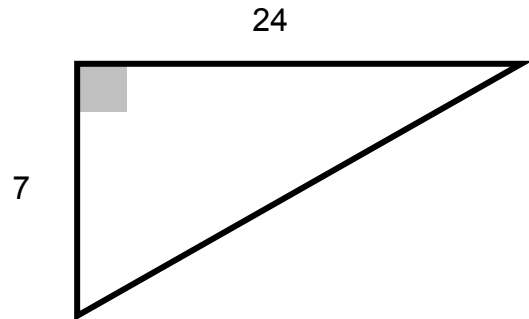


8. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των οξειών γωνιών, στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα :

α.



β.



9. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με κάθετες πλευρές ΑΒ και ΑΓ τέτοιες, ώστε  $AB = 2AG$ . Να βρείτε τις εφαπτομένες των γωνιών Β και Γ

10. Να κατασκευάσετε γωνία  $\omega$  τέτοια, ώστε:

α.  $\epsilon\phi\omega = \frac{4}{5}$

β.  $\epsilon\phi\omega = 1,5$

γ.  $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$

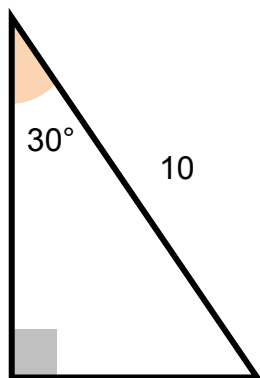


## ● ΕΥΡΕΣΗ ΓΩΝΙΩΝ & ΠΛΕΥΡΩΝ

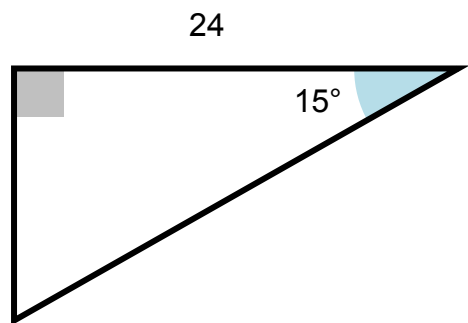
11. Η κλίση ενός ανηφορικού δρόμου, προς την κορυφή ενός λόφου, είναι 20%. Αν το ύψος του λόφου είναι 800 m, μπορείτε να υπολογίσετε το μήκος του δρόμου. Υποθέτουμε ότι ο δρόμος δεν έχει στροφές, άσε που μπορεί και να ζαλιστούμε.
12. Σε ένα τόπο οι ακτίνες του ήλιου, κάποια στιγμή, έχουν κλίση 90%. Αν τη στιγμή αυτή η σκιά ενός δέντρου είναι 5 m να βρείτε το ύψος του δέντρου.

13. Να υπολογίσετε όλες τις πλευρές, στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα:

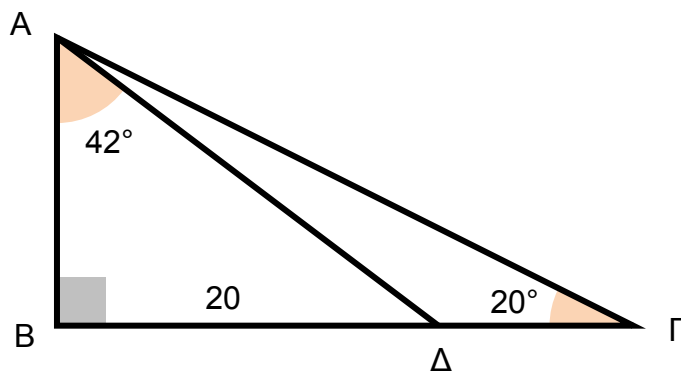
α.



β.



14. Στο παρακάτω σχήμα, να υπολογίσετε τις πλευρές ΑΔ και ΔΓ .



15. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) είναι  $AB = 11$  cm και  $\hat{B} = 40^\circ$ . Να υπολογίσετε τις πλευρές ΑΓ και ΒΓ.

16. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) είναι  $B\Gamma = 8$  cm και  $\hat{B} = 55^\circ$ . Να υπολογίσετε τις κάθετες πλευρές του.

17. Οι κάθετες πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  ορθογωνίου τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι 7 cm και 10 cm αντίστοιχα, να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες του.

18. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = 10$  cm και  $\hat{A} = 80^\circ$ . Αν το ύψος του  $A\Delta$  είναι 5 cm , να υπολογίσετε τις γωνίες του  $\hat{B}$ ,  $\hat{\Gamma}$  και τις πλευρές του  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$ .

19. Η γωνία  $B$  ενός ορθογωνίου τριγώνου  $AB\Gamma$  ισούται με  $72^\circ$ . Αν το ύψος, που φέρνουμε από την κορυφή  $A$  προς την υποτείνουσα είναι 2 cm, να βρεθεί η υποτείνουσα  $B\Gamma$ .

20. Σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\hat{A} = 30^\circ$ ,  $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ . Φέρνουμε το ύψος  $B\Delta$  του τριγώνου. Να βρείτε τις πλευρές  $B\Gamma$  και  $AB$ , αν γνωρίζετε ότι  $B\Delta = 10$  cm.

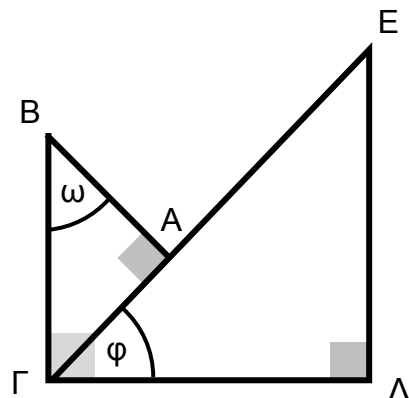
21. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 55^\circ$  και  $\hat{B} = 70^\circ$ . Αν  $AB = 600$  cm, να υπολογίσετε το ύψος  $\Gamma\Delta$  του τριγώνου.

22. Δίνεται αμβλυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{B} > 90^\circ$ ) με  $AB = 24$  cm και φέρνουμε το ύψος  $A\Delta$  του τριγώνου. Αν ισχύει ότι  $B\Delta = 12$  cm κι η  $AB$  είναι διχοτόμος της  $\Gamma\hat{A}\Delta$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

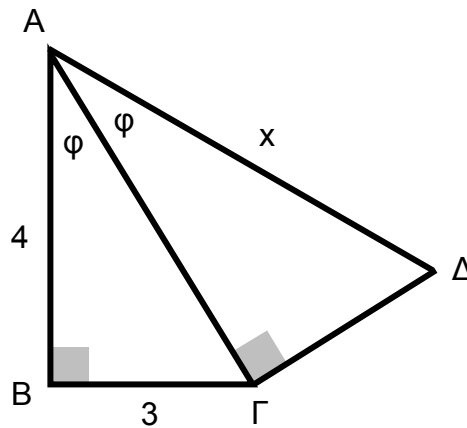
23. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ),  $\hat{B} = 20^\circ$ . Φέρνουμε τη  $\Gamma\Delta = 5$  cm ( $\Delta$  επί της  $AB$ ) έτσι ώστε  $\Delta\hat{\Gamma}B = 14^\circ$ . Να υπολογίσετε την πλευρά  $A\Gamma$  του τριγώνου.

24. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $AB = 17$  cm και  $\hat{B} = 55^\circ$ . Αν από το  $B$  φέρουμε την  $B\Delta$ , που τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $\Delta$ , έτσι ώστε  $A\hat{B}\Delta = 48^\circ$ , να βρεθεί το μήκος του τμήματος  $\Gamma\Delta$ .

25. Στο διπλανό σχήμα δίνονται  $\Gamma\Delta = 8$ ,  $\Delta E = 6$ ,  $AE = 7$  και  $AB = 4$ . Να αποδείξετε ότι οι γωνίες  $\omega$  και  $\varphi$  είναι ίσες.



26. Στο παρακάτω σχήμα, να υπολογιστεί η πλευρά  $x$  :



## ● ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΙ & ΕΜΒΑΔΑ

27. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) είναι  $\text{συν}\Gamma = \frac{7}{5}$  και  $A\Gamma = 14$  m. Να υπολογίσετε:

- α. το ημίτονο της γωνίας  $\Gamma$
- β. το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$

28. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) είναι  $\eta\mu B = 0,8$  και  $B\Gamma = 20$  m. Να υπολογίσετε:

- α. το συνημίτονο της γωνίας  $B$
- β. το εμβαδόν του τριγώνου

29. Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$  είναι  $\epsilon\phi B = \frac{3}{4}$  και  $a = 15$ . Να υπολογίσετε τις κάθετες πλευρές και το εμβαδό του τριγώνου.

30. Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $\hat{A} = 150^\circ$ ,  $A\Delta = 10$  και  $AB = 20$ . Να βρείτε το ύψος  $AE$  και το εμβαδόν του.

31. Ένα ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχει  $AB = A\Gamma = 15$  cm και  $\hat{A} = 120^\circ$ . Να υπολογίσετε την περίμετρό του.

32. Ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχει  $\hat{B} = 30^\circ$ ,  $\hat{\Gamma} = 45^\circ$  και ύψος  $AD = 10$  cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου.

33. Ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχει  $A\Gamma = 10$ ,  $B\Gamma = 15$  και  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ . Να βρείτε :

- α. την πλευρά  $AB$
- β. το ύψος  $AD$
- γ. το εμβαδόν του

34. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) έχει  $B\Gamma = 15$  cm και  $AB = 9$  cm. Να βρείτε :

- α. τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών  $B$  και  $\Gamma$
- β. το εμβαδό του τριγώνου
- γ. την περίμετρο του τριγώνου

35. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) έχει  $B\Gamma = 10$  cm και  $\hat{B} = 30^\circ$ . Να βρείτε :

- α. τη γωνία  $\Gamma$
- β. το μήκος των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$
- γ. το εμβαδό και την περίμετρο του τριγώνου

36. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) έχει  $A\Gamma = 12$  cm και  $\hat{\Gamma} = 40^\circ$ . Να βρείτε :

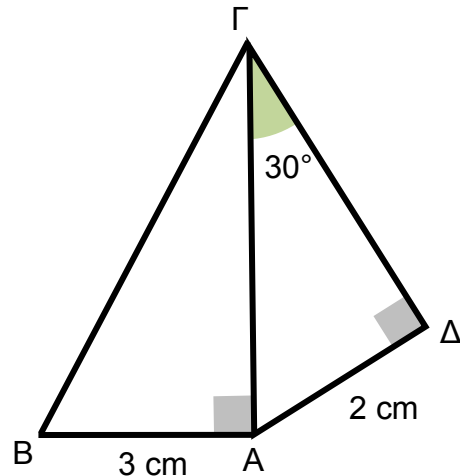
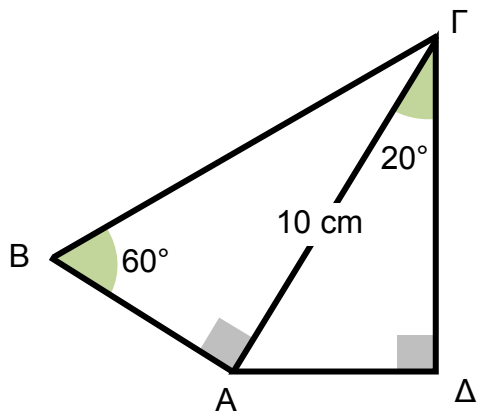
- α. τη γωνία  $B$
- β. το μήκος των πλευρών  $AB$  και  $B\Gamma$
- γ. το εμβαδό και την περίμετρο του τριγώνου

37. Για ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  με ύψος  $AD$ , γνωρίζουμε ότι  $AB = 5$  cm,  $BD = 3$  cm και  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ . Να βρείτε :

- α. τις πλευρές του  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$
- β. το εμβαδό του τριγώνου  $AB\Gamma$

γ. η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ

38. Στα παρακάτω σχήματα, να υπολογίσετε το εμβαδό και την περίμετρο του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.



39. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει  $AB = 5$  ,  $AG = 9$  και  $\hat{A} = 60^\circ$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου.

40. Ένα ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ έχει  $AB = 20$  ,  $GD = 6$  και  $\hat{A} = \hat{B} = 45^\circ$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

41. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι  $\hat{A} = 43^\circ$  ,  $\hat{B} = 62^\circ$  και  $AB = 12$  . Να βρεθούν οι πλευρές ΑΓ, ΒΓ και το εμβαδόν του.

42. Σε παράλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι  $\hat{A} = 150^\circ$  ,  $AD = 10$  και  $AB = 20$  . Να υπολογίσετε το ύψος ΑΕ και το εμβαδό του παραλληλόγραμμου.

43. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με  $AD = BG = 8$  cm,  $\hat{D} = 60^\circ$  κι εμβαδόν  $48\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>. Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΒ και τα ύψη του παραλληλογράμμου.



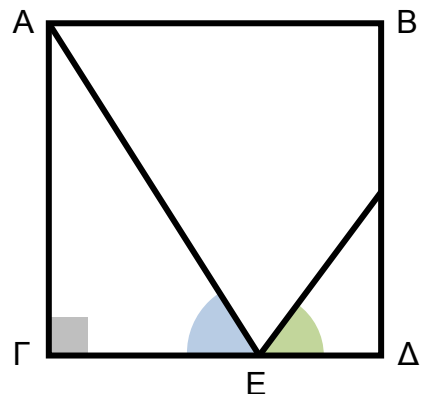
44. Το ύψος ενός τραπεζίου είναι 18 cm, η μικρή βάση του 70 cm και οι μη παράλληλες πλευρές 40 cm και 85 cm. Να υπολογισθούν οι γωνίες και το εμβαδόν του τραπεζίου.

45. Οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνεται κάθετα, ενώ η ΑΓ διχοτομεί τη ΒΔ. Αν είναι  $\hat{A} = 60^\circ$ ,  $\hat{B} = 120^\circ$  και  $AB = 8$  cm, να υπολογιστεί το εμβαδόν και η περίμετρος του ΑΒΓΔ.

46. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $AG = 30$  και  $\eta\mu B = 0,309$ . Να βρεθεί το εμβαδόν του.

47. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με  $\hat{B} = 70^\circ$  και  $A\Delta = 10$  cm. Να βρεθούν τα άλλα ύψη του τριγώνου και το εμβαδόν του.

48. Στο διπλανό σχήμα, το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο με  $AB = 15$  cm. Αν  $\epsilon\phi(A\hat{E}\Delta) = 1,6$  και  $\epsilon\phi(Z\hat{E}\Gamma) = 1,5$  να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΑΒΖΕ.



## ● ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

49. Να αποδείξετε ότι σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) ισχύει ότι :

$$\eta\mu B \cdot \sigma\upsilon\nu B = \frac{\epsilon\phi B}{1 + \epsilon\phi^2 B}$$

50. Να δείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) ισχύει η σχέση :

$$\frac{\eta\mu\Gamma + \sigma\upsilon\nu B}{\sigma\upsilon\nu\Gamma + \eta\mu B} = \epsilon\phi\Gamma$$

51. Σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) είναι  $AB = 8$  και  $B\Gamma = 10$ . Να υπολογίσετε:

- α. την  $A\Gamma$
- β. τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $B$
- γ. την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\eta\mu B - 2\sigma\upsilon\nu B}{\epsilon\phi B}$$

52. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $\beta < \gamma < \alpha$ , να αποδείξετε ότι :

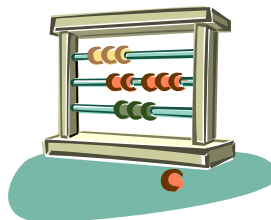
$$0 < \frac{\epsilon\phi^2 B}{1 + \epsilon\phi^2 \Gamma} < 1$$

53. Να σχεδιάσετε ένα ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , με τη γωνία  $A$  οξεία, και να φέρετε το ύψος του  $BE$ . Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι:

- α.  $BE = AB \cdot \eta\mu A$
- β.  $E = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot A\Gamma \cdot \eta\mu A$

54. Αν  $E$  είναι το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και  $\alpha$  το μήκος της υποτείνουσάς του, να αποδείξετε ότι:

$$\epsilon\phi B + \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu B} = \frac{\alpha^2}{2E}$$



## ● ΔΙΑΦΟΡΕΣ / ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ

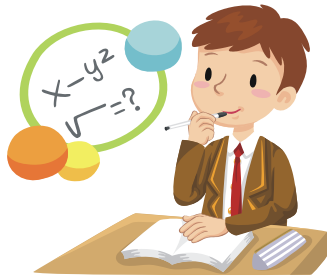
55. Ένας κύκλος κέντρου  $O$  έχει διάμετρο  $32$  cm. Να βρεθεί το μήκος τη χορδής  $AB$  του κύκλου, αν η γωνία  $A\hat{O}B$  ισούται με  $80^\circ$ .

56. Σε έναν κύκλο ( $K$ ,  $12\text{ cm}$ ), γράφουμε μια χορδή  $AB = 16\text{ cm}$ . Να υπολογίσετε τη γωνία  $AKB$ .

57. Δίνεται κύκλος ( $O$ ,  $2\text{ cm}$ ) και διάμετρος  $B\Gamma$  αυτού. Θεωρούμε σημείο  $A$  του κύκλου, τέτοιο ώστε  $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 25^\circ$ .

α. Να αποδείξετε ότι  $\hat{A}\hat{O}\hat{\Gamma} = 50^\circ$ .

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .



ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ 1° - 89°							
Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη	Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη
1	0,0175	0,9998	0,0175	46	0,7193	0,6947	1,0355
2	0,0349	0,9994	0,0349	47	0,7314	0,6820	1,0724
3	0,0523	0,9986	0,0524	48	0,7431	0,6691	1,1106
4	0,0698	0,9976	0,0699	49	0,7547	0,6561	1,1504
5	0,0872	0,9962	0,0875	50	0,7660	0,6428	1,1918
6	0,1045	0,9945	0,1051	51	0,7771	0,6293	1,2349
7	0,1219	0,9925	0,1228	52	0,7880	0,6157	1,2799
8	0,1392	0,9903	0,1405	53	0,7986	0,6018	1,3270
9	0,1564	0,9877	0,1584	54	0,8090	0,5878	1,3764
10	0,1736	0,9848	0,1763	55	0,8192	0,5736	1,4281
11	0,1908	0,9816	0,1944	56	0,8290	0,5592	1,4826
12	0,2079	0,9781	0,2126	57	0,8387	0,5446	1,5399
13	0,2250	0,9744	0,2309	58	0,8480	0,5299	1,6003
14	0,2419	0,9703	0,2493	59	0,8572	0,5150	1,6643
15	0,2588	0,9659	0,2679	60	0,8660	0,5000	1,7321
16	0,2756	0,9613	0,2867	61	0,8746	0,4848	1,8040
17	0,2924	0,9563	0,3057	62	0,8829	0,4695	1,8807
18	0,3090	0,9511	0,3249	63	0,8910	0,4540	1,9626
19	0,3256	0,9455	0,3443	64	0,8988	0,4384	2,0503
20	0,3420	0,9397	0,3640	65	0,9063	0,4226	2,1445
21	0,3584	0,9336	0,3839	66	0,9135	0,4067	2,2460
22	0,3746	0,9272	0,4040	67	0,9205	0,3907	2,3559
23	0,3907	0,9205	0,4245	68	0,9272	0,3746	2,4751
24	0,4067	0,9135	0,4452	69	0,9336	0,3584	2,6051
25	0,4226	0,9063	0,4663	70	0,9397	0,3420	2,7475
26	0,4384	0,8988	0,4877	71	0,9455	0,3256	2,9042
27	0,4540	0,8910	0,5095	72	0,9511	0,3090	3,0777
28	0,4695	0,8829	0,5317	73	0,9563	0,2924	3,2709
29	0,4848	0,8746	0,5543	74	0,9613	0,2756	3,4874
30	0,5000	0,8660	0,5774	75	0,9659	0,2588	3,7321
31	0,5150	0,8572	0,6009	76	0,9703	0,2419	4,0108
32	0,5299	0,8480	0,6249	77	0,9744	0,2250	4,3315
33	0,5446	0,8387	0,6494	78	0,9781	0,2079	4,7046
34	0,5592	0,8290	0,6745	79	0,9816	0,1908	5,1446
35	0,5736	0,8192	0,7002	80	0,9848	0,1736	5,6713
36	0,5878	0,8090	0,7265	81	0,9877	0,1564	6,3138
37	0,6018	0,7986	0,7536	82	0,9903	0,1392	7,1154
38	0,6157	0,7880	0,7813	83	0,9925	0,1219	8,1443
39	0,6293	0,7771	0,8098	84	0,9945	0,1045	9,5144
40	0,6428	0,7660	0,8391	85	0,9962	0,0872	11,4301
41	0,6561	0,7547	0,8693	86	0,9976	0,0698	14,3007
42	0,6691	0,7431	0,9004	87	0,9986	0,0523	19,0811
43	0,6820	0,7314	0,9325	88	0,9994	0,0349	28,6363
44	0,6947	0,7193	0,9657	89	0,9998	0,0175	57,2900
45	0,7071	0,7071	1,0000				