Κλασικός Ορισμός Πιθανότητας

- $\mathbf{P(A) = \dfrac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}} = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)}}$
- $\mathbf{P(\Omega) = 1}$
- $\mathbf{P(\varnothing) = 0}$
- Για κάθε ενδεχόμενο Α ισχύει: $\mathbf{0 \le P(A) \le 1}$

Κανόνες Λογισμού των Πιθανοτήτων

Για **ασυμβίβαστα / ξένα** ενδεχόμενα:

1. $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$ [Απλός προσθετικός νόμος]

Για **οποιαδήποτε** ενδεχόμενα:

2. $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$ [Προσθετικός νόμος]

3. $\mathbf{P(A') = 1 - P(A)}$

4. Αν $\mathbf{A \subseteq B}$, τότε $\mathbf{P(A) \le P(B)}$ **.**

5. $\mathbf{P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)}$

Ιδιότητες Δυνάμεων

1. $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$

2. $\dfrac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu}$

3. $(\alpha \cdot \beta)^{\mu} = \alpha^{\mu} \cdot \beta^{\mu}$

4. $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu} = \dfrac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}$

5. $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu \cdot \nu}$

6. $\alpha^{1} = \alpha$

7. $\alpha^{0} = 1$

8. $1^{\nu} = 1$

9. $0^{\nu} = 0$

10. $\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^{\nu}}$

11. $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$

Ταυτότητες

1. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
2. $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
3. $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$
4. $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$
5. $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$
6. $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
7. $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

8. $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$

Ταυτότητες Euler

9. $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)\cdot[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2]$
10. Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ ή $\alpha=\beta=\gamma \Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$

Ταυτότητες Newton

11. $(x + \alpha)(x + \beta) = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$
12. $(x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma) = x^3 + (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x + \alpha\beta\gamma$

Μερικές ακόμη... :)

13. $(\alpha + \beta + \gamma)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + 3\beta\gamma(\beta + \gamma) + 3\gamma\alpha(\alpha + \gamma) + 6\alpha\beta\gamma$
14. $\alpha^\nu - \beta^\nu = (\alpha - \beta)(\alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2}\beta + \alpha^{\nu-3}\beta^2 + \ldots + \alpha\beta^{\nu-2} + \beta^{\nu-1})$
15. $\alpha^\nu + \beta^\nu = (\alpha + \beta)(\alpha^{\nu-1} - \alpha^{\nu-2}\beta + \alpha^{\nu-3}\beta^2 - \ldots - \alpha\beta^{\nu-2} + \beta^{\nu-1})$

Μέθοδοι Παραγοντοποίησης

1. **Κοινός παράγοντας**
2. **Ομαδοποίηση (= κοινός παράγοντας σε ομάδες)**
3. **Ταυτότητα**
4. **Τριώνυμο**
5. Διάσπαση όρου
6. Προσθαφαίρεση όρου

Ιδιότητες Ισοτήτων

1. $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$

2. $\alpha + \gamma = \beta + \gamma \Rightarrow \alpha = \beta$ [Ιδιότητα διαγραφής πρόσθεσης]

Γενικά:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$$

3. $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$

4. $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$ και $\gamma \neq 0 \Rightarrow \alpha = \beta$ [Ιδιότητα διαγραφής πολλαπλασιασμού]

Γενικά:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma \quad (\gamma \neq 0)$$

5. Αν $\begin{cases} \alpha = \beta \\ \gamma = \delta \end{cases} \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta$ και $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \delta$

6. Αν $\alpha = \beta$ και $\beta = \gamma \Rightarrow \alpha = \gamma$ [Μεταβατική ιδιότητα]

7. $\alpha \cdot \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$

8. $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$

Ιδιότητες Αναλογιών

1. $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$

2. $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\gamma} = \dfrac{\beta}{\delta}$

3. $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \dfrac{\delta}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\alpha}$

4. $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha \pm \beta}{\beta} = \dfrac{\gamma \pm \delta}{\delta}$

5. $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\alpha \pm \beta} = \dfrac{\gamma}{\gamma \pm \delta}$

6. $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} = \dfrac{\alpha \pm \gamma}{\beta \pm \delta}$

Ιδιότητες Πράξεων

ΙΔΙΟΤΗΤΑ	ΠΡΟΣΘΕΣΗ	ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ
Αντιμεταθετική	$α + β = β + α$	$α \cdot β = β \cdot α$
Προσεταιριστική	$α + (β + γ) = (α + β) + γ$	$α\cdot(β\cdot γ) = (α\cdot β)\cdot γ$
Επιμεριστική	$α\cdot(β + γ) = α\cdot β + α \cdot γ$	$α\cdot(β - γ) = α\cdot β - α\cdot γ$
Διπλή επιμεριστική	$(α + β)\cdot(γ + δ) = α\cdot γ + α\cdot δ + β\cdot γ + β\cdot δ$	
Ουδέτερο στοιχείο	$α + 0 = α$	$α \cdot 1 = α$
Απορροφητικό στοιχείο		$α \cdot 0 = 0$
Αντίθετοι	$α + (-α) = 0$	
Αντίστροφοι		$α \cdot \frac{1}{α} = 1 \quad (α \neq 0)$

Διάταξη Πραγματικών Αριθμών

1. Κάθε **θετικός** αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν (**> 0**) .
2. Κάθε **αρνητικός** αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν (**< 0**) .
3. Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό.
4. **Αν** $\boldsymbol{\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0}$

   Αν $\boldsymbol{\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0}$

5. Αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ τότε $\alpha + \beta > 0$

   Αν $\alpha < 0$ και $\beta < 0$ τότε $\alpha + \beta < 0$
6. Αν α, β **ομόσημοι** τότε $\alpha \cdot \beta > 0$ και $\dfrac{\alpha}{\beta} > 0$

   Αν α, β **ετερόσημοι** τότε $\alpha \cdot \beta < 0$ και $\dfrac{\alpha}{\beta} < 0$
7. Για κάθε αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^2 \geq 0$

Για **θετικούς** αριθμούς α, β και **θετικό ακέραιο** ν ισχύει η ισοδυναμία:

8. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$
9. $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$

Ιδιότητες Ανισοτήτων

1. Αν $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
2. Αν $\gamma > 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$

   Αν $\gamma < 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$

3. Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$

   Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ τότε $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

4. Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$ τότε $\alpha > \gamma$ [Μεταβατική ιδιότητα]
5. Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$, τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$
6. Αν α, β ομόσημοι τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha} < \dfrac{1}{\beta}$

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Δεν επιτρέπεται να **αφαιρέσουμε** ή να **διαιρέσουμε** ανισότητες, κατά μέλη!

Ιδιότητες Απόλυτων Τιμών

1. $|\alpha| \geq 0$

2. $|\alpha| = |-\alpha|$

3. $|\alpha|^2 = \alpha^2$

4. $|\alpha| \geq \alpha$ **ή** $|\alpha| \geq -\alpha$

5. $|x| = \theta \ (\theta \geq 0) \Leftrightarrow x = \theta$ **ή** $x = -\theta$
Για $\theta < 0$ η σχέση είναι αδύνατη.

7. $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ **ή** $x = -\alpha$

8. $|x| < \theta \ (\theta > 0) \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$ (*)

9. $|x| > \theta \ (\theta > 0) \Leftrightarrow x < -\theta$ **ή** $x > \theta$ (*)

(*) Οι ιδιότητες ισχύουν και για ανισοτικές σχέσεις ≥ ή ≤ .

10. $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

11. $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$

12. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

13. $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$ [Απόσταση 2 αριθμών]

Τετραγωνικές Ρίζες

1. $\sqrt{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{x}^2 = \boldsymbol{\alpha}$, με x, α ≥ 0 [Ορισμός]

2. Για κάθε **μη αρνητικό** αριθμό α (**α ≥ 0**) ισχύει:

$$\left(\sqrt{\boldsymbol{\alpha}}\right)^2 = \boldsymbol{\alpha}$$

3. Για κάθε πραγματικό αριθμό α (**α∈ℝ**) ισχύει:

$$\sqrt{\boldsymbol{\alpha}^2} = |\boldsymbol{\alpha}|$$

4. Από (2) και (3), για κάθε **α ≥ 0** ισχύει:

$$\left(\sqrt{\boldsymbol{\alpha}}\right)^2 = \sqrt{\boldsymbol{\alpha}^2}$$

Για κάθε α, β ≥ 0 ισχύει:

5. $\sqrt{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \sqrt{\boldsymbol{\beta}} = \sqrt{\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}}$

6. $\dfrac{\sqrt{\boldsymbol{\alpha}}}{\sqrt{\boldsymbol{\beta}}} = \sqrt{\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}}$

Νιοστές Ρίζες

1. $\sqrt[\nu]{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{x}^\nu = \boldsymbol{\alpha}$, με x, α ≥ 0 [Ορισμός]

2. Για κάθε **μη αρνητικό** αριθμό α (**α ≥ 0**) ισχύει:

$$\left(\sqrt[\nu]{\boldsymbol{\alpha}}\right)^\nu = \boldsymbol{\alpha}$$

3. Για κάθε πραγματικό αριθμό α (**α∈ℝ**) ισχύει:

$$\sqrt[\nu]{\boldsymbol{\alpha}^\nu} = |\boldsymbol{\alpha}|$$

4. Από (2) και (3), για κάθε **α ≥ 0** ισχύει:

$$\left(\sqrt[\nu]{\boldsymbol{\alpha}}\right)^\nu = \sqrt[\nu]{\boldsymbol{\alpha}^\nu}$$

Για κάθε α, β ≥ 0 ισχύει:

5. $\sqrt[\nu]{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{\boldsymbol{\beta}} = \sqrt[\nu]{\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}}$

6. $\dfrac{\sqrt[\nu]{\boldsymbol{\alpha}}}{\sqrt[\nu]{\boldsymbol{\beta}}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}}$ (β ≠ 0)

Αν α, β ≥ 0 και μ, ν, ρ ∈ ℕ* , τότε:

7. $\sqrt[\nu]{\boldsymbol{\alpha}^\mu} = \boldsymbol{\alpha}^{\frac{\mu}{\nu}}$

8. $\sqrt[\nu]{\boldsymbol{\alpha}^\nu \cdot \boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\boldsymbol{\beta}}$

9. $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\boldsymbol{\alpha}}} = \sqrt[\mu\cdot\nu]{\boldsymbol{\alpha}}$

10. $\sqrt[\nu\cdot\rho]{\boldsymbol{\alpha}^{\mu\cdot\rho}} = \sqrt[\nu]{\boldsymbol{\alpha}^\mu}$

Ε ξ ι σ ώ σ ε ι ς 1ου Β α θ μ ο ύ

1. Γενικός τρόπος επίλυσης εξίσωσης 1ου βαθμού με έναν άγνωστο:

$$\boldsymbol{\alpha x + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha x = -\beta}$$

- Αν $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$ τότε η εξίσωση έχει **μοναδική λύση** την: $\boldsymbol{x = -\dfrac{\beta}{\alpha}}$
- Αν $\boldsymbol{\alpha = 0}$ και $\boldsymbol{\beta = 0}$ τότε η εξίσωση είναι **αόριστη / ταυτότητα**.
- Αν $\boldsymbol{\alpha = 0}$ και $\boldsymbol{\beta \neq 0}$ τότε η εξίσωση είναι **αδύνατη**.

2. Πρακτικά βήματα επίλυσης εξίσωσης 1ου βαθμού με έναν άγνωστο:

Βήμα 1 : Απαλοιφή παρονομαστών (ΕΚΠ).

Βήμα 2 : Απαλοιφή παρενθέσεων.

Βήμα 3 : Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.

Βήμα 4 : Αναγωγή ομοίων όρων.

Βήμα 5 : Διαιρούμε και τα δύο μέλη με το συντελεστή του αγνώστου.

Η Ε ξ ι σ ώ σ η $x^{\nu} = \alpha$

α	**ν**	**Πλήθος λύσεων**	**Λύσεις**
θετικός (α > 0)	**άρτιος**	**2**	$\boldsymbol{x = \pm \sqrt[\nu]{\alpha}}$
θετικός (α > 0)	**περιττός**	**1**	$\boldsymbol{x = \sqrt[\nu]{\alpha}}$
αρνητικός (α < 0)	**άρτιος**	**0**	αδύνατη
αρνητικός (α < 0)	**περιττός**	**1**	$\boldsymbol{x = -\sqrt[\nu]{\lvert\alpha\rvert}}$

Εξισώσεις 2ου Βαθμού

1. Γενικός τρόπος επίλυσης εξίσωσης 2ου βαθμού με έναν άγνωστο:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (\alpha \neq 0)$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$ [Διακρίνουσα]

Διακρίνουσα	**Πλήθος ριζών** ($\in \mathbb{R}$)	**Πρόσημο τριωνύμου**
$\Delta > 0$	**2 πραγματικές και άνισες**	$x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
$\Delta = 0$	**1 διπλή**	$x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$
$\Delta < 0$	**0 πραγματικές**	αδύνατη στο $\mathbb{R}$

2. **Τύποι Vieta**

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

3. Κατασκευή Εξίσωσης 2ου Βαθμού, με τη βοήθεια των S, P :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

3. **Παραγοντοποίηση** τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad (\alpha \neq 0)$:

Διακρίνουσα	**Ρίζες**	**Πρόσημο τριωνύμου**
$\Delta > 0$	ρ_1, ρ_2	$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$
$\Delta = 0$	ρ [διπλή ρίζα]	$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho)^2$
$\Delta < 0$	καμία ρίζα πραγματική	Το τριώνυμο παραμένει ως έχει.

Ανισώσεις 1ου Βαθμού

1. Γενικός τρόπος επίλυσης εξίσωσης 1ου βαθμού με έναν άγνωστο:

$$\mathbf{\alpha x + \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha x > -\beta}$$

- Αν **α > 0** τότε η εξίσωση έχει λύση: $\mathbf{x} > -\dfrac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}}$
- Αν **α < 0** τότε η εξίσωση έχει λύση: $\mathbf{x} < -\dfrac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}}$
- Αν **α = 0** και **β > 0** τότε η εξίσωση είναι **αόριστη / ταυτότητα**.
- Αν **α = 0** και **β ≤ 0** τότε η εξίσωση είναι **αδύνατη**.

[Αναλόγως σκεφτόμαστε αν αx + β < 0]

2. Πρακτικά βήματα επίλυσης ανίσωσης 1ου βαθμού με έναν άγνωστο:

- ▶ Ακριβώς τα ίδια με την αντίστοιχη εξίσωση 1ου βαθμού, προσέχοντας όμως μήπως χρειαστεί ν' αλλάξουμε τη φορά της ανίσωσης, αν στο 5ο βήμα ο συντελεστής του αγνώστου είναι αρνητικός.

Ανισώσεις 2ου Βαθμού
(Πρόσημο Τριωνύμου)

Διακρίνουσα	**Πλήθος ριζών** (∈ℝ)	**Πρόσημο τριωνύμου**
Δ > 0	**2**	**Ετερόσημο** του α εντός των ριζών. **Ομόσημο** του α εκτός των ριζών. **Μηδέν** στις ρίζες.
Δ = 0	**1**	**Ομόσημο** του α σε κάθε διάστημα. **Μηδέν** στη ρίζα.
Δ < 0	**0**	**Ομόσημο** του α, για κάθε x∈ℝ.

Α ρ ι θ μ η τ ι κ ή   Π ρ ό ο δ ο ς

1. Διαφορά

$$\omega = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu$$

2. Νιοστός Όρος

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\cdot\omega$$

3. Αριθμητικός Μέσος

Αν α, β, γ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου :

$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

4. Άθροισμα ν πρώτων όρων

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \quad \text{ή} \quad S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega]$$

Γ ε ω μ ε τ ρ ι κ ή   Π ρ ό ο δ ο ς

1. Λόγος

$$\lambda = \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$$

2. Νιοστός Όρος

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu - 1}$$

3. Γεωμετρικός Μέσος

Αν α, β, γ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου :

$$\beta^2 = \alpha\cdot\gamma$$

4. Άθροισμα ν πρώτων όρων

$$S_\nu = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$$