Κανόνες Λογισμού των Πιθανοτήτων

1. Απλός Προσθετικός Νόμος

Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα Α και Β ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Απόδειξη

Επειδή τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα, τότε θα είναι $N(A \cup B) = N(A) + N(B)$. Επομένως:

$$P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A) + N(B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} = P(A) + P(B)$$

2. Για δυο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και A' ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Απόδειξη

Επειδή $A \cap A' = \varnothing$, δηλαδή τα Α και A' είναι ασυμβίβαστα, έχουμε σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

Όμως $A \cup A' = \Omega$ για οποιοδήποτε ενδεχόμενο Α. Συνεπώς:

$$P(\Omega) = P(A) + P(A') \iff$$
$$1 = P(A) + P(A') \iff$$
$$P(A') = 1 - P(A)$$

3. Προσθετικός Νόμος

Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Απόδειξη

Γενικά, για δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α και Β ισχύει:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B).$$

Αυτό συμβαίνει γιατί δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα έχουν πιθανότατα κοινά στοιχεία, τα οποία αναπόφευκτα διπλομετρούνται στο άθροισμα N(A) + N(B). Αρκεί, λοιπόν, να αφαιρέσουμε μία φορά το πλήθος του $A \cap B$ που περισσεύει.

Τελικά, έχουμε:

$$P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A) + N(B) - N(A \cap B)}{N(\Omega)} =$$

$$= \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

4. Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$

Απόδειξη

Επειδή $A \subseteq B$ έχουμε διαδοχικά:

$$N(A) \leq N(B) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{N(A)}{N(\Omega)} \leq \frac{N(B)}{N(\Omega)} \quad \Leftrightarrow \quad P(A) \leq P(B)$$

5. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Απόδειξη

Προφανώς, τα ενδεχόμενα $A - B$ και $A \cap B$ είναι ασυμβίβαστα.

Επιπλέον, ισχύει ότι: $(A - B) \cup (A \cap B) = A$.

Άρα, τελικά, έχουμε:

$$P[\,(A - B) \cup (A \cap B)\,] = P(A - B) + P(A \cap B) \quad \Leftrightarrow$$

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \quad \Leftrightarrow$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Διάταξη Πραγματικών Αριθμών

1. Για **θετικούς** αριθμούς α, β και **θετικό ακέραιο** ν ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^{\nu} > \beta^{\nu}$$

➔ **Απόδειξη Ευθείας Πρότασης**

Έστω α > β. Θα είναι:

$$\nu \text{ φορές} \left\{ \begin{array}{l} \alpha > \beta \\ \alpha > \beta \\ \quad \ldots \\ \alpha > \beta \end{array} \right.$$

από όπου, με πολλαπλασιασμό κατά μέλη, προκύπτει:

$$\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu \text{ φορές}} > \underbrace{\beta \cdot \beta \cdot \ldots \cdot \beta}_{\nu \text{ φορές}} \Leftrightarrow \alpha^{\nu} > \beta^{\nu}$$

➔ **Απόδειξη Αντίστροφης Πρότασης**
(Εις Άτοπον Απαγωγή)

Έστω ότι $\alpha^{\nu} > \beta^{\nu}$ αλλά $\alpha \leq \beta$. Τότε:

- Αν ήταν α = β, από τον ορισμό της ισότητας θα είχαμε $\alpha^{\nu} = \beta^{\nu}$, που είναι άτοπο.
- Αν ήταν α < β, από την ευθεία πρόταση θα είχαμε $\alpha^{\nu} < \beta^{\nu}$, που είναι επίσης άτοπο.

Άρα, τελικά, α > β .

2. Για **θετικούς** αριθμούς α, β και **θετικό ακέραιο** ν ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^{\nu} = \beta^{\nu}$$

➔ **Απόδειξη Ευθείας Πρότασης**

Έστω α = β. Τότε, από τον ορισμό της ισότητας προκύπτει: $\alpha^{\nu} = \beta^{\nu}$.

➔ **Απόδειξη Αντίστροφης Πρότασης**
(Εις Άτοπον Απαγωγή)

Έστω ότι $α^ν = β^ν$ αλλά $α \neq β$. Τότε:

- Αν ήταν $α > β$, τότε θα είχαμε $α^ν > β^ν$, που είναι άτοπο.
- Αν ήταν $α < β$, τότε θα είχαμε $α^ν < β^ν$, που είναι επίσης άτοπο.

Άρα, τελικά, $α = β$.

Ιδιότητες Απόλυτων Τιμών

1. $|α\cdot β| = |α|\cdot|β|$
2. $\left|\dfrac{α}{β}\right| = \dfrac{|α|}{|β|}$
3. $|α + β| \le |α| + |β|$

Απόδειξη

1. Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$|α\cdot β| = |α|\cdot|β| \Leftrightarrow$$
$$|α\cdot β|^2 = (|α|\cdot|β|)^2 \Leftrightarrow$$
$$|α\cdot β|^2 = |α|^2\cdot|β|^2 \Leftrightarrow$$
$$(α\cdot β)^2 = α^2\cdot β^2$$

το οποίο ισχύει, ως γνωστόν, από τις ιδιότητες των δυνάμεων.

---

2. Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$\left|\frac{α}{β}\right| = \frac{|α|}{|β|} \Leftrightarrow \left|\frac{α}{β}\right|^2 = \left(\frac{|α|}{|β|}\right)^2 \Leftrightarrow \left|\frac{α}{β}\right|^2 = \frac{|α|^2}{|β|^2} \Leftrightarrow \left(\frac{α}{β}\right)^2 = \frac{α^2}{β^2}$$

το οποίο ισχύει, ως γνωστόν, από τις ιδιότητες των δυνάμεων.

3. Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \;\; \Leftrightarrow$
$|\alpha + \beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \;\; \Leftrightarrow$
$(\alpha + \beta)^2 \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\cdot|\alpha|\cdot|\beta| \;\; \Leftrightarrow$
$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2 + 2|\alpha\beta| \;\; \Leftrightarrow$
$2\alpha\beta \leq 2|\alpha\beta| \;\; \Leftrightarrow$
$\alpha\beta \leq |\alpha\beta|$

το οποίο ισχύει, από τις ιδιότητες των απόλυτων τιμών.

Παρατήρηση

Η ισότητα $\alpha\beta = |\alpha\beta|$ ισχύει αν και μόνο αν $\alpha\beta \geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με το μηδέν.

Ιδιότητες Ριζών

Αν $\alpha, \beta \geq 0$ και $\mu, \nu, \rho \in \mathbb{N}^*$, τότε:

1. $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}$

2. $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}} \quad (\beta \neq 0)$`

3. $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\cdot\nu]{\alpha}$

4. $\sqrt[\nu\cdot\rho]{\alpha^{\mu\cdot\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

Απόδειξη

1. Έχουμε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta} \;\; \Leftrightarrow \;\; \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}\right)^{\nu} \;\; \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \;\; \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu}\cdot\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu} = \alpha\cdot\beta \;\; \Leftrightarrow \;\; \alpha\cdot\beta = \alpha\cdot\beta$$

το οποίο, φυσικά, ισχύει.

2. Έχουμε:

$$\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}\right)^{\nu}=\left(\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^{\nu} \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu}}{\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu}}=\frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$$

το οποίο, φυσικά, ισχύει.

---

3. $$\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}=\sqrt[\mu\cdot\nu]{\alpha} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\right)^{\mu\cdot\nu}=\left(\sqrt[\mu\cdot\nu]{\alpha}\right)^{\mu\cdot\nu} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\right)^{\mu}\right]^{\nu}=\alpha \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu}=\alpha \Leftrightarrow \alpha=\alpha$$

το οποίο, φυσικά, ισχύει.

---

4. $$\sqrt[\nu\cdot\rho]{\alpha^{\mu\cdot\rho}}=\sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{\alpha^{\mu\cdot\rho}}}=\sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{\left(\alpha^{\mu}\right)^{\rho}}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

Εξισώσεις 2ου Βαθμού

---

1. Τύποι του Vieta

Στην περίπτωση που η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ $(\alpha\neq 0)$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2 τότε ισχύουν οι τύποι:

$$S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad P=x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}$$

Απόδειξη

$$x_1+x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}+\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2\beta}{2\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\cdot\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{\left(-\beta+\sqrt{\Delta}\right)\cdot\left(-\beta-\sqrt{\Delta}\right)}{4\alpha^2}=\frac{(-\beta)^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4\alpha^2}=$$

$$=\frac{(-\beta)^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4\alpha^2}=\frac{\beta^2-\Delta}{4\alpha^2}=\frac{\beta^2-(\beta^2-4\alpha\gamma)}{4\alpha^2}=\frac{\beta^2-\beta^2+4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=\frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=\frac{\gamma}{\alpha}$$

2. Η δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες δοσμένους αριθμούς x_1 και x_2 δίνεται από τη σχέση:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

όπου $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$

Απόδειξη

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \overset{\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{\alpha x^2}{\alpha} + \frac{\beta x}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow x^2 - (x_1 + x_2)\cdot x + (x_1 \cdot x_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

Αριθμητική Πρόοδος

1. Ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\cdot\omega$$

Απόδειξη

Από τον ορισμό της αριθμητικής προόδου έχουμε:

$$\nu \text{ ισότητες} \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_1 \\ \alpha_2 = \alpha_1 + \omega \\ \alpha_3 = \alpha_2 + \omega \\ \alpha_4 = \alpha_3 + \omega \\ \ldots \\ \alpha_{\nu-1} = \alpha_{\nu-2} + \omega \\ \alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \omega \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu =$$
$$= \alpha_1 + (\alpha_1 + \omega) + (\alpha_2 + \omega) + (\alpha_3 + \omega) + \ldots + (\alpha_{\nu-2} + \omega) + (\alpha_{\nu-1} + \omega)$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαγραφής προσθετέων, παρατηρούμε ότι οι περισσότεροι όροι απλοποιούνται. Τελικά, απομένει:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + \left(\underbrace{\omega+\omega+\omega+\ldots+\omega+\omega}_{(\nu-1)\ \text{προσθετέοι}}\right) = \alpha_1 + (\nu-1)\cdot\omega$$

2. Αριθμητικός Μέσος

Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει:

$$\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$$

Στην περίπτωση αυτή ο β λέγεται αριθμητικός μέσος των α, γ.

➔ **Απόδειξη Ευθείας Πρότασης**

Αν α, β, γ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε θα είναι:

$$\beta - \alpha = \omega \quad \text{και} \quad \gamma - \beta = \omega$$

Συνεπώς: $\beta - \alpha = \gamma - \beta \Leftrightarrow 2\beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow \beta = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$

➔ **Απόδειξη Αντίστροφης Πρότασης**

Αν για τρεις αριθμούς α, β, γ ισχύει $\beta = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$ τότε:

$$\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2} \Leftrightarrow 2\beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow \beta - \alpha = \gamma - \beta$$

που σημαίνει ότι οι α, β, γ έχουν ο καθένας σταθερή διαφορά με τον προηγούμενό του. Συνεπώς, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

Γεωμετρική Πρόοδος

1. Ο νιοστός όρος μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ είναι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$$

Απόδειξη

Από τον ορισμό της γεωμετρικής προόδου έχουμε:

$$\text{ν ισότητες}\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_1 \\ \alpha_2 = \alpha_1 \cdot \lambda \\ \alpha_3 = \alpha_2 \cdot \lambda \\ \alpha_4 = \alpha_3 \cdot \lambda \\ \ldots \\ \alpha_{\nu-1} = \alpha_{\nu-2} \cdot \lambda \\ \alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} \cdot \lambda \end{cases}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 \cdot \ldots \cdot \alpha_{\nu-1} \cdot \alpha_\nu =$$
$$= \alpha_1 \cdot (\alpha_1 \cdot \lambda) \cdot (\alpha_2 \cdot \lambda) \cdot (\alpha_3 \cdot \lambda) \cdot \ldots \cdot (\alpha_{\nu-2} \cdot \lambda) \cdot (\alpha_{\nu-1} \cdot \lambda)$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαγραφής παραγόντων (μη μηδενικών), παρατηρούμε ότι οι περισσότεροι όροι απλοποιούνται. Τελικά, απομένει:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \left(\underbrace{\lambda \cdot \lambda \cdot \lambda \cdot \ldots \cdot \lambda \cdot \lambda}_{(\nu-1)\ \text{παράγοντες}} \right) = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$$

2. Γεωμετρικός Μέσος

Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει:

$$\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$$

Στην περίπτωση αυτή ο β λέγεται γεωμετρικός μέσος των α, γ.

➔ **Απόδειξη Ευθείας Πρότασης**

Αν α, β, γ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε θα είναι:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \lambda \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\beta} = \lambda$$

Συνεπώς: $\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha \cdot \gamma$

➔ **Απόδειξη Αντίστροφης Πρότασης**

Αν για τρεις αριθμούς α, β, $\gamma \neq 0$ ισχύει $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$ τότε:

$$\beta^2 = \alpha \cdot \gamma \overset{:(\alpha\beta)}{\Leftrightarrow} \frac{\beta^2}{\alpha \cdot \beta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\alpha \cdot \beta} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$$

που σημαίνει ότι οι α, β, γ έχουν ο καθένας σταθερό λόγο με τον προηγούμενό του. Συνεπώς, αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

3. Το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda \neq 1$ είναι:

$$S_\nu = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$$

Απόδειξη

Έστω

$$S_\nu = \alpha_1 + \alpha_1 \cdot \lambda + \alpha_1 \cdot \lambda^2 + \ldots + \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-2} + \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1} \qquad (1)$$

το άθροισμα των ν πρώτων όρων μια γεωμετρικής προόδου.
Πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους με λ έχουμε:

$$\lambda \cdot S_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda + \alpha_1 \cdot \lambda^2 + \alpha_1 \cdot \lambda^3 + \ldots + \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1} + \alpha_1 \cdot \lambda^\nu \qquad (2)$$

Αφαιρούμε τις (2) και (1) κατά μέλη, οπότε οι περισσότεροι όροι διαγράφονται ως αντίθετοι. Τελικά έχουμε:

$$(2) - (1) \Leftrightarrow \lambda \cdot S_\nu - S_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^\nu - \alpha_1 \Leftrightarrow (\lambda - 1) \cdot S_\nu = \alpha_1 \cdot (\lambda^\nu - 1) \Leftrightarrow$$

$$\overset{\lambda \neq 1}{\Leftrightarrow} S_\nu = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$$