ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

1. Να βρείτε τους τέσσερις πρώτους όρους των παρακάτω ακολουθιών και να παραστήσετε σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων τα αντίστοιχα σημεία.

α. $\alpha_\nu = 4\nu + 3$

β. $\alpha_\nu = 2 + (-1)^\nu$

γ. $\alpha_\nu = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{\nu\cdot(\nu+1)}$

δ. $\alpha_1 = 0$, $\alpha_{\nu+1} = \dfrac{2}{3\alpha_\nu + 1}$

2. Να βρείτε τον αναδρομικό τύπο των ακολουθιών :

α. $\alpha_\nu = 2\nu - 3$

β. $\beta_\nu = 5\cdot 3^\nu$

γ. $\gamma_\nu = 1 + 2^\nu$

3. Να βρείτε το γενικό τύπο των ακολουθιών :

α. $\alpha_{\nu+1} = 1 + \alpha_\nu$, $\alpha_1 = -1$

β. $\beta_{\nu+1} = 3\cdot\beta_\nu$, $\beta_1 = 15$

γ. $\gamma_{\nu+1} = \gamma_\nu + 2\nu$, $\gamma_1 = 3$

4. Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 6$ και $\alpha_{12} = 94$. Να βρείτε τη διαφορά ω και τον $10^{\text{ο}}$ όρο της προόδου.

5. Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 3$ και $\omega = 7$.

α. Να βρείτε το πλήθος ν των πρώτων όρων της προόδου που δίνουν άθροισμα ίσο με 679.

β. Ποιος θα είναι ο τελευταίος όρος α_ν σ’ αυτή την περίπτωση;

6. Σε μια αριθμητική πρόοδο το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της είναι $S_{20} = 610$ και το άθροισμα των 12 πρώτων όρων της $S_{12} = 222$. Να βρείτε τη διαφορά ω και τον $1^{ο}$ όρο της.

7. Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο στην οποία :

α. Το άθροισμα του $1^{ου}$ και του $5^{ου}$ όρου είναι -2, ενώ το άθροισμα του $2^{ου}$ και του $6^{ου}$ όρου είναι 2.

β. Το άθροισμα του $2^{ου}$ και του $4^{ου}$ όρου είναι 7, ενώ το γινόμενο των ίδιων όρων είναι 10.

8. Σε μια αριθμητική πρόοδο ο $2^{ος}$ και ο $8^{ος}$ όρος διαφέρουν κατά 24, ενώ το άθροισμα του $12^{ου}$ και του $4^{ου}$ όρου είναι 70.

α. Να βρείτε την πρόοδο, αν είναι γνωστό ότι ειναι γνησίων φθίνουσα.

β. Ποιο το άθροισμα των όρων της που βρίσκονται μεταξύ του $8^{ου}$ και του 25 όρου της στην περίπτωση αυτή;

9. Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο της οποίας το άθροισμα των 3 πρώτων όρων της είναι ίσο με -3 και άθροισμα των 5 πρώτων όρων ίσο με 10.

10. Να βρείτε το άθροισμα των 4 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου με $α_6 = 8$, $α_4 = 4$.

11. Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο αν ο $2^{ος}$ και ο $7^{ος}$ όρος έχουν γινόμενο 100 και οι μεταξύ τους όροι έχουν άθροισμα 50.

12. Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $α_9 = 15$ και $S_{12} = 165$.

α. Να βρείτε τον $5^{ο}$ όρο της προόδου και

β. Το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της.

13. **α.** Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο αν $α_3 = 11$ και $α_6 = 23$.

β. Πόσοι πρώτοι όροι της έχουν άθροισμα που δεν υπερβαίνει το 210;

14. Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο στην οποία ο $4^{ος}$ και ο $8^{ος}$ όρος της έχουν άθροισμα 18, ενώ το άθροισμα των κύβων των όρων αυτών είναι 3402.

15. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ οι αριθμοί $(\alpha + \beta)^2$, $\alpha^2 + \beta^2$ και $(\alpha - \beta)^2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

16. Αν οι αριθμοί $\frac{2}{\beta+\gamma}$, $\frac{2}{\gamma+\alpha}$, $\frac{2}{\alpha+\beta}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να δείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για τους όρους $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$.

17. Αν οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου :

α. Δείξτε ότι οι αριθμοί $\alpha^2 - \beta\gamma$, $\beta^2 - \alpha\gamma$, $\gamma^2 - \alpha\beta$ είναι επίσης διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β. Να βρείτε τον λόγο των διαφορών των δύο προόδων αυτών.

18. **α.** Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου δείξτε ότι : $\alpha - \beta = \beta - \gamma$.

β. Αν οι αριθμοί $\frac{\beta+\gamma-\alpha}{\alpha}$, $\frac{\gamma+\alpha-\beta}{\beta}$, $\frac{\alpha+\beta-\gamma}{\gamma}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, δείξτε ότι οι $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$ είναι επίσης διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

19. Να βρείτε τρεις διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, οι οποίοι έχουν άθροισμα 33 και γινόμενο 440.

20. Να βρείτε τέσσερις διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, οι οποίοι έχουν άθροισμα 16 και γινόμενο άκρων όρων 7.

21. Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο αν $S_5 = \frac{S_{10} - S_5}{2}$ και $\alpha_1 = 1$.

22. Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια του 7 περιέχονται μεταξύ του 15 και του 300.

23. Να βρείτε το πλήθος και το άθροισμα :

α. Των διψήφιων περιττών αριθμών.

β. Των διψήφιων άρτιων αριθμών.

γ. Των διψήφιων φυσικών αριθμών.

δ. Των διψήφιων πολλαπλασίων του 4.

24. **α.** Ποιο είναι το άθροισμα των 7 πρώτων όρων της προόδου 3, 5, 7, 9, ... ;

β. Πόσους διαδοχικούς πρώτους όρους της προόδου αυτής πρέπει να προσθέσουμε, ώστε να πάρουμε άθροισμα 99;

25. Μεταξύ των αριθμών 4 και 34 να παρεμβάλετε άλλους αριθμούς, ώστε να δημιουργηθεί μια αριθμητική πρόοδος με 11 όρους.

26. Πόσους αριθμούς πρέπει να παρεμβάλουμε μεταξύ του 5 και του 50, ώστε οι τελευταίος από τους αριθμούς αυτούς να είναι 3πλάσιος από τον δεύτερο και όλοι οι αριθμοί να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητική προόδου;

27. Να βρείτε τις γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου, αν γνωρίζετε ότι είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

28. Αν τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, δείξτε ότι είναι ανάλογα των αριθμών 3, 4, 5.

29. Σε μια ευθεία θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε ώστε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΕ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Αν ΑΓ = 16cm και ΓΕ = 24cm να βρείτε τα μήκη των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΕ.

30. Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων όρων της ακολουθίας :
$1, -3, 5, -7, 9, -11, \ldots$

31. Να βρείτε τα αθροίσματα :

α. $2 + 5 + 8 + 11 + \dots + (2 + 3\nu)$

β. $3 + 5 + 7 + \dots + (3 + 2\nu)$

32. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α. $(x + 2) + (x + 5) + (x + 8) + \dots + (x + 29) = 165$

β. $1 + 7 + 13 + \dots + x = 280$, με $x > 0$.

33. Ο νιοστός όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_\nu = 3\nu + 2$.

α. Να βρείτε τον επόμενο όρο $\alpha_{\nu+1}$.

β. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος.

γ. Να βρείτε το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της.

δ. Να βρείτε την τάξη του όρου της που είναι ίσος με 62.

34. Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο της οποίας το άθροισμα των ν πρώτων όρων, για κάθε φυσικό ν, είναι $S_\nu = 2\nu^2$.

35. **Α.** Αν α_ν, β_ν δυο αριθμητικές πρόοδοι με διαφορές ω_1, ω_2 αντίστοιχα και για κάθε ν είναι $\beta_\nu \neq 0$, εξετάστε σε ποια περίπτωση σχηματίζεται αριθμητική πρόοδος.

α. $\alpha_{2\nu+1}$ **β.** $|\alpha_\nu|$

γ. $2\alpha_\nu + 3$ **δ.** $(\alpha_\nu)^2$

ε. $\dfrac{1}{\beta_\nu}$ **στ.** $\alpha_\nu + \beta_\nu$

ζ. $\alpha_\nu - \beta_\nu$ **η.** $2\alpha_\nu + 3\beta_\nu$

θ. $\alpha_\nu \cdot \beta_\nu$ **ι.** $\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$

Β. Στις περιπτώσεις που σχηματίζεται αριθμητική πρόοδος, βρείτε την αντίστοιχη νέα διαφορά.

36. **α.** Αν α_μ, α_κ είναι οι όροι τάξεως μ, κ αντιστοίχως μιας αριθμητικής προόδου, δείξτε ότι ισχύει :

$$\alpha_\mu = \alpha_\kappa + (\mu - \kappa)\omega$$

β. Δείξτε ότι σε κάθε αριθμητική πρόοδο $α_1, α_2, \dots, α_ν$ οι όροι $α_ρ$ και $α_{ν-ρ+1}$ ισαπέχουν από τα άκρα $α_1$ και $α_ν$.

γ. Δείξτε ότι σε κάθε αριθμητική πρόοδο $α_1, α_2, \dots, α_ν$ οι όροι που ισαπέχουν από τα άκρα, έχουν άθροισμα ίσο με το άθροισμα των άκρων όρων.

37. Σ' έναν ουρανοξύστη 17 ορόφων, τα γραφεία του ιδίου ορόφου έχουν το ίδιο ενοίκιο. Κάθε γραφείο του 1ου ορόφου ενοικιάζεται 550 € το μήνα. Κάθε γραφείο ενός ορόφου ενοικιάζεται 35 € το μήνα ακριβότερα από ένα γραφείο του προηγούμενου ορόφου.

α. Ποιο είναι το μηνιαίο ενοίκιο ενός γραφείου του 5ου ορόφου;

β. Πόσο ακριβότερο είναι ένα γραφείο του 15ου ορόφου από ένα του 7ου;

γ. Σε ποιους ορόφους το ενοίκιο ξεπερνά τα 1000 € το μήνα;

δ. Αν το πλήθος των γραφείων ενός ορόφου είναι μικρότερο κατά 2 από το πλήθος των γραφείων του αμέσως προηγούμενου ορόφου και ο 17ος όροφος έχει 12 γραφεία, πόσα γραφεία έχει ο 1ος όροφος;

38. Α. Οι μαθητές ενός σχολείου θέλησαν να γραφτούν στο βιβλίο Γκίνες κάνοντας ρεκόρ στο σχηματισμό της υψηλότερης ανθρώπινης πυραμίδας, που θα ισορροπούσε για ένα λεπτό. Μπήκαν, λοιπόν, σε σειρές ως εξής: στην κορυφή ένα άτομο, στην επόμενη σειρά δύο, στην αμέσως πιο κάτω σειρά τρεις κλπ. Έτσι κατάφεραν συνολικά 45 μαθητές να κάνουν το ρεκόρ.

α. Πόσες σειρές είχε η πυραμίδα που σχημάτισαν;

β. Πόσοι τουλάχιστον μαθητές θα χρειαστούν, ώστε να σπάσει το ρεκόρ αυτό, αν σχηματίσουν με παρόμοιο τρόπο μια νέα πυραμίδα;

Β. Ένα μήνα μετά οι μαθητές ενός γειτονικού σχολείου σχημάτισαν με όμοιο τρόπο μια πυραμίδα υψηλότερη κατά 3 σειρές και έσπασαν το ρεκόρ.

α. Πόσοι συνολικά ήταν οι μαθητές αυτοί;

β. Αν οι μαθητές που παίρνουν μέρος στο σχηματισμό της πυραμίδας δεν ξεπερνούν τους 210, πόσες σειρές μπορούν να σχηματίσουν;

39. Μια ομάδα 324 στρατιωτών παρατάσσεται σε τριγωνικό σχήμα, ώστε στην $1^η$ σειρά μπαίνει ένας, στην $2^η$ τρεις, στην $3^η$ σειρά πέντε, κλπ.

α. Πόσοι στρατιώτες θα βρίσκονται στην $12^η$ σειρά;

β. Πόσες σειρές σχηματίστηκαν συνολικά;

40. Ένα κολιέ αξίας 65000 € αποτελείται από 33 διαμάντια. Το μεσαίο διαμάντι είναι και το ακριβότερο. Τα υπόλοιπα διαμάντια είναι τοποθετημένα κατά σειρά αξίας, ώστε κάθε διαμάντι μέχρι το μεσαίο να αξίζει 100 € λιγότερο από το επόμενό του και στη συνέχεια, από το μεσαίο και πέρα, κάθε διαμάντι να αξίζει 150 € λιγότερο από το προηγούμενό του.

Α. **α.** Πόσα ευρώ φθηνότερο από το μεσαίο διαμάντι είναι το πρώτο;

β. Πόσα ευρώ φθηνότερο από το μεσαίο διαμάντι είναι το τελευταίο;

Β. Πόσα ευρώ είναι η αξία του μεσαίου διαμαντιού;

41. **Α**. Σε μια αμφιθεατρική αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς σχηματίζει αριθμητική πρόοδο. Η $1^η$ σειρά έχει 16 καθίσματα και η $7^η$ σειρά 28 καθίσματα.

α. Πόσα καθίσματα έχει η $10^η$ σειρά;

β. Πόσα καθίσματα υπάρχουν απο την $4^η$ έως και την $10^η$ σειρά;

Β. Αν στην $1^η$ σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη $2^η$ υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην $3^η$ σειρά 12, κλπ.

α. Από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα;

β. Πόσοι ειναι οι θεατές;

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

1. Να σχηματισθούν οι γεωμετρικές πρόοδοι με :

α. $\alpha_1 = 5$ και $\lambda = 3$

β. $\alpha_1 = \frac{2}{3}$ και $\lambda = \frac{1}{4}$

γ. $\alpha_1 = -20$ και $\lambda = \frac{1}{2}$

2. Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε στους αριθμούς 2, 16, 58 για να γίνουν τρεις διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου;

3. **α.** Αν $\alpha_1 = 2$ και $\lambda = \frac{1}{3}$ να βρεθεί ο α_6.

β. Αν $\alpha_6 = 448$ και $\lambda = 2$ να βρεθεί ο α_1.

γ. Αν $\alpha_1 = 9$ και $\alpha_5 = 144$ να βρεθεί ο λ.

δ. Αν $\alpha_1 = 2$ και $\lambda = 3$ και $\alpha_\nu = 162$ να βρεθεί ο ν.

4. Να ορισθεί η γεωμετρική πρόοδος, αν $\alpha_4 = -6$ και $\alpha_8 = -\frac{2}{27}$.

5. Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_3 = 12$ και $\alpha_8 = 384$, να βρεθεί ο λ.

6. Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 8$ και $\lambda = \frac{1}{4}$:

α. Να βρεθεί το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της S_4.

β. Να βρεθεί το άθροισμα των άπειρων όρων της.

7. Στη γεωμετρική πρόοδο :

α. με $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_\nu = \frac{1}{64}$ και $\lambda = \frac{1}{2}$ να βρείτε το πλήθος ν.

β. με $\alpha_1 = -\frac{81}{4}$, $\alpha_5 = -\frac{1}{4}$ να βρείτε το λόγο λ.

8. Να βρεθεί η γεωμετρική πρόοδος, όταν :

α. $\alpha_4 - \alpha_2 = 24$ και $\alpha_2 + \alpha_3 = 6$.

β. $\frac{\alpha_4}{\alpha_6} = 4$ και $\alpha_2 \cdot \alpha_8 = \frac{1}{4}$.

9. **α.** Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_4 = 13$, $\alpha_6 = 117$ και $\alpha_\nu = 9477$, να βρεθεί ο ν.

β. Να βρεθεί το πλήθος ν των όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν), αν έχουμε $\alpha_1 = 4$, $\alpha_\nu = 972$ και $S_\nu = 1456$.

10. Να βρεθούν τρεις διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, οι οποίοι να έχουν άθροισμα 14 και γινόμενο 64.

11. Να βρεθούν τέσσερις διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, που να έχουν γινόμενο 16 και άθροισμα μεσαίων όρων 5.

12. Να βρεθούν τέσσερις διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, οι οποίοι έχουν γινόμενο 625 και το τετράγωνο του τρίτου είναι είναι τετραπλάσιο του γινομένου των δύο άκρων όρων.

13. Να βρεθούν τρεις διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των δύο πρώτων είναι 10 και το άθροισμα των δύο τελευταίων είναι 15.

14. **α.** Να βρεθεί μια γεωμετρική πρόοδος που να είναι γνησίως αύξουσα και η διαφορά του $1^{ου}$ από τον $5^{ο}$ όρο της είναι 160, ενώ του $2^{ου}$ από τον $4^{ο}$ όρο είναι 48.

β. Να βρεθεί μια γεωμετρική πρόοδος που να είναι γνησίως φθίνουσα και η διαφορά του $5^{ου}$ από τον $1^{ο}$ όρο της είναι 160, ενώ του $4^{ου}$ από τον $2^{ο}$ όρο είναι 48.

15. Να βρεθεί η γεωμετρική πρόοδος αν ο $6^{ος}$ όρος της είναι τετραπλάσιος του $4^{ου}$ όρου της και το άθροισμα του $2^{ου}$ και του $5^{ου}$ όρου είναι 216.

16. Να βρεθούν τέσσερις διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν ξέρουμε ότι ο $2^{ος}$ είναι μεγαλύτερος από τον $1^{ο}$ κατά 3, ενώ ο $3^{ος}$ όρος είνα μικρότερος από τον $4^{ο}$ κατά 12.

17. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος 1, 3, 9, 27, 81.

α. Να βρείτε τα γινόμενα $\alpha_1 \cdot \alpha_5$, $\alpha_2 \cdot \alpha_4$, α_3^2 .

β. Να γενικεύσετε το συμπέρασμά σας.

γ. Ισχύει $2 \cdot 12 = 4 \cdot 6$. Η ακολουθία 2, 4, 6, 12 είναι γεωμετρική πρόοδος;

δ. Τι συμπαιρένετε για το αντίστροφο του συμπεράσματος του (β);

18. **α.** Ποιο είναι το άθροισμα των 6 πρώτων όρων της : $-1, 2, -4, 8, \dots$;

β. Πόσους διαδοχικούς πρώτους όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε να πάρουμε άθροισμα 85;

19. Να βρείτε το S_4 στη γεωμετρική πρόοδο με :

$$\alpha_{10} = 48\sqrt{2} \quad \text{και} \quad \alpha_7 = 24$$

20. Να βρείτε τη γεωμετρική πρόοδο με :

$$S_4 = 30 \quad \text{και} \quad \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 = 480$$

21. Να βρείτε τα αθροίσματα των άπειρων όρων των παρακάτω γεωμετρικών προόδων:

α. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

β. $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$

γ. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$

δ. $\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}$

22. Να βρεθεί ο α_1 μιας γεωμετρικής προόδου, αν το άθροισμα S των άπειρων όρων της είναι 100 και ο $\lambda = \frac{1}{2}$.

23. Να βρεθεί ο λ μιας γεωμετρικής προόδου, αν το άθροισμα S των άπειρων όρων της είναι 30 και το $\alpha_1 = 10$.

24. Το άθροισμα S των άπειρων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με $|\lambda| < 1$ είναι $\frac{25}{4}$ και $\alpha_1 + \alpha_2 = 6$. Να βρεθούν οι α_1 και λ.

25. Μια γεωμετρική πρόοδος $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ έχει $|\lambda| < 1$.

α. Να αποδείξετε ότι η $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2, \ldots$ είναι και αυτή απολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος.

β. Αν το άθροισμα των άπειρων όρων της είναι 6 και το άθροισμα των άπειρων όρων των τετραγώνων τους είναι 18, να βρεθεί η γεωμετρική πρόοδος.

26. Να βρεθούν τρεις αριθμοί που αποτελούν αύξουσα γεωμετρική πρόοδο, αν το άθροισμά τους είναι 65 και η διαφορά των άκρων όρων τους είναι 40.

27. Να βρείτε τη γεωμετρική πρόοδο (α_ν), εάν :

α. $\frac{S_{10}}{S_5} = 33$, $\alpha_1 = 2$.

β. $S_3 = 26$ και η διαφορά $\alpha_4 - \alpha_1 = 52$.

28. Να βρείτε το άθροισμα $\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{\nu^3} + \ldots$, αν $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 2$.

29. Να βρείτε τα αθροίσματα :

α. $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{8} + \ldots$

β. $6 - 1 + 3 - \frac{3}{4} + \frac{3}{2} - \frac{9}{16} + \frac{3}{4} - \frac{27}{64} + \ldots$

γ. $\frac{2}{5} + 1 + \frac{4}{25} - \frac{1}{2} + \frac{8}{125} + \frac{1}{4} + \frac{16}{625} - \frac{1}{8} + \ldots$

δ. $\frac{2}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^4} + \ldots$

30. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α. $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^x = 2046$

β. $1 + x + x^2 + \ldots = 5$ με $0 < x < 1$

γ. $x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4}$ με $|x| < 1$

δ. $1 + |x| + |x^2| + |x^3| + \ldots = 5$ με $|x| < 1$

ε. $2^{x+x^2+x^3+\ldots} = 2\sqrt{2}$ με $|x| < 1$

32. Α. Αν α_ν, β_ν δύο γεωμετρικές πρόοδοι με λόγους λ_1, λ_2 αντίστοιχα και για κάθε ν είναι $\beta_\nu \neq 0$, εξετάστε σε ποια περίπτωση σχηματίζεται γεωμετρική πρόοδος.

α. $\alpha_{2\nu+1}$ **β.** $|\alpha_\nu|$

γ. $2\alpha_\nu + 3$ **δ.** $(\alpha_\nu)^2$

ε. $\frac{1}{\beta_\nu}$

στ. $\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \sqrt{\alpha_3}, \ldots$ (όπου $\alpha_\nu > 0$)

ζ. $\alpha_\nu \pm \beta_\nu$ **η.** $2\alpha_\nu + 3\beta_\nu$

θ. $\alpha_\nu \cdot \beta_\nu$ **ι.** $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$

Β. Στις περιπτώσεις που σχηματίζεται γεωμετρική πρόοδος, να βρείτε τον αντίστοιχο λόγο λ.

33. Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο, α_μ και α_κ είναι οι όροι τάξεως μ και κ αντίστοιχα. Τότε ισχύει: $\alpha_\mu = \lambda^{\mu-\kappa} \cdot \alpha_\kappa$, $\mu, \kappa \in \mathbb{N}$.

34. α. Σε μια γεωμετρική πρόοδο έχουμε $\alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_3$. Να βρεθεί ο λόγος της.

β. Αν α, β, γ, δ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να απλοποιήσετε την παράσταση :

$$\Pi = (\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\beta - \delta)^2 - (\alpha - \delta)^2$$

35. Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = 3 \cdot 2^\nu$.

α. Να βρεθεί ο όρος $\alpha_{\nu+1}$.

β. Να δειχθεί ότι αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρεθεί ο λόγος λ, καθώς και ο πρώτος της όρος α_1.

γ. Ποιος όρος της είναι ίσος με 3072;

36. Δίνεται η ακολουθία με $S_ν = 2\cdot(3^ν - 1)$.

α. Να βρεθεί το $S_{ν-1}$.

β. Να βρεθεί το $α_ν$.

γ. Να βρεθεί το $α_{ν+1}$.

δ. Να δειχθεί ότι αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρεθεί ο λ και ο $α_1$.

ε. Πόσους όρους της πρέπει να πάρουμε, για να έχουμε άθροισμα 484;

37. Δίνεται ο μεικτός περιοδικός $0,\overline{27} = 0,272727...$

α. Να γραφτεί σαν άθροισμα κλασμάτων με παρονομαστές δυνάμεις του 10.

β. Να γραφτεί στη μορφή $\frac{κ}{λ}$, όπου κ, λ φυσικοί αριθμοί.

38. Ένας ασθενής παίρνει δόση των 10mg ενός φαρμάκου κάθε 4ωρο. Στο χρονικό αυτό διάστημα διασπάται το $\frac{1}{4}$ της ποσότητας του φαρμάκου που βρίσκεται στην αρχή του 4ωρου στο αίμα του ασθενούς, ενώ το υπόλοιπο παραμένει στο αίμα του.

α. Να βρείτε την ποσότητα του φαρμάκου που έχει στο αίμα του ο ασθενής μόλις πάρει τη $2^η$ δόση του φαρμάκου.

β. Να βρείτε την ποσότητα του φαρμάκου που έχει στο αίμα του ο ασθενής στο τέλος του $1^{ου}$ 12 ώρου.

γ. Αν είναι γνωστό ότι, όταν η ποσότητα του φαρμάκου στο αίμα του ασθενού υπερβεί τα 50mg, παρουσιάζονται επικίνδυνες παρενέργειες, δείξτε ότι ο ασθενής δεν κινδυνεύει ακόμη και με ισόβια λήψη του φαρμάκου.

δ. Ποια είναι η ποσότητα της επικίνδυνης δόσης;

39. **α.** Να συγκρίνετε τον αριθμητικό και τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών 2, 8 .

β. Δείξτε ότι η σχέση που θα βρείτε ισχύει γενικά, για κάθε ζεύγος θετικών x, y .

40. Αν α, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, τότε να αποδείξετε ότι οι $\frac{1}{\alpha-\beta}, \frac{1}{\alpha-\gamma}, \frac{1}{\alpha+\beta}$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

41. Να βρείτε τρεις ακέραιους αριθμούς, για τους οποίους ισχύουν τα εξής :

α. Είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β. Αν αυθηθεί ο 2ος κατά 8, η πρόοδος γίνεται αριθμητική.

γ. Αν αυθηθεί ο 3ος κατά 64, γίνεται πάλι γεωμετρική.

42. Να βρείτε τρεις αριθμούς για τους οποίους ισχύουν τα εξής :

α. Είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β. Έχουν άθροισμα 15.

γ. Αν σ' αυτούς προσθέσουμε τους αριθμούς 1, 4, 19 αντίστοιχα θα γίνουν διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

43. Να βρείτε τρεις ακέραιους αριθμούς για τους οποίους ισχύουν τα εξής :

α. Είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β. Ελαττώνοντας τον 3ο κατά 4 γίνονται διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

γ. Ελαττώνοντας τον 2ο και τον 3ο όρο της αριθμητικής προόδου κατά 1 σχηματίζεται πάλι γεωμετρική πρόοδος.

44. Να βρείτε τέσσερις ακέραιους αριθμούς για τους οποίους ισχύουν τα εξής :

α. Οι τρεις πρώτοι είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β. Οι τρεις τελευταίοι είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

γ. Το άθροισμα των άκρων όρων είναι 14 και των μεσαίων όρων 12.

45. Ο Πέτρος γιορτάζοντας τα 12^{α} γεννέθλιά του, ζήτησε από τους γονείς του για δώρο 1500 € και για κάθε επόμενα γεννέθλια να του αυξάνουν το ποσό κατά 300 € μέχρι να γιορτάσει τα 21^{α} γεννέθλιά του. Ο πατέρας του αντιπρότεινε το εξής: «Θα σου δώσω τώρα 50 € και κάθε επόμενα γεννέθλιά σου θα σου διπλασιάζω το προηγούμενο ποσό». Ο Πέτρος σκέφτηκε λίγο και απέρριψε την πρόταση του πατέρα του, πιστεύοντας ότι όταν θα γιορτάζει τα 18^{α} γεννέθλιά του, με τη δική του πρόταση, θα πάρει περισσότερα χρήματα.

α. Δικαιολογήστε γιατί συμφωνείτε ή διαφωνείτε με την άποψη του Πέτρου.

β. Πόσα χρήματα θα πάρει με τη δική του πρόταση έως και τα 21^{α} γεννέθλιά του και πόσα θα έπαιρνε με την πρόταση του πατέρα του;