Η ΕΞΙΣΩΣΗ
$\alpha x + \beta = 0$

1. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

α. $\frac{x+1}{3}=\frac{x+10}{6}-3$

β. $(x+1)^2+(x-1)^2=2(x^2+1)$

γ. $(3x+2)^2-24x=(3x-2)^2$

δ. $(x-7)^2-2x+1=x^2-3$

ε. $2(x-2)^2+(x+4)(x-4)+8=3x(x+1)-11x$

στ. $(x-7)^2-2x+1=x^2-3$

ζ. $(2x-3)^2=(x-1)(x-4)+9x$

2. Ομοίως :

α. $(3x+5)^2-(9x^2-25)+6x+10=0$

β. $2(x+1)(x-2)-(x+1)(2x-1)=4$

γ. $x^2\cdot(x-4)+2x\cdot(x-4)+x-4=0$

δ. $x\cdot(x^2-1)-x^3+x^2=0$

ε. $(x^2-4)\cdot(x-1)=(x^2-1)\cdot(x-2)$

στ. $x^3-2x^2-x+2=0$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α. $\frac{x+2}{3}-\frac{2x+1}{2}=\frac{2x-3}{6}-x$ **β.** $\frac{2x}{x-3}=\frac{-6}{x-3}+2$

γ. $\frac{x+1}{x^2+x}-\frac{2}{x}=\frac{-x}{(x+1)^2}$ **δ.** $\frac{1}{x+2}=\frac{x}{x^2-4}$

ε. $\frac{5x-16}{6}-\frac{x+1}{3}=-\frac{x+8}{12}$ **στ.** $\frac{x}{x-1}=\frac{1}{x^2-x}$

ζ. $\frac{x+1}{x^2-1}+\frac{2}{x^2-2x+1}=0$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ

4. Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ να λυθούν οι εξισώσεις :

α. $(\lambda-1)x=\lambda^2-1$ **β.** $(\lambda^2-9)x=\lambda^2+3\lambda$

γ. $\lambda^2(x-2)-3\lambda=x+1$ **δ.** $(\lambda^3-16\lambda)x=\lambda^2-4\lambda$

ε. $3(\lambda+1)x+4=2x+5(\lambda+1)$

στ. $(\lambda^2-1)x=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)$

ζ. $\lambda^2x-\lambda^2=9x+3\lambda$ **η.** $3\lambda x+3x=2x+5(\lambda+1)$

θ. $\lambda x-\lambda^2=25-5x$ **ι.** $\lambda^2x-2=4x+\lambda$

ια. $\frac{\lambda x-1}{2}=\frac{x+7}{3}$ **ιβ.** $\lambda x+\lambda^2=\lambda$

ιγ. $\lambda^2(x-1)=3\lambda+2$ **ιδ.** $\lambda(\lambda x+1)=2(2x-1)$

ιε. $\lambda^2x+6\lambda-9=\lambda^2+9x$ **ιστ.** $\lambda^2x-\lambda^2=9x-5\lambda+6$

4. Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού μ να λυθούν οι εξισώσεις :

α. $\mu^2(x-3)=\mu x-3$ **β.** $\mu^2x+3=3x+\mu$

γ. $\mu^2x+1=\mu(x+1)$ **δ.** $(\mu+5)(\mu-3)x=\mu-3$

ε. $(\mu^2-3\mu+2)x=\mu-1$ **στ.** $(\mu^3-4\mu)x=\mu(\mu+2)$

ζ. $\mu^2-\mu^3x=4+8x$ **η.** $\mu(x-\mu)=x-1$

θ. $\mu(x+4-\mu)=3(x+1)$ **ι.** $(\mu+1)x=2(\mu^3+1)$

ια. $\mu^2x+2=4x+\mu$ **ιβ.** $\mu^2x+3\mu=\mu^2+9x$

ιγ. $4\mu^2x=4\mu+9x$

ιδ. $(\mu+2)x+4(\mu+1)=\mu^2+4(x-1)$

6. Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ να λυθούν οι εξισώσεις :

α. $\lambda(\lambda x-1)+x=0$ **β.** $\lambda(\lambda x-4)=\lambda^2+16x$

γ. $\lambda^2(x-1)=\lambda(5x-2)-6x$

δ. $\frac{x+\lambda}{5}=\frac{\lambda x-1}{15}+\frac{\lambda^2-4\lambda+5}{3}$ **ε.** $\frac{x+3}{\lambda}+\frac{x-\lambda}{3}=\frac{\lambda^2-4}{3\lambda}$

7. Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α να λυθεί η εξίσωση :

$$\alpha^3 x - \alpha^2 = 6\alpha x - 4 - \alpha^2 x$$

8. Για τις διάφορες τιμές των λ και μ να λυθούν οι εξισώσεις :

α. $\lambda(x-1) = x + 2\mu - 7$ **β.** $(\lambda-\mu)x = \lambda^2 - (\lambda+\mu)x$

γ. $\lambda(x-1) = x + 2\mu - 6$ **δ.** $(\lambda-\mu)x = \lambda^2 - (\mu+\lambda)x$

ε. $\lambda(x-1) = x + \mu - 3$

στ. $\lambda(2x+\lambda) + 7 - 2\lambda = \lambda^2 + 3(1+\mu x)$

9. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση :

$$(\lambda+7)x + 3(2\lambda-1) = 3(3x+1) + \lambda(\lambda+1)$$

να έχει ως μοναδική λύση το μηδέν.

10. Δίνεται η εξίσωση: $\lambda x + \kappa = \frac{3x+2\lambda\kappa}{3}+\frac{1}{2}$. Να βρείτε τις τιμές των λ και κ για τις οποίες η εξίσωση είναι:

α. αδύνατη **β.** ταυτότητα.

11. Αν η εξίσωση : $\lambda(\lambda x-1) = 4(x-1)$ είναι αδύνατη, να βρείτε τον αριθμό $\lambda \in$ Ρ.

12. Αν η εξίσωση :

$$\frac{(\lambda-1)x}{3}+\frac{\mu}{6}=\frac{2(x+1)}{3}+\frac{\mu-2}{5}$$

είναι ταυτότητα, να βρείτε τα λ, μ $\in$Ρ.

13. Αν η εξίσωση :

$$\frac{x+2\lambda}{3}+2=\frac{x}{2}+\frac{\lambda-2x}{6}$$

έχει ρίζα τον αριθμό 3 , να βρείτε το $\lambda \in$Ρ.

14 Εστω δύο πραγματικοί αριθμοί λ και μ ώστε $\lambda + \mu = 1$.

α. Να βρεθεί η τιμή του μ ώστε η εξίσωση $\lambda x - 2\mu = 4x + 6$ να είναι αόριστη ως προς x.

β. Για την τιμή αυτή του μ να υπολογιστεί το λ.

15. Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in P$ ώστε η εξίσωση $\lambda^2 x - \lambda^2 = -\lambda - 2 + x$ να έχει μοναδική λύση το μηδέν.

16. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση :

$$(\lambda - 2)\cdot x = (\lambda - 2)\cdot(\lambda + 2)$$

να έχει μοναδική λύση το 2.

17. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in P$ ώστε η παρακάτω εξίσωση να είναι αόριστη : $(\lambda^2 - 4)\cdot x = \lambda^2 - 3\lambda + 2$.

18. Να βρείτε τη σχέση των α, β ώστε η εξίσωση :

$$(x + \alpha)^2 = (x - \beta)^2 + 2\alpha(\alpha + \beta)$$

α. να έχει μοναδική λύση **β.** να είναι αόριστη.

19. Δίνεται η εξίσωση : $(x + \alpha)^2 + (x + \beta)^2 = 2\alpha(\alpha + \beta)$

α. Να λυθεί.

β. Ποιο από τα παρακάτω είναι σωστό.

- Είναι αόριστη για κάθε $\alpha, \beta \in P$.
- Έχει τουλάχιστον μια λύση για κάθε $\alpha, \beta \in P$.
- Είναι αδύνατη για $\alpha = -\beta$.
- Έχει ακριβώς μια λύση για κάθε $\alpha, \beta \in P$.

20. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α. $\alpha^2(x - 1) - 4(x + \alpha) = 4$ **β.** $\alpha - x = 1 - \alpha^2 x$

γ. $\dfrac{\alpha + x}{\beta + x} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ $(\alpha, \beta \in P^*)$ **δ.** $\alpha^2 x^2 + 1 = 2\alpha x$ $(\alpha \in P)$

ε. $(x - 1)^2 + (\alpha - x)^2 = 0$ $(\alpha \in P)$

21. **α.** Να λυθεί η εξίσωση:

$$(x - 1)^2 + (\alpha x - 2)^2 + (\beta - 1)^2 + (\beta x - 1)^2 = 0.$$

β. Ποιο από τα παρακάτω είναι σωστό:

- Έχει δύο λύσεις όταν $\beta = 1$ και $\alpha \in P$.
- Έχει μια λύση όταν $\beta = 2$ και $\alpha = 1$.
- Έχει μια λύση όταν $\beta = 1$ και $\alpha = 2$.

- Έχει μια λύση για κάθε α, β∈Ρ.

22. Δίνονται οι εξισώσεις :

(1) $(\lambda - 2)x = \lambda^2 - 4$

(2) $\lambda^2 x(x + 1) - 2(2x - 1) = \lambda(\lambda x^2 + 1)$

(3) $\lambda^2 x(x + 1) - 2(2x + 1) = \lambda(\lambda x^2 + 1)$

Να αποδείξετε ότι :

α. Αν η (1) αληθεύει για κάθε x (ταυτότητα), τότε το ίδιο συμβαίνει και για τη (2).

β. Αν η (3) είναι αδύνατη, τότε η (1) είναι ταυτότητα.

23. Να λυθεί η εξίσωση $(x - 1)^2 + \lambda(\mu x + 1) = \mu x^2 + 2$ όπου μ η ρίζα της εξίσωσης $(x - 1)^2 + (x^2 - 1)^2 = 0$.

ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

24. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

α. $|7x-3| = |9x+5|$ **β.** $|1-5x| = 7$

γ. $2|x-3| = 5$ **δ.** $\frac{|x|+2}{3} + \frac{3-2|x|}{4} = 1$

ε. $\frac{|x+3|-1}{2} - |x+3| = 1 - \frac{7-|x+3|}{3}$

στ. $\big|1-|x|\big| = 0$ **ζ.** $|x+2| + 1 = 0$

η. $\big||x-1|+3\big| = 1$ **θ.** $x^2 - 3|x| + 2 = 0$

25. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

α. $2 - (|x-1| + 3) = 0$ **β.** $|x| + \frac{|x|+9}{8} = 20$

γ. $3x + |1-x| = 3 - x$ **δ.** $4|1-4x| + 5 = x + 2$

ε. $|x+1| + |x-5| = 20$

26. Να λυθεί η εξίσωση : $\frac{|x-3|-1}{5} - \frac{|x-3|}{2} = \frac{4|x-3|-13}{3}$.

27. Να λυθεί η εξίσωση : $|x| + x^3 = 0$.

28. Να λυθεί η εξίσωση : $|x^5 + 3| + 3 = 0$.

29. Να λυθεί η εξίσωση : $\left|\dfrac{x+2}{x-3} - 1\right| = 2$.

30. Να λυθεί η εξίσωση : $|9 - d(x,3)| = 2$.

31. Να λυθεί η εξίσωση : $|x^2 - 9| + |x^2 - 5x + 6| = 0$.

32. Να λυθεί η εξίσωση : $|x - 3| + |x^2 + 3x| = 0$.

33. Να λυθεί η εξίσωση : $(x + 1)^2 - 5|x+1| + 6 = 0$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

34. Ένας χυμός φρούτων έχει περιεκτικότητα σε φυσικό χυμό πορτοκάλι 60%. Προσθέτουμε στην αρχική ποσότητα του χυμού 50 ml φυσικό πορτοκάλι οπότε η περιεκτικότητα του χυμού σε φυσικό πορτοκάλι αυξάνεται στο 70%. Ποια ήταν η αρχική ποσότητα του χυμού;

35. Τρεις μαθητές Α, Β, Γ ρωτούν τον καθηγητή των μαθηματικών τους για το βαθμό που προτίθεται να τους βάλει στο τέλος του τετραμήνου και αυτός τους απαντά:

«Ο Β έχει το 1/2 του βαθμού που έχει ο Α και δύο βαθμούς παραπάνω, ο Γ έχει τα 5/4 του βαθμού του Α ενώ το άθροισμα των βαθμολογιών σας είναι 46».

Να βρεθεί ο βαθμός του κάθε μαθητή.

36. Τρεις διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί έχουν άθροισμα 45. Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί.

37. Ένας αριθμός είναι ίσος με το δεκαπλάσιο του αντιστρόφου του αυξημένο κατά 3. Να βρείτε τον αριθμό αυτό.

38. Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 32 cm. Να βρείτε τις διαστάσεις του αν γνωρίζετε ότι η μια είναι τριπλάσια από την άλλη.

(Mathematica .gr)

Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^{\nu} = \alpha$

1. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α. $x^3 - 64 = 0$ **β.** $x^6 + 64 = 0$

γ. $x^4 - 625 = 0$ **δ.** $x^5 + 1024 = 0$

ε. $x^{2013} - 1 = 0$ **στ.** $x^{2013} + 1 = 0$

ζ. $x^2 - 196 = 0$ **η.** $x^3 + 512 = 0$

2. Ομοίως:

α. $27x^3 - 1 = 0$ **β.** $2x^5 + 64 = 0$

γ. $125x^2 - 25 = 0$ **δ.** $49x^2 + 36 = 0$

ε. $64x^3 - 125 = 0$ **στ.** $-1000x^3 - 1 = 0$

3. Ομοίως:

α. $x^7 + 125x^4 = 0$ **β.** $216x^3 - x^6 = 0$

γ. $4x^5 - 100x^3 = 0$ **δ.** $18x^6 - 36x^4 = 0$

ε. $3x^{11} - 21x^9 = 0$ **στ.** $2x^8 + 128x^6 = 0$

4. Ομοίως:

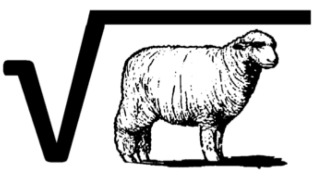
α. $(x-2)^4 = 81$ **β.** $(2x+10)^3 = 125$

γ. $(x+1)^5 + 32 = 0$ **δ.** $(1-x)^4 = 8(1-x)$

ε. $(2x-4)^4 - 64(x-2) = 0$

στ. $(x-3)^4 - (3-x)^2 = 0$

(1 - 4 βασισμένες στο βιβλίο της Άλγεβρας Α΄ Λυκείου - ΙΤΥΕ 2012)



ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
2ου ΒΑΘΜΟΥ

1. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α. $2x^2 - 2 = 3x$ **β.** $4x^2 = 12x - 9$

γ. $1 + x + x^2 = 0$ **δ.** $(x + 5)^2 - 121 = 0$

ε. $(x + 3)^2 - (x + 3)(x + 4) = 5x(x + 3)$

2. Ομοίως:

α. $x^2 - 121 = 0$ **β.** $x^2 - 13 = 0$

γ. $x^2 + 25 = 0$ **δ.** $9x^2 - 36 = 0$

ε. $5x^2 - 45 = 0$ **στ.** $2x^2 - 72 = 0$

3. Ομοίως:

α. $x^2 - 33x = 0$ **β.** $10x^2 - 7x = 0$

γ. $16x - 4x^2 = 0$ **δ.** $x^2 = x$

ε. $-15x^2 - 12x = 0$ **στ.** $8x^2 - 64x = 0$

4. Ομοίως:

α. $4x^2 - 2(\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = 0$

β. $x^2 - (1 - \sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$

γ. $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$

δ. $x^2 - \frac{4+\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3} = 0$

ε. $x^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}x + 1 = 0$

5. Να λυθεί η εξίσωση : $\alpha x^2 - x + 1 = 2\alpha x - 1$.

6. Αν η εξίσωση $(2x - 3)|\lambda| + 3 = 2\lambda^2 x$ έχει ως ρίζα τον αριθμό 2, να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ.

7. Αν ο αριθμός $\rho = \alpha + \beta$ είναι ρίζα της εξίσωσης :

$$2x^2 - 2x + (2 - 6\alpha\beta) = 0$$

να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης.

8. Δίνεται η εξίσωση : $\lambda x^2 + 5x + 10 = 0$.

α. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες;

β. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα;

γ. Να βρεθεί η διπλή ρίζα του παραπάνω ερωτήματος.

9. Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού μ η εξίσωση :

$$x^2 - 2(2\mu + 1)x + 5\mu^2 + 4\mu - 3 = 0$$

έχει ρίζες πραγματικές;

10. Να βρεθεί το $\lambda \in R$ ώστε η εξίσωση:

$$3x^2 - 4x - (5\lambda + 2) = 0$$

να έχει ρίζες:

α. πραγματικές και άνισες

β. πραγματικές και ίσες

γ. μη πραγματικές

11. Να βρεθούν τα $\lambda \in R$, ώστε οι παρακάτω εξισώσεις να έχουν δύο ρίζες ίσες:

α. $x^2 - 2(\lambda - 4)x + \lambda^2 - 3\lambda + 5 = 0$

β. $2\lambda x^2 - (5\lambda + 2)x + 4\lambda + 1 = 0$

12. Να βρεθεί το είδος των ριζών των παρακάτω εξισώσεων:

α. $x^2 - (2\alpha - 1)x - 1 + \alpha = 0$ →

β. $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 = (\beta + \gamma)^2$

13. Να λυθούν οι εξισώσεις, για τις διάφορες τιμές των πραγματικών α, β, γ :

α. $(\alpha^2 + \beta^2)\, x^2 - 2\alpha\beta x + \alpha^2\beta^2 = 0$

β. $\beta^2 x^2 - 2\alpha\beta^2 x + \alpha^2\beta^2 - 1 = 0$

γ. $\beta\gamma\, x^2 - (\alpha\beta + \alpha\gamma - 2\beta\gamma)\, x + \alpha^2 + \beta\gamma = \alpha(\beta + \gamma)$

14. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις, αν $\alpha, \beta \in R$:

α. $\dfrac{\alpha^2}{(x-\alpha)^2} = \dfrac{\beta^2}{(x+\beta)^2}$

β. $\dfrac{(\alpha-x)^2-(x-\beta)^2}{(\alpha-x)(x-\beta)} = \dfrac{4\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}$

γ. $\dfrac{\alpha}{\alpha x-1} + \dfrac{\beta}{\beta x-1} = \dfrac{\alpha+\beta}{(\alpha+\beta)x-1}$

15. Αν $\mu^2 > \nu^2 > 0$, να δειχθεί ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν το ίδιο είδος ριζών:

$$\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0 \quad \text{και} \quad \alpha x^2 + 2\mu\beta x + \gamma\nu = 0$$

16. Να δειχθεί ότι η παρακάτω εξίσωση έχει πάντοτε ρίζες πραγματικές:

$$3(\alpha + \beta + \gamma)\, x^2 + 4(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\, x + 4\alpha\beta\gamma = 0$$

17. Αν $\alpha < \beta < \gamma < \delta$, να δειχθεί ότι η εξίσωση:

$$(x - \alpha)(x - \gamma) + \lambda(x - \beta)(x - \delta) = 0$$

έχει ρίζες πραγματικές, για κάθε $\lambda \in R$.

18. Να βρεθεί το $\lambda \in R$, ώστε η εξίσωση :

$$(x + 1)\, \lambda^2 - (5x + 7)\, \lambda + 3(2x + 5) = 0$$

α. να έχει τουλάχιστον δύο ρίζες.

β. να είναι αδύνατη.

γ. να έχει μοναδική ρίζα το μηδέν.

19. Δίνεται η εξίσωση : $4x^2 - 12x + 9 = 0$ με ρίζες x_1, x_2.

α. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$x_1 + x_2\,,\quad x_1 \cdot x_2\,,\quad x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2$$

χωρίς να λύσετε την εξίσωση.

β. Να κατασκευάσετε εξίσωση με ρίζες κx_1, κx_2 όπου $\kappa \in R^*$.

20. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + x + \lambda - 1 = 0$ με ρίζες x_1, x_2. Να βρείτε για ποια τιμή του λ είναι : $x_1x_2 + 3x_1 + 3x_2 + 5 = 0$.

21. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού λ για να είναι οι ρίζες της εξίσωσης $3x^2 + 2x + 3(\lambda - 7) = 0$:

α. θετικές **β.** ετερόσημες **γ.** ίσες

22. Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση : $x^2 - 2x + \lambda + 2 = 0$ έχει :

α. 2 ρίζες ετερόσημες

β. 2 ρίζες θετικές και άνισες

γ. 2 ρίζες αρνητικές

23. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού λ , ώστε οι ρίζες της εξίσωσης $2x^2 - (\lambda - 4)x + \lambda - 8 = 0$ να είναι :

α. αντίθετες **β.** αντίστροφες

24. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού λ , ώστε οι ρίζες της εξίσωσης :

$$(\lambda + 3)x^2 - (5\lambda + 1)x + 7\lambda^2 + 3 = 0$$

να είναι αντίστροφες.

25. **α.** Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x + \lambda - 1 = 0$ να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ , έτσι ώστε να ισχύει :

$$3x_1^3 + 8x_1x_2^2 + 8x_1^2x_2 + 3x_2^3 = 192$$

β. Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 5x + \lambda - 9 = 0$ να βρεθεί ο πραγματικός λ , έτσι ώστε να ισχύει :

$$4\rho_1^3 + 9\rho_1\rho_2^2 + 9\rho_1^2\rho_2 + 4\rho_2^3 = 48$$

26. Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ να βρεθεί εξίσωση που να έχει ως λύσεις τις :

α. $x_1 = \rho_1 + 3\rho_2$ και $x_2 = \rho_2 + 3\rho_1$

β. $x_1 = \dfrac{\rho_1}{\rho_2^2}$ και $x_2 = \dfrac{\rho_2}{\rho_1^2}$

27. Αν ρ_1, ρ_2 ($\rho_1 \neq \rho_2$) είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ να βρεθούν οι παραστάσεις : $\left|\rho_1 - \rho_2\right|$ και $\left|\rho_1^2 - \rho_2^2\right|$.

28. Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 2\alpha x + \beta = 0$, να βρεθεί η $2^{\text{βάθμια}}$ εξίσωση, με ρίζες:

$$\rho_1 = 2(x_1 + x_2) \quad \text{και} \quad \rho_2 = 3x_1 \cdot x_2$$

29. Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 4\alpha x + 2\beta = 0$, να βρεθεί η $2^{\text{βάθμια}}$ εξίσωση, με ρίζες:

$$\rho_1 = \frac{1}{x_1^2} \quad \text{και} \quad \rho_2 = \frac{1}{x_2^2}$$

30. Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 6x + 5 = 0$, να βρεθεί η $2^{\text{βάθμια}}$ εξίσωση, με ρίζες:

$$\rho_1 = \frac{x_1 + 3}{x_2 + 3} \quad \text{και} \quad \rho_2 = \frac{x_2 + 3}{x_1 + 3}$$

31. Να κατασκευαστεί η εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού, της οποίας οι ρίζες x_1 , x_2 να ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 = 8 \quad \text{και} \quad \frac{x_1 \cdot x_2}{9} = \frac{x_1 + x_2}{7}$$

32. Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης :

$$x^2 + (\kappa + 4)\,x + \kappa^2 - 2\kappa - 5 = 0$$

να βρεθεί μια σχέση, μεταξύ των x_1, x_2 , η οποία να είναι ανεξάρτητη του κ .

33. Να βρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη, μεταξύ των α, β της εξίσωσης $x^2 + \alpha x + \beta = 0$, ώστε οι ρίζες της ρ_1 , ρ_2 να ικανοποιούν τη σχέση: $\kappa \cdot \rho_1 + \lambda \cdot \rho_2 = \mu$.

34. Να σχηματιστεί εξίσωση 2ου βαθμού τέτοια, ώστε οι ρίζες της να είναι τα αντίστροφα των κύβων των ριζών της εξίσωσης: $x^2 - 2\alpha x + \beta = 0$.

ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΕ ΕΞΙΣΩΣΗ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

35. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $3x^2 + 2|x| - 1 = 0$

β. $\dfrac{2}{|x|} = \dfrac{|x|}{2} + \dfrac{3}{2}$

γ. $(x + 3)^2 - 4|x+3| = 5$

δ. $|x + 5| = -x^2 + 3x - 6$ →

36. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $x^4 - x^2 - 12 = 0$

β. $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

γ. $(x^2 + 3x - 2)^6 - 9(x^2 + 3x - 2)^3 + 8 = 0$

δ. $(\omega^2 - 3\omega + 1)^2 - 10(\omega^2 - 3\omega - 3) - 51 = 0$

ε. $(x + 2)^8 - 3(x + 2)^4 - 4 = 0$

στ. $(x^3 - 11x + 12)^4 - 3(x^3 - 11x + 12)^2 - 4 = 0$

ζ. $\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2 - 5\left(\dfrac{x-1}{x}\right) + 6 = 0$

η. $x - \sqrt{x} = 20$

37. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α. $\dfrac{x+3}{x-3} + \dfrac{x-3}{x+3} = \dfrac{10}{3}$

β. $\dfrac{2}{x^2-4} - \dfrac{1}{x^2-2x} = \dfrac{4-x}{x^2+2x}$

γ. $\dfrac{7}{x-4} - \dfrac{4}{x-6} = \dfrac{2}{x+2}$

δ. $\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=2x-\frac{1}{9}$

38. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α. $x^4 - (\alpha+1)x^2 + \alpha = 0$ **β.** $x^4 - 3\alpha^2x^2 - 4\alpha^4 = 0$

39. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $4\text{συν}^2x - 2(1+\sqrt{3})\text{συν}x + \sqrt{3} = 0$

β. $3\text{εφ}^2x - (3+\sqrt{3})\text{εφ}x + \sqrt{3} = 0$

ΔΙΑΦΟΡΕΣ

40. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x - 2(\alpha\beta - 1) = 0$. Αν η εξίσωση έχει ως ρίζα τον αριθμό $\alpha + \beta$, τότε να αποδείξετε ότι : $\alpha = \beta = 1$.

41. Αν οι αριθμοί α, γ είναι ετερόσημοι να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

42. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό 1.

43. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση :

$$3x^2 + 2(\alpha+\beta+\gamma)x + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) = 0$$

έχει μια διπλή ρίζα αν και μόνο αν $\alpha = \beta = \gamma$.

44. Αν ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ να αποδείξετε ότι : $|\rho|^2 \le |\alpha||\rho| + |\beta|$.

45. Να αποδείξετε ότι αν η εξίσωση :

$$(2\alpha - \beta)x^2 - 4\alpha x + 4\beta = 0$$

έχει διπλή ρίζα, τότε η εξίσωση :

$$(\alpha^2 + \beta^2)x^2 - 2x + 3(\alpha - \beta) = 0$$

έχει δύο ρίζες άνισες.

46. Να βρεθεί το λ ώστε το τριώνυμο $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 5\lambda + 8$ να είναι τέλειο τετράγωνο.

(Mathematica.gr / Διάφορες φωτοτυπίες)