

ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ & ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ



1. Για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις ;

α. $\frac{5x-9}{5-x}$

β. $\frac{1-x}{2x^2-x}$

γ. $\frac{13}{9-x^2}$

δ. $\frac{7+x}{3x^2-12x}$

ε. $\frac{3}{x-\frac{3x}{x-1}}$

στ. $\frac{2011}{x^2-3x-18}$

2. Να υπολογιστούν οι παρακάτω παραστάσεις :

$$A = \frac{7}{12} - \frac{1}{7 + \frac{1}{5}} \qquad B = \frac{1 - \frac{1}{3}}{2 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}}$$

3. Να γίνουν οι πράξεις:

α. $3[2(1-4x) + 3(1-5x)] - 2[3(1-2x) - x]$

β. $-3[-2\beta + \alpha(1-2\beta)] - [3\alpha - (4\beta - 5)]$

4. Αν $\alpha = -\frac{1}{2}$ και $\beta = 0,001$ να υπολογίσετε την παράσταση:

$$3(2\alpha - 3\beta) - 4[-3\alpha + 2(\alpha + 2\beta - 1)]$$

5. Να δείξετε ότι οι παραστάσεις :

$$A = 3 - 8x\left(\frac{x}{2} - 5\right) \quad \text{και} \quad B = 2\left[4x + 2(8x - x^2) - \frac{3}{2}\right]$$

είναι αντίθετες.

6. Να δείξετε ότι οι παρακάτω παραστάσεις είναι αντίστροφες :

$$A = x - \frac{x-1}{2} \quad \text{και} \quad B = \frac{2 - \frac{2}{x}}{x - \frac{1}{x}}$$

ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

7. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ με $\beta\delta \neq 0$ να αποδείξετε ότι : $\frac{3\alpha - \gamma}{3\beta - \delta} = \frac{\alpha}{\beta}$.

8. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ με $\beta\delta \neq 0$ τότε να δείξετε ότι : $\frac{\kappa\alpha + \lambda\beta}{\rho\alpha + \nu\beta} = \frac{\kappa\gamma + \lambda\delta}{\rho\gamma + \nu\delta}$.

9. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ($\beta\delta \neq 0$ και $\beta + \delta \neq 0$) να δείξετε ότι : $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} = \left(\frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}\right)^2$.

10. Αν $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{3} = \frac{\gamma}{4}$ και $\alpha + \beta + \gamma = 18$ τότε να υπολογιστούν τις τιμές των α, β, γ .

11. Η περίμετρος ενός τριγώνου είναι 27. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του, αν είναι γνωστό ότι είναι ανάλογες με τους αριθμούς : 2, 3, 4.

12. Αν $\frac{x}{\alpha + \beta - \gamma} = \frac{y}{\beta + \gamma - \alpha} = \frac{z}{\alpha + \gamma - \beta}$, να αποδείξετε ότι :

$$(\alpha - \beta)x + (\beta - \gamma)y + (\gamma - \alpha)z = 0$$

13. Αν $\frac{\psi + \omega}{\alpha\psi + \beta\omega} = \frac{\omega + \chi}{\alpha\omega + \beta\chi} = \frac{\chi + \psi}{\alpha\chi + \beta\psi}$ και $\chi + \psi + \omega \neq 0, \alpha + \beta \neq 0$ να δείξετε ότι καθένας από τους λόγους αυτούς ισούται με $\frac{2}{\alpha + \beta}$.

14. Αν $\frac{\kappa}{x} = \frac{\lambda}{y} = \frac{\mu}{z}$ και $\frac{x^2}{\alpha^2} = \frac{y^2}{\beta^2} = \frac{z^2}{\gamma^2}$ να δείξετε ότι :

$$\frac{\kappa^2}{\alpha^2} + \frac{\lambda^2}{\beta^2} + \frac{\mu^2}{\gamma^2} = \frac{\kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

15. Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις :

α. $a^3 \cdot a^2 \cdot a$

β. $x^5 : x^3$

γ. $(-2)^3 \cdot (-2)^{-4}$

δ. $(-0,2)^5 \cdot (-0,5)^5$

ε. $a^{-4} \cdot (a^2)^{-4} \cdot a$

16. Υπολογίστε τις παραστάσεις :

α. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

β. $(-2)^3 \cdot (-0,5)^{-2}$

γ. $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot (0,1)^{-3}\right] : (-10)^2$

17. Να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις :

α. $\left(\frac{x^2y}{xy^3}\right)^{-2} \cdot (xy)^2$

β. $8x^4y^{-1} : [(2x^3y^2) \cdot x^0]$

18. Να υπολογίσετε την παράσταση : $\left(\frac{7x^2}{-3y^4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{9y^2}{49x^4}\right)^{-2}$

19. Αν n είναι ακέραιος θετικός αριθμός, τότε να υπολογίσετε την παράσταση :

$$A = (-1)^n + 3 \cdot (-1)^{n+1} - 3 \cdot (-1)^{3n+1}$$

20. Για $v = 2$ να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις :

$$A = (-1)^{10v} - (-1)^{3v-1} - (-1)^{2-3v} - (-1)^{v-2}$$

$$B = (-2)^{4-v} - (-2)^{3-v} + \left(-\frac{3}{v}\right)^v + v^v$$

21. Αν $x = 10^{-3}$ και $y = -0,1^{-2}$ να υπολογίσετε την παράσταση :

$$A = (x^3 \cdot y^{-1})^2 : [x^{-1} \cdot y (x^3 \cdot y^{-3})^{-1}]^{-2}$$

22. Αν $x = -2$ και $y = 3$ τότε να υπολογίσετε την παράσταση :

$$3x^2 - y^2 + 2xy^3$$

23. Αν $\alpha = \frac{3}{4}$ και $\beta = \frac{1}{2}$ να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

$$A = \alpha^5 (\alpha\beta^2)^3 : (\alpha^{-2}:\beta)^{-2}$$

$$B = (\alpha^2:\beta^3)^{-5} (\alpha^{-4}:\beta^{-5})^{-3}$$

24. Να υπολογίσετε τον αριθμό x όταν:

$$\alpha. 4^x = 2$$

$$\beta. 9 \cdot 3^{-x} = 9^x \cdot 27$$

25. Αν $4^x \cdot 8^{-x} = 32$ να υπολογιστεί ο άγνωστος x .

26. Να λυθεί η εξίσωση : $10^3 \cdot x = 10^4$

27. Να αποδείξετε ότι : $\left(\frac{x^\alpha}{x^\beta}\right)^{\alpha+\beta} \cdot \left(\frac{x^\beta}{x^\gamma}\right)^{\beta+\gamma} \cdot \left(\frac{x^\gamma}{x^\alpha}\right)^{\gamma+\alpha} = 1$

28. Για ποιά τιμή του λ η παράσταση $\alpha^{\lambda+3} \cdot \beta^{2\lambda+4}$ γράφεται με μορφή δύναμης με βάση $(\alpha\beta)$;

29. Να βρεθεί ο ακέραιος v για τον οποίο ισχύει : $3 \cdot 3^{3v-7} = \frac{1}{27}$.

ΑΠΑΓΩΓΗ ΣΕ ΑΤΟΠΟ

- 30.** Αν ο φυσικός αριθμός a είναι περιττός, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός a^2 είναι επίσης περιττός.
- 31.** Αν ο φυσικός αριθμός a είναι άρτιος, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός a^2 είναι επίσης άρτιος.
- 32.** Αν ο αριθμός a είναι άρτιος και ο β περιττός, τότε να αποδείξετε ότι ο $a + \beta$ είναι περιττός, ενώ ο $a \cdot \beta$ άρτιος.
- 33.** Να αποδείξετε ότι, αν ο a είναι άρρητος και ο ρ είναι ρητός, τότε οι αριθμοί $a - \rho$, $\rho - a$ και $\frac{a}{\rho}$ ($\rho \neq 0$) είναι άρρητοι.

(1-4 Άλγεβρα Α' Λυκείου - ΟΕΔΒ 1989)

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ & ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

- 34.** Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις :

α. $(2x - 5)^2 - (3x - 1) \cdot (3x + 1)$

β. $(3x - 2)^2 - 2 \cdot (3x - 2) \cdot x$

γ. $(x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) - x^2 \cdot (x - 1)$

δ. $(x + 2) \cdot (x^2 - 4x + 4) - x \cdot (x^2 - 4)$

- 35.** Να συμπληρωθούν οι ισότητες :

α. $x^2 - \dots = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

β. $(x - \dots)^2 = \dots - 2x + \dots$

γ. $\left(\dots - \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \dots - 3^\alpha + \dots$

- 36.** Να μετατραπούν σε γινόμενα οι παρακάτω παραστάσεις:

α. $6\alpha\beta - 20\alpha\delta$

β. $8x^2 - 4x$

$$\gamma. 12x^2y + 6xy^2 - 3xy$$

$$\delta. 15\alpha^3\beta^3\gamma^2 - 5\alpha^2\beta^3\gamma + 20\alpha^2\beta^3\gamma\delta$$

$$\epsilon. 4\kappa\lambda^2 - 10\kappa^2\lambda + 13\kappa\lambda \quad \sigma\tau. 3\alpha^{v+2} - 12\alpha^v$$

37. Ομοίως:

$$\alpha. \beta(x + 2y) + \gamma(x + 2y)$$

$$\beta. 2\alpha^2\beta(x + y) - 4\alpha\beta^2(x + y)$$

$$\gamma. 3\alpha(\kappa - 3\lambda) + 6\alpha\beta(\kappa - 3\lambda) + 12\alpha^2\beta(\kappa - 3\lambda)$$

$$\delta. (x + y)^3 - (x + y)^2$$

$$\epsilon. \alpha(x - y) + \gamma(y - x)$$

$$\sigma\tau. 2\alpha(\gamma - 2\delta) + 2\alpha\beta(2\delta - \gamma) - 4\alpha^2(\gamma - 2\delta)$$

$$\zeta. \alpha(x + y) + \beta(x + y) - (\alpha - \beta)(x + y)$$

$$\eta. (x - 2)(x - 1)^2 - 4(2 - x)$$

$$\theta. 2\alpha(\alpha - 2\beta) + \alpha - 2\beta$$

$$\iota. 3x^2(x - 3y) - x + 3y$$

$$\iota\alpha. 2x^2y^3(\alpha - 5\beta) - 4xy^2(5\beta - \alpha)$$

38. Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις:

$$\alpha. \alpha^2 - 16$$

$$\beta. x^2 - 9$$

$$\gamma. 25 - x^2$$

$$\delta. 36x^4 - 121y^2$$

$$\epsilon. \frac{49}{64}x^2 - 9$$

$$\sigma\tau. 81x^4 - 16y^4$$

$$\zeta. 3x^{v+2} - 12x^v$$

$$\eta. \alpha^4 - \beta^4$$

$$\theta. \alpha^8 - \beta^8$$

$$\iota. \alpha^{2v} - \beta^{2v}$$

$$\iota\alpha. (2x - 3)^2 - 16$$

$$\iota\beta. 25 - (\alpha + 7\beta)^2$$

$$\iota\gamma. (x - 3y)^2 - (-x + 2y)^2$$

$$\iota\delta. 25(x - 1)^2 - 4$$

$$\iota\epsilon. (x - 8y)^2 - 49(x + 1)^2$$

$$\iota\sigma\tau. \frac{1}{4}x^2 - (x - y)^2$$

39. Να γίνουν γινόμενα οι παρακάτω παραστάσεις :

$$\alpha. x^2 - xy + 2x - 2y$$

$$\beta. 8x^3 - 1$$

$$\gamma. x^3 - 5x^2 + 3x - 15$$

$$\delta. a^2 + \beta^2 - 2a\beta - 1$$

$$\epsilon. 4 - x^2 - y^2 + 2xy$$

$$\sigma\tau. x^2 - x - 6$$

$$\zeta. (x-1)^2 - 4$$

$$\eta. 4x^2 + 9y^2 - 12xy$$

$$\theta. x^3 + 27$$

40. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

$$\alpha. x^2 - xy + 4y - 4x$$

$$\beta. (x + y)^2 - z^2$$

$$\gamma. 1 - x^2 + 3x + 3$$

$$\delta. a^4 + \beta^4 - 11a^2\beta^2$$

$$\epsilon. a^8 - \beta^8$$

$$\sigma\tau. a^4 - 3a^2 + 2$$

$$\zeta. 12 \cdot (3a - 2)^2 - 3 \cdot (1 - 2a)^2$$

$$\eta. a \cdot (a - 3y) + \beta \cdot (x - a) - x \cdot (a - 3y)$$

$$\theta. 2a^2 + 2\beta^3 - 4a\beta$$

$$\iota. x^7 + 8x^4 - x^3 - 8$$

41. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις :

$$\alpha. x^3 + x^2 - x - 1$$

$$\beta. 375x^3 - 3$$

$$\gamma. xy^7 - xy$$

$$\delta. x^2 + 3x + 2$$

$$\epsilon. x^3 - x^2 + xy + x - y - 1$$

$$\sigma\tau. \beta x - a\beta + x^2 - ax$$

$$\zeta. a^5 - a^4 + a^3 - a^2 + a - 1$$

$$\eta. a\beta^2 - 2a^2 + 2\beta^3 - 4a\beta$$

$$\theta. (x + 2y)^3 - (2x - y)^3$$

$$\iota. (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$$

$$\iota\alpha. 5x^2 + 10xy + 5y^2 - 5$$

$$\iota\beta. 3 \cdot (x + 5)(x - 2)^2 - 12x - 60$$

$$\iota\gamma. a \cdot (a - 7) - \beta \cdot (\beta - 7)$$

42. Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις :

$$\alpha. (x^2 - 25)(x + 5) - 25 \cdot (x - 5)$$

$$\beta. x^3 - 6x^2y + 9xy^2$$

$$\gamma. 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

$$\delta. x^2 - y^2 + \omega^2 + 2x\omega$$

$$\epsilon. x^2 - y^2 - 2ay - a^2$$

στ. $x\sqrt{x} - 2x - 4\sqrt{x} + 8$

43. Αν $x + y + \omega = 0$ τότε να γίνει γινόμενο η παράσταση :

$$(x - 5y)^3 + (y - 5\omega)^3 - (5x - \omega)^3$$

44. Να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις:

α. $\frac{5y - 10}{y^2 - 2y}$

β. $\frac{6\alpha^2\beta}{2\alpha^3\beta\gamma^2}$

γ. $\frac{12\alpha - 12\beta}{18\alpha - 18\beta}$

δ. $\frac{4\alpha^3 - 16\alpha}{2\alpha^3 + 4\alpha^2}$

ε. $\frac{3x - 6}{4 - x^2}$

στ. $\frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x^2 - 8x + 15}$

ζ. $\frac{x^2 - 4x + 4}{3x^2 - 12}$

η. $\frac{2x^2 - 6x}{2x^2 - 18}$

θ. $\frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 2x - 8}$

ι. $\frac{t^2 - 2tp + p^2}{t^2 - p^2}$

ια. $\frac{x^3 - 3x^2 - 3x + 3}{x^2 - 4x + 3}$

ιβ. $\frac{(x^3 - 2x^2 + x) \cdot (x^2 - 1)}{(x^2 - x) \cdot (x^3 - 8)}$

ιγ. $\frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + 2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\gamma}$

45. Να εκτελεστούν οι παρακάτω πράξεις:

α. $\frac{x}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^2 - x}$

β. $\frac{3}{\alpha^2\beta} - \frac{2}{\alpha\beta}$

γ. $\frac{x^2 - 81}{x^2 - 49} \cdot \frac{x^2 - 7x}{x^2 + 9x}$

δ. $(x + 4) \cdot \frac{x^2y}{x^2 - 16}$

ε. $\frac{x^2 - 25}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 10x + 25}$

στ. $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 6xy + 9y^2} \cdot \frac{3x^2y + 9xy^2}{x - 3}$

$$\zeta. \frac{x^2 - 16}{x + 3} \cdot \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9} \qquad \eta. \frac{\alpha^2 - \beta^2}{x - y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{\alpha - \beta} \cdot \frac{x + y}{2}$$

$$\theta. \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x + 2} \cdot \frac{2x^2 - 8x + 8}{x^3 - 4x}$$

46. Να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha - \beta)^3 - \alpha \cdot (\alpha + \beta)^2 + 5\alpha^2\beta = \beta^2 \cdot (2\alpha - \beta)$$

47. Αν $\alpha + \beta = 2$ και $\alpha \cdot \beta = -3$ να δείξετε ότι :

$$\alpha. \alpha^2 + \beta^2 = 10$$

$$\beta. \alpha^3 + \beta^3 = 26$$

48. Να αποδείξετε ότι αν :

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha + \beta + \gamma = 1$$

τότε $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 0$.

49. Να δείξετε ότι : $(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2$.

50. Να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$.

51. Να αποδείξετε ότι : $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = xy$.

52. Αν $2 \cdot (x^2 + y^2) = (x+y)^2$ να δείξετε ότι $x = y$.

53. Αν $\alpha + \beta = 1$ να αποδείξετε ότι : $\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta = 1$.

54. Αν είναι $\alpha = \frac{1+x^2}{2x}$ και $\beta = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ (με $x \neq 0, 1, -1$) να

αποδείξετε ότι : $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = 1$.

55. Αν $(\alpha + \beta) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) = 4$ (με $\alpha \cdot \beta \neq 0$) να δείξετε ότι $\alpha = \beta$.

56. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ να δείξετε ότι : $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 - 2\alpha\beta$.

57. Αν $\alpha + \beta - \gamma = 0$ τότε να αποδείξετε ότι :

$$\alpha^3 + \beta^3 - \gamma^3 = -3\alpha\beta.$$

58. Αν $\alpha + \beta - \gamma = 0$ και $\gamma \neq 0$ και $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 0$ να δείξετε ότι :
 $3\alpha\beta = 2\gamma^2$.

59. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2$ και $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3$, να αποδείξετε ότι :

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = \frac{1}{6}$$

60. α. Αν $\alpha \neq 1$ να δείξετε ότι :

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^v = \frac{\alpha^{v+1} - 1}{\alpha - 1}$$

β. Να υπολογίσετε το άθροισμα :

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256.$$

61. Αν $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ και ισχύει $\alpha \cdot (\alpha + \gamma) - \beta \cdot (\beta + \gamma) = 0$ να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta$.

62. Αν $(\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 2) = 2 \cdot (\alpha\beta - 1)$ να δείξετε ότι $\alpha = \beta = 1$.

63. Να αποδείξετε ότι $(4\alpha + 2)^2 = 16\alpha \cdot (\alpha + 1) + 4$ και με την βοήθεια της παραπάνω σχέσης να υπολογίσετε τη δύναμη 26^2 .

64. Αν $x = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}$ να αποδείξετε ότι : $\frac{\alpha^2}{\alpha - x} = \frac{\beta^2}{\beta - x} = \alpha + \beta$.

65. Να αποδείξετε ότι :

α. $\frac{1}{2x+4} - \frac{1}{3x-6} + \frac{x+8}{3(x^2-4)} = \frac{1}{2(x-2)}$ με $x \neq -2, 2$.

β. $\frac{\beta}{\alpha^2 - \alpha\beta} - \frac{\alpha}{\alpha\beta - \beta^2} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta(\alpha - \beta)} = \frac{2\beta}{\alpha^2 - \alpha\beta}$

66. Να λυθεί η εξίσωση : $x^3 + (x - 1)^3 + (1 - 2x)^3 = 0$.

67. Να λυθεί η εξίσωση : $(2x + 3)^3 + (1 - 5x)^3 = (4 - 3x)^3$.

68. Να υπολογίσετε την παράσταση :

$$A = 4 \cdot 444 \cdot 445^2 + 1 \cdot 111 \cdot 111 - 4 \cdot 444 \cdot 444^2.$$

69. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ να βρείτε την τιμή του κλάσματος :

$$K = \frac{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta(\gamma + 2)}{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}.$$

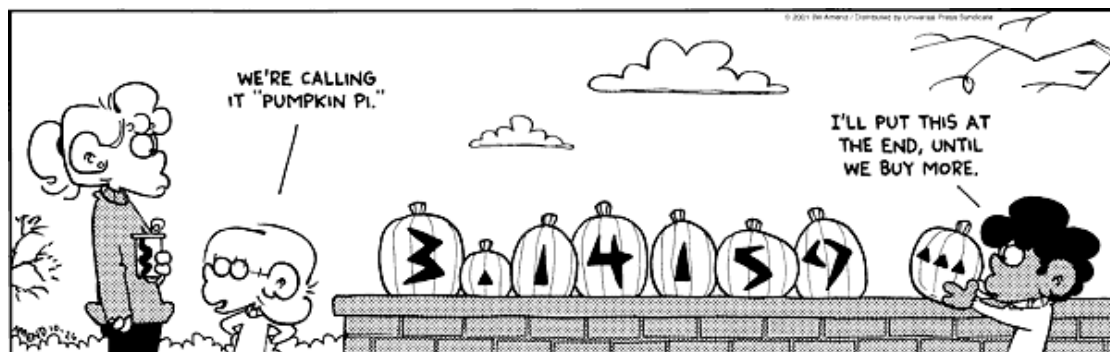
70. Αν $x + y = 2$ και $x \cdot y = -3$ τότε να βρεθούν τα x, y .

71. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $7^8 - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 6.

72. Αν $\alpha + \beta = 5$ και $\alpha \cdot \beta = 4$ να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\alpha^2 + \beta^2 \text{ και } \alpha^3 + \beta^3$$

(Mathematica.gr)



ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ



1. Αν $\alpha^2 + \beta^2 - 2\gamma(\alpha + 2\beta) + 5\gamma^2 \leq 0$ να δείξετε ότι : $\alpha = \frac{\beta}{2} = \gamma$.

2. Αν $\alpha > 0$ να δείξετε ότι : $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$.

3. Αν $\alpha > \beta > \gamma$ τότε να δείξετε ότι : $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) < 0$.

4. Αν $3\alpha < \beta$ να αποδείξετε ότι : $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{4} < \frac{\beta}{3}$.

5. Να δείξετε ότι : $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$.

6. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι :

α. $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$

β. $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$

7. Αν $\alpha > 1$ να αποδείξετε ότι : $\alpha^3 > \alpha^2 - \alpha + 1$.

8. Αν είναι $\alpha > \beta > 0$ να αποδείξετε ότι : $\alpha^3 - \beta^3 > (\alpha - \beta)^3$.

9. Αν είναι $2 < x < 8$ να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

A = $2x - 3$

B = $\frac{1}{x} + 2$

10. Αν είναι $x > 2$ να αποδείξετε ότι : $x^2 + \frac{3}{x} > 2x + \frac{3}{x}$.

11. Αν είναι $\alpha > \beta > 1$ να αποδείξετε ότι : $\alpha^3 - \beta^3 > 3(\alpha - \beta)$.

12. Αν $\omega \geq -2$ να αποδείξετε ότι : $\omega^3 + 8 \geq 2\omega^2 + 4\omega$.

13. Αν α, β, γ είναι θετικοί αριθμοί, τότε να δείξετε ότι :

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \geq 3\alpha\beta\gamma$$

14. Αν α, β, γ είναι θετικοί αριθμοί, τότε να δείξετε ότι :

α. $\alpha^2 + 1 \geq 2\alpha$

β. $(\alpha^2+1)(\beta^2+1)(\gamma^2+1) \geq 8\alpha\beta\gamma$

15. Αν α, β, γ είναι θετικοί αριθμοί, τότε να δείξετε ότι :

α. $(\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta$

β. $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \geq 8\alpha\beta\gamma$

16. Αν $0 < x < 1$ και $-2 < y < 2$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων:

α. $x + y$ **β.** $-y$ **γ.** $2x + 3y$ **δ.** $x - y$ **ε.** $\frac{y}{x}$

17. Αν $x > y$ να αποδείξετε ότι : $x + 7 > y + 5$.

18. Αν $x < 1$ και $y < 1$ να αποδείξετε ότι : $x + y < 1 + xy$.

19. Αν $\alpha + \beta = 1$ να αποδείξετε ότι :

α. $\alpha\beta \leq \frac{1}{4}$

β. $\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \geq 9$

20. Αν α, β είναι ετερόσημοι τότε να δείξετε ότι : $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \leq -2$.

21. Αν $x > 2$ τότε : $x^3 > 2x^2 - x + 2$.

22. Αν $\alpha > 0$ τότε : $\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} \leq 1$.

23. Να δείξετε ότι : $\alpha^2 + \gamma^2 \geq 2\beta(\alpha - \beta + \gamma)$.

24. Αν α, β θετικοί και $\alpha + \beta = 1$ τότε να δείξετε ότι :

α. $\alpha\beta \leq \frac{1}{4}$

β. $(1 + \alpha^{-1})(1 + \beta^{-1}) \geq 9$

25. Για τους θετικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ να αποδείξετε ότι :

$$\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha + \beta} < \frac{\alpha}{1 + \alpha} + \frac{\beta}{1 + \beta}$$

26. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x, y για τους οποίους ισχύει $2 < x < y$. Να γράψετε σε μια σειρά από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς : $x^2, y^2, (y + 1)^2, (x-1)^2$.

27. Αν $\alpha^2 + \beta^2 \leq 2\gamma(\alpha + \beta - \gamma)$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με πλευρές α, β, γ είναι ισόπλευρο.

28. Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε να αποδείξετε ότι : $\alpha - \delta < \beta - \gamma$.

29. Έστω ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές x, y . Να εκφράσετε με μαθηματικές σχέσεις τις προτάσεις «Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι μικρότερο από 10m^2 » και «Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι τουλάχιστον 45m ».

(Mathematica.gr)



ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ



1. Να υπολογίσετε την παράσταση : $A = x + |2 - x|$.

2. Να υπολογίσετε την παράσταση : $A = 2|2 - x| - 3|x - 1|$.

3. Να υπολογίσετε την παράσταση : $A = \frac{|x + 1| + |x + 3|}{x - 2}$.

4. Αν $\alpha < \beta < \gamma$ τότε να απλοποιηθεί η παράσταση :

$$A = 2|\alpha - \beta| - 3|\gamma - \beta| + 4|\gamma - \alpha|$$

5. Αν είναι $x > 2$ να υπολογίσετε την παράσταση : $A = \frac{4x - 8}{|x - 2|}$.

6. Αν $|x| < 1$, γράψτε χωρίς τις απόλυτες τιμές την παράσταση :

$$A = 2|x + 3| - 6|x - 2| + x - 1$$

7. Αν $|x| \leq 1$ να βρεθεί η μορφή της παράστασης :

$$A = 2|x + 3| - 3|x - 4| - 2x + 1$$

χωρίς τις απόλυτες τιμές.

8. Αν $\alpha < \beta < \gamma$ να υπολογίσετε την παράσταση :

$$A = 3|\alpha - \beta| - 2|\gamma - \alpha| + 3|\beta - \gamma|$$

9. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας, όπως υποδεικνύεται στην πρώτη του σειρά.

Απόλυτη Τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή Ένωση Διαστημάτων
$ x - 1 > 2$	$d(x, 1) > 2$	$(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$
$ x - 5 \leq 3$		
$ x + 1 < 5$		
$ x + 2 \geq 4$		
	$d(x, -4) < 2$	
	$d(x, -1) > 6$	
	$d(x, 2) \leq 3$	
	$d(x, 2) \geq 3$	
		$[-3, 3]$
		$(-9, 3)$
		$(-\infty, -5] \cup [1, +\infty)$
		$(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$

(Βασισμένη στην Άλγεβρα Α' Λυκείου - ΙΤΥΕ 2012)

10. Να αποδείξετε ότι : $|x + y|^2 - |x - y|^2 = 4xy$.

11. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός να αποδείξετε ότι :

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right| = \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|$$

12. Αν $x, y \in \mathbb{R}$ με $x \neq y \neq 0$ και $\frac{|x|y| + y|x|}{|xy|} = 2$ τότε να δείξετε ότι οι αριθμοί x, y είναι ομόσημοι.

13. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq \pm 1$, $|\alpha| > 1$ και $\beta = \frac{\alpha}{1-|\alpha|}$ να δείχτεί ότι οι αριθμοί α, β είναι ετερόσημοι.

14. Αν $\frac{|2\alpha + 3\beta|}{|3\alpha + 2\beta|} \leq 1$ να αποδείξετε ότι : $\left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \leq 1$.

15. Να δείξετε ότι : $|x - y| = |y - x|$.

16. Αν $x|y| + y|x| = 0$ με $xy \neq 0$ να δείξετε ότι οι αριθμοί x, y είναι ετερόσημοι.

17. Αν $|\alpha| \leq 2$ να δείξετε ότι : $|\alpha^2 - 2\alpha + 6| \leq 14$.

18. Αν $|x - y| < \alpha$ και $|y - \omega| < \alpha$ να δείξετε ότι : $|x - \omega| < 2\alpha$.

19. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός να αποδείξετε ότι :

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| < \left| \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right|$$

20. Αν $x^2 \leq 16y^2$ να αποδείξετε ότι : $\left| \frac{x}{y} \right| - \left| \frac{y}{x} \right| < \frac{15}{4}$.

21. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί να δείξετε ότι :

$$|\alpha| + |\beta| \leq \sqrt{2(\alpha^2 + \beta^2)}$$

22. Να δείξετε ότι : $|\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 = 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$.

23. Να δείξετε ότι : $\frac{|x+y|}{|x|+|y|} + \frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} \leq 3$.

24. Να αποδείξετε ότι : $|xy| + xy \geq |x|y + x|y|$.

25. Αν $|x + \lambda y| < |\lambda x + y|$ και $|x| < |y|$ να δείξετε ότι : $|\lambda| < 1$.

26. Αν $x, y \neq 0$ να δείξετε ότι : $\left| \frac{x}{y} \right| + \left| \frac{y}{x} \right| \geq 2$.

27. Να αποδειχτεί η ισοδυναμία : $|x + 3y| < |y + 3x| \Leftrightarrow |x| > |y|$.

28. Αν $|a| \leq 2$ να δείξετε ότι : $|a^2 - 2a + 6| \leq 14$.

29. Να αποδείξετε για $x \neq \pm 1$, ότι η ισότητα $\frac{x^2 - |x|}{|x| - 1} = \frac{x^3 - x}{x^2 - 1}$ ισχύει μόνο όταν $x > 0$.

30. Αν $x = \frac{\alpha}{|\beta| + |\gamma|}$, $y = \frac{\beta}{|\gamma| + |\alpha|}$, $\omega = \frac{\gamma}{|\alpha| + |\beta|}$ να αποδείξετε ότι :

$$\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} + \frac{1}{|\omega|} \geq 6$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, x, y, \omega$ μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί.

31. Αν $|a| \leq 1$ να αποδείξετε ότι $-\beta \leq a \cdot \beta \leq |\beta|$, όπου a, β πραγματικοί αριθμοί.

32. Αν α, β, x, y πραγματικοί αριθμοί με $x, y \neq 0$ και $x = \alpha (|\alpha| + |\beta|)$, $y = \beta (|\alpha| + |\beta|)$, τότε να αποδείξετε ότι :

$$\alpha = \frac{x}{\sqrt{|x| + |y|}} \quad \text{και} \quad \beta = \frac{y}{\sqrt{|x| + |y|}}$$

33. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι : $|\alpha| + |\beta| \leq \sqrt{2(\alpha^2 + \beta^2)}$.

34. Βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύουν :

$$(|x| - 2)(2|x| - 30) = 0 \quad \text{και} \quad |x + 5| \geq 7$$

35. Αν $||x| - |y|| = |x + y|$ τότε τι συμπέρασμα βγάξετε για τους αριθμούς x, y ;

36. Αν $|α - 1| < 5$ και $|\beta - 2| < 3$ να βρείτε που μεταβάλλεται η παράσταση $α + \beta$.

37. Να δείξετε ότι ο αριθμός $x = \frac{2(\alpha^2 - \beta^2)}{\alpha^2 + \beta^2}$ ανήκει στο διάστημα $[-2, 2]$.

38. Αν $\kappa < \lambda < \mu < \nu$ και $\lambda < x < \mu$ να δείξετε ότι η παράσταση :

$$A = |\kappa - x| + |\lambda - x| + |\mu - x| + |\nu - x|$$

είναι ανεξάρτητη του x .

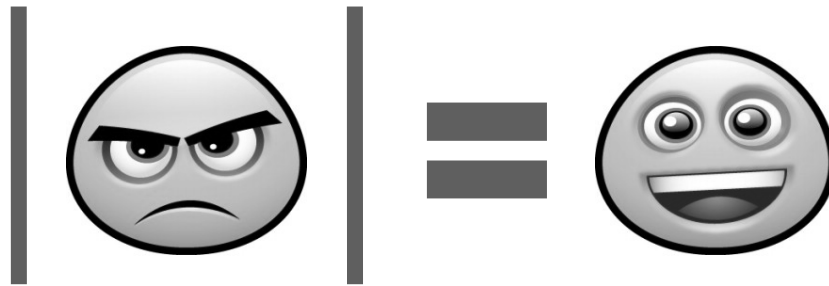
39. Για ποιες τιμές του x έχει έννοια η παράσταση :

$$|x^5 + 3| + 3 \neq 0$$

40. Να βρεθούν οι ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει :

$$d(x, 3) < 8$$

(Mathematica.gr)



ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ



1. Αν $x - 2\sqrt[3]{6} = 4\sqrt[3]{6}$ να υπολογίσετε τον x^3 .

2. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης :

$$x^2 + xy + y^2 \text{ όταν } x = \sqrt{3} + 1 \text{ και } y = \sqrt{3} - 1$$

3. Αν $x = 1 + \sqrt{2}$ και $y = 1 + \sqrt{3}$ να δείξετε ότι οι παραστάσεις :

$$\mathbf{A} = 3x^2 - 6x + 3 \text{ και } \mathbf{B} = 2y^2 - 4y + 2$$

είναι ίσες.

4. Να απλοποιήσετε την παράσταση : $\mathbf{A} = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$.

5. Να υπολογίσετε την παράσταση :

$$\mathbf{A} = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{x^2 + 6x + 9}$$

6. Να απλοποιήσετε την παράσταση : $\sqrt{41 - \sqrt{29 - \sqrt{19 - \sqrt{9}}}}$.

7. Να υπολογίσετε την παράσταση : $2\sqrt{8} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{6}$.

8. Να υπολογίσετε την παράσταση : $\frac{\sqrt{24} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}}$.

9. Να απλοποιηθούν τα ριζικά :

$$\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}, \sqrt{9 - \sqrt{8}}, \sqrt{4 + \sqrt{15}}$$

10. Να απλοποιήσετε την παράσταση : $\frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[4]{x+1}}$.

11. Να απλοποιηθεί η παράσταση : $\frac{\sqrt[3]{a} + 3\sqrt{a} - 4}{a - 1}$

όταν $a \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$.

12. Να γράψετε την παράσταση με τη βοήθεια μιας μόνο ρίζας :

$$\sqrt{\sqrt{3^5 3}}$$

13. Να απλοποιήσετε τα ριζικά :

$$\sqrt[4]{16}, \sqrt[9]{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^3}, \sqrt{3^4 \sqrt{3^4 3}}, \sqrt{108x^5y^6}$$

14. Αν $x = \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{2}$ και $y = \sqrt[3]{3} - \sqrt[4]{2}$, τότε να υπολογίσετε τις παραστάσεις : $x^2 + y^2$ και $x^3 + y^3$.

15. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

α. $\sqrt{8} + \sqrt{32} - \sqrt{18}$

β. $\sqrt{48} + \sqrt{12} - \sqrt{75}$

γ. $8\sqrt{20} + 3\sqrt{80} - 2\sqrt{500}$

δ. $-\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{54}$

ε. $(12\sqrt{50} - 8\sqrt{200} + 7\sqrt{450}) : \sqrt{10}$

16. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

α. $\sqrt{3^4 \sqrt{3} \sqrt{3^2}}$

β. $\sqrt{\frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{3} \sqrt{\frac{3}{2}}}}$

γ. $\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}$

δ. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^4}}$

ε. $\sqrt[4]{\frac{x}{y^2} \sqrt{\frac{y^2}{x}}}$

17. Να υπολογίσετε την παράσταση :

$$\sqrt{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{3}}}$$

18. Να γίνουν οι πράξεις : $\sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[5]{x^6} \cdot \sqrt[10]{x^7}$.

19. Να υπολογίσετε το γινόμενο :

$$\Gamma = \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3+\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{3+\sqrt{3+3\sqrt{3}}} \cdot \sqrt[4]{3-\sqrt{3+3\sqrt{3}}}$$

20. Να μετατραπούν οι παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή :

α. $\frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+1}$

β. $\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$

γ. $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$

δ. $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

ε. $\frac{9-x}{3-\sqrt{x}}$

στ. $\frac{x}{\sqrt{x+9}-3}$

ζ. $\frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}$

η. $\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$

θ. $\frac{(x-4)^2}{x-4\sqrt{x}+4}$

ι. $\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}}}$

ια. $\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{\alpha-\beta}}$ (με $\alpha > \beta$)

ιβ. $\frac{1}{\sqrt[3]{5}-1}$

ιγ. $\frac{-3\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

21. Να γίνουν οι πράξεις : $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

22. Να γίνουν οι πράξεις : $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} - \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$.

23. Να γίνουν οι πράξεις : $(2-\sqrt{3})^{-3} + (2+\sqrt{3})^{-3}$.

24. Να γίνουν οι πράξεις : $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$.

25. Αν $0 < x < \alpha$ να δείξετε ότι : $\frac{\sqrt{\frac{\alpha+x}{\alpha-x}} - \sqrt{\frac{\alpha-x}{\alpha+x}}}{\sqrt{\frac{\alpha+x}{\alpha-x}} + \sqrt{\frac{\alpha-x}{\alpha+x}}} = \frac{x}{\alpha}$.

26. Να δείξετε ότι : $\sqrt{\frac{(1+\sqrt{3})^2}{9}} + \sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

27. Να δείξετε ότι : $\sqrt{\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}} + \sqrt{\frac{(1-\sqrt{5})^2}{4}} = \sqrt{5}$.

28. Αν $\alpha, \beta > 0$ να αποδείξετε ότι : $\frac{2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}} \leq \sqrt{\alpha \cdot \beta}$.

29. Να δείξετε ότι : $\sqrt{10+2\sqrt{15}} > \sqrt{5} + \sqrt{3}$.

30. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt{2}$.

31. Να δείξετε ότι : $\sqrt{10+2\sqrt{15}} > \sqrt{5} + \sqrt{3}$.

32. Να εξετάσετε πότε ισχύει η ισότητα $\sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$, όταν α, β είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί.

33. Αν α, β, γ θετικοί αριθμοί, τότε να αποδείξετε ότι :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma = (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma})(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma})(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma})(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma})$$

34. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ έχουν έννοια οι παραστάσεις :

$$\mathbf{A} = \frac{2x-1}{x^4+7x} \qquad \mathbf{B} = \frac{4}{x^5+8x} \qquad \mathbf{\Gamma} = \frac{2x-\sqrt{x-1}}{x^3+x^2}$$

35. Αν $x = 0,125$ και $y = (0,6)^{-6}$, τότε να υπολογίσετε την παράσταση :

$$\mathbf{A} = \left[x^{\frac{2}{3}} \cdot y^{-1} \cdot \left(x^{-1} \cdot y^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{4}{3}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

36. Αν $x = 1 - 3\sqrt{2}$ να υπολογίσετε την παράσταση :

$$\mathbf{A} = \frac{\sqrt{2}}{x} - \frac{3}{x^2}$$

(Mathematica.gr)

