ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

1. Τα μέλη ενός Γυμναστηρίου έχουν τη δυνατότητα να επιλέξουν προγράμματα αεροβικής ή γυμναστικής με βάρη. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α = Ένα μέλος έχει επιλέξει πρόγραμμα αεροβικής.

Β = Ένα μέλος έχει επιλέξει πρόγραμμα με βάρη.

Αν επιλέξουμε στην τύχη ένα μέλος του Γυμναστηρίου, τότε να εκφράσετε τα παρακάτω ενδεχόμενα, χρησιμοποιώντας τους κατάλληλους συμβολισμούς από τη θεωρία των συνόλων.

α. Το μέλος έχει επιλέξει πρόγραμμα αεροβικής ή βάρη.

β. Το μέλος έχει επιλέξει πρόγραμμα αεροβικής και πρόγραμμα με βάρη.

γ. Το μέλος δεν έχει επιλέξει πρόγραμμα αεροβικής.

δ. Το μέλος έχει επιλέξει πρόγραμμα αεροβικής, αλλά όχι πρόγραμμα με βάρη.

ε. Το μέλος δεν έχει επιλέξει κανένα από τα δύο προγράμματα.

στ. Το μέλος έχει επιλέξει αυστηρά ένα μόνο από τα δύο προγράμματα.

2. Ας υποθέσουμε ότι ένας παγωτατζής παρέχει δύο γεύσεις παγωτού: σοκολάτα και φράουλα, τα οποία προσφέρει είτε σε χωνάκι, είτε σε κυπελάκι. Αν ορίσουμε τα παρακάτω ενδεχόμενα:

Σ = Παγωτό με γεύση σοκολάτα, και

Χ = Παγωτό χωνάκι

τότε να διατυπώσετε αναλυτικά (με λόγια) τις παρακάτω μαθηματικές εκφράσεις:

$\Sigma \cap X$, $\Sigma \cup X$, $\Sigma - X$, $X - \Sigma$, Σ', X', $\Sigma' \cap X$, $\Sigma' \cup X'$

3. Ρίχνουμε ένα ζάρι και θεωρούμε τα παρακάτω ενδεχόμενα:

Α = Η ένδειξη είναι πρώτος αριθμός

Β = Η ένδειξη είναι αριθμός μικρότερος του 5

α. Να βρείτε το δειγματικό χώρο Ω καθώς και τα ενδεχόμενα Α, Β.

β. Να βρείτε τα παρακάτω ενδεχόμενα:

1. Πραγματοποιείται το Α ή το Β.
2. Πραγματοποιείται και το Α και το Β.
3. Πραγματοποιείται το Α, αλλά όχι το Β.
4. Δεν πραγματοποιείται το Α.
5. Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α, Β.
6. Πραγματοποιείται μόνο το Α ή μόνο το Β.

4. Έστω ο δειγματικός χώρος Ω = { Α, Β, Γ, ... , Χ, Ψ, Ω } και τα ενδεχόμενα Σ = Τα σύμφωνα της αλφαβήτου , Φ = Τα γράμματα που αποτελούν τη λέξη "Φιλόσοφος". Να βρείτε τα στοιχεία των παρακάτω ενδεχομένων:

$\Sigma \cup \Phi$, $\Sigma \cap \Phi$, Σ', $\Sigma - \Phi$, $\Phi - \Sigma$, $\Sigma' \cap \Phi$, $\Sigma \cap \Phi'$,

$(\Sigma \cup \Phi)'$, $(\Sigma \cap \Phi)'$, $(\Sigma - \Phi) \cup (\Phi - \Sigma)$

5. Σε μια βιοτεχνία παιχνιδιών κατασκευάζονται πλαστικά αεροπλανάκια, με τις εξής δυνατότητες: η άτρακτος μπορεί να είναι μπλέ (Μ) ή πράσινου (Π) χρώματος, τα φτερά τετράγωνα (Τ) ή στρογγυλεμένα (Σ) και η έλικα πλαστική (Π) ή ξύλινη (Ξ). Να βρείτε το δειγματικό χώρο από όλα τα δυνατά αεροπλανάκια, τα οποία μπορούν να κατασκευαστούν σε αυτή τη βιοτεχνία. Να κατασκευάσετε, επίσης, και το αντίστοιχο δεντροδιάγραμμα.

6. Σε ένα σκεπασμένο καφάσι υπάρχουν ένα μήλο (Μ), ένα αχλάδι (Α) κι ένα πορτοκάλι (Π). Επιλέγουμε στην τύχη ένα φρούτο και το καταγράφουμε. Στη συνέχεια το τοποθετούμε ξανά μέσα στο καφάσι κι επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία, άλλη μια φορά. Να βρείτε:

α. το δειγματικό χώρο του πειράματος.

β. το ενδεχόμενο να επιλέξουμε το ίδιο φρούτο.

γ. το ενδεχόμενο να μην επιλέξουμε αχλάδι.

δ. το ενδεχόμενο να επιλέξουμε τουλάχιστον μια φορά μήλο.

ε. το ενδεχόμενο να επιλέξουμε ακριβώς μια φορά μήλο.

7. Ρίχνουμε ένα νόμισμα 4 φορές.

α. Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

β. Να βρείτε το ενδεχόμενο Α = " Τρεις ίδιες ενδείξεις ".

γ. Να βρείτε το ενδεχόμενο Β = " Τρεις συνεχόμενες ίδιες ενδείξεις ".

δ. Να βρείτε τα ενδεχόμενα $A \cap B$, $A - B$ και A' .

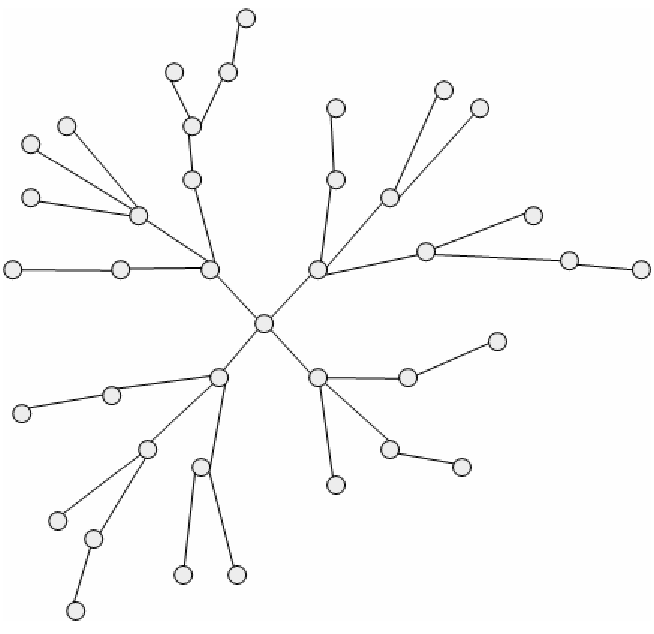
8. Σε ένα συρτάρι υπάρχουν ανακατεμένες άσπρες και μαύρες κάλτσες. Τραβάμε στην τύχη μέχρι να πετύχουμε δύο κάλτσες ίδιου χρώματος.

α. Να βρείτε το δειγματικό χώρο.

β. Να βρείτε το ενδεχόμενο Μ να πετύχουμε δύο μαύρες κάλτσες.

γ. Να βρείτε το ενδεχόμενο Τ να χρειαστούν τρεις προσπάθειες.

δ. Να βρείτε τα ενδεχόμενα $A \cap B$ και $A - B$.



Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

1. Σ' ένα κουτί περιέχονται οι αριθμοί από το 1 ως το 4000 γραμμένοι σε λαχνούς. Όλοι οι αριθμοί που αρχίζουν από 3 κερδίζουν. Ποια η πιθανότητα να κερδίσουμε βγάζοντας ένα λαχνό;

2. Σ' ένα κουτί περιέχονται 100 ηλεκτρικές λάμπες για δοκιμή. Γνωρίζουμε ότι το 10% από αυτές είναι ελαττωματικές. Αν η πρώτη ήταν ελαττωματική και την πετάξαμε, να βρείτε την πιθανότητα να είναι καλή η δεύτερη λάμπα.

3. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Αν $A = \{\omega_2, \omega_4\}$ με $P(A) = 5/9$, $P(\omega_2) = 1/2$ και $P(\omega_3) = 2 \cdot P(\omega_4)$. Να υπολογιστούν τα $P(\omega_1)$, $P(\omega_3)$, $P(\omega_4)$, $P(A')$.

4. Έστω $\Omega = \{x, y, z, \omega\}$ ένας δειγματικός χώρος. Να βρεθούν:

α. Η $P(y)$ αν $P(x) = 1/2$, $P(\omega) = 1/4$, $P(z) = 1/8$.

β. Οι $P(x)$, $P(y)$ αν $P(\omega) = P(z) = 2/5$ και $P(x) = 3P(y)$.

5. Δίνεται ότι $P(A) = \lambda \cdot P(B)$ και $\lambda \cdot P(A) = 1 - P(B)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Αν τα $P(A)$, $P(B)$ είναι πιθανότητες ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε να προσδιοριστεί το λ.

β. Να προσδιοριστεί ο λ ώστε $\Omega = \{A, B\}$.

γ. Για τη μικρότερη τιμή του λ που θα βρείτε δείξτε ότι $A = \varnothing$ και $B = \Omega$.

6. Ρίχνουμε ένα ζάρι δυο φορές και οι ενδείξεις που προκύπτουν καθορίζουν τους συντελεστές της εξίσωσης: $\lambda x^2 + 4x + \mu = 0$. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

α. Οι ρίζες της εξίσωσης να είναι πραγματικές.

β. Η εξίσωση να μην έχει καμία πραγματική ρίζα.

7. Έστω ο δειγματικός χώρος Ω με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Αν για κάποιο ενδεχόμενο Α είναι $P(A) = 1/4$, να διαπιστώσετε ότι ο Ω έχει άρτιο πλήθος στοιχείων. Αν θεωρήσουμε και το ενδεχόμενο Β του Ω, ώστε το Β να έχει ως στοιχεία του τα στοιχεία του Α και ένα ακόμη και $P(B) = 1/3$, τότε να βρείτε τον αριθμό των στοιχείων του Ω.

8. Αν P(A) είναι η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α ενός δειγματικού χώρου Ω και ισχύει $|P(A) + 2| - |P(A) - 3| = 8\mu$ τότε να δείξετε ότι $|\mu| \leq 1/8$.

9. Έστω δειγματικός χώρος $\Omega = \{0, 1, 2, ..., \nu\}$ και έστω $P(\kappa) = m^{\kappa-1}$ η πιθανότητα ενός στοιχείου του. Αν η πιθανότητα του 0 είναι ίσης με $\frac{m^{\nu} - m}{t}$, τότε να δείξετε ότι $m + t = 1$.

10. Σε ένα δείγμα 200 μηχανογραφικών δελτίων υποψηφίων βρέθηκε ότι 170 δηλώνουν ΑΕΙ, ενώ 120 δηλώνουν ΤΕΙ. Αν Α είναι το ενδεχόμενο κάποιος υποψήφιος να δηλώνει ΑΕΙ και Β το ενδεχόμενο να δηλώνει ΤΕΙ, να δείξετε ότι:

α. Τα ενδεχόμενα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

β. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ένας υποψήφιος να έχει δηλώσει μόνο ΑΕΙ ή μόνο ΤΕΙ.

11. Μια τάξη έχει 12 αγόρια και 16 κορίτσια. Τα μισά κορίτσια και τα μισά αγόρια έχουν μαύρα μάτια. Εκλέγουμε τυχαία ένα άτομο. Να βρείτε την πιθανότητα να είναι αγόρι ή να έχει μαύρα μάτια.

12. Σε μια τάξη με 30 μαθητές 16 έχουν ποδήλατο και 10 έχουν μοτοσυκλέτα. Υπάρχουν και μαθητές που έχουν και τα δύο είδη δικύκλων ή που δεν έχουν τίποτα από τα δύο. Αν γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου: "ο μαθητής έχει και τα δύο ή δεν έχει τίποτα" είναι 40% , να βρεθεί:

α. Πόσοι μαθητές έχουν και τα δύο είδη δικύκλων.

β. Πόσοι μαθητές έχουν μόνο ποδήλατο.

γ. Πόσοι έχουν μόνο μοτοσυκλέτα.

13. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α και Β του δειγματικού χώρου Ω. Αν P(A), P(B) είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0$ με P(A) < P(B), τότε:

α. Να βρεθούν οι P(A), P(B).

β. Να δειχτεί ότι τα ενδεχόμενα Α, Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

γ. $\frac{2}{3} \le P(A \cup B) \le 1$ και $\frac{1}{6} \le P(A \cap B) \le \frac{1}{2}$.

14. Σε ένα δείγμα υποψηφίων Θετικής (ΘΕΤ) και Τεχνολογικής (ΤΕΧ) κατεύθυνσης, από τους οποίους οι 200 είναι ΘΕΤ, πέτυχαν 80 από την ΤΕΧ. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α = "Πέτυχε ο υποψήφιος" και Β = "απέτυχε ο υποψήφιος της ΤΕΧ". Αν P(A) = 1/4 και P(B) = 4/5, τότε να βρείτε:

α. Το πλήθος των υποψηφίων της ΤΕΧ.

β. Το πλήθος των επιτυχόντων της ΘΕΤ.

15. Δεδομένου ότι P(A) = 3/4 και P(B) = 3/8, να δειχτεί ότι:

α. $P(A \cup B) \ge 3/4$

β. $\frac{1}{8} \le P(A \cap B) \le \frac{3}{8}$

16. Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων και Α, Β υποσύνολα του Ω. Έστω $P(A') \le 0{,}28$ και $P(B') \le 0{,}71$. Να αποδείξετε ότι:

α. $P(A \cap B) \ge 1{,}01 - P(A \cup B)$

β. Το ενδεχόμενο $A \cap B$ δεν είναι το κενό.

17. Ένα παλιό αυτοκίνητο χαλάει κατά 65% από βλάβη μηχανής, κατά 20% από αμέλεια του οδηγού και κατά 5% από βλάβη μηχανής και αμέλεια του οδηγού. Επίσης, χαλάει και από άλλες αιτίες.

α. Ποια είναι η πιθανότητα να χαλάσει το αυτοκίνητο μόνο από βλάβη μηχανής;

β. Ποια είναι η πιθανότητα να χαλάσει με μία τουλάχιστον από τις δύο αυτές αιτίες;

γ. Ποια η πιθανότητα να χαλάσει από άλλες αιτίες;

δ. Ποια η πιθανότητα να χαλάσει με μόνο μια από τις δύο αυτές αιτίες;

18. Ρίχνουμε ένα νόμισμα. Αν η ρίψη σταματά όταν φέρουμε 2 φορές κεφαλή (Κ) ή δύο φορές γράμματα (Γ), τότε να γραφτεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος.

19. Τα δυνατά αποτελέσματα από την εκτέλεση ενός πειράματος τύχης είναι ω_1 και ω_2 . Να βρεθεί η τιμή του λ, ώστε οι σχετικές συχνότητες των αποτελεσμάτων αυτών να είναι:

$$\frac{2\lambda+1}{\lambda^2+\lambda+1} \text{ και } \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+\lambda+1}$$

20. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. Αν είναι γνωστό ότι η πιθανότητα να μη συμβεί το ενδεχόμενο $A = \{\omega_1\}$ είναι τριπλάσια της πιθανότητας να συμβεί το ενδεχόμενο $B = \{\omega_2\}$. Να βρεθούν οι $P(A)$, $P(B)$.

21. Το άθροισμα των πιθανοτήτων δύο γεγονότων Α, Β δεν είναι μικρότερο από τη μεγαλύτερη εκ των δύο ριζών της εξίσωσης: $x^2 - 3x + 2 = 0$. Να δειχτεί ότι οι πιθανότητες των ενδεχομένων αυτών είναι ίσες με την άλλη ρίζα της εξίσωσης.

22. Ο βαθμός δυσκολίας των θεμάτων των μαθηματικών στις εξετάσεις είναι άλλοτε μεγάλος, άλλοτε μέτριος και άλλοτε μικρός. Αν η επιτροπή εξετάσεων αποφάσισε ότι για τα επόμενα 10 χρόνια τα θέματα θα είναι 4 φορές μέτρια, 4 φορές εύκολα και 2 φορές δύσκολα, τότε να βρεθεί η πιθανότητα το επόμενο έτος τα θέματα να είναι:

α. δύσκολα

β. μέτρια ή εύκολα

γ. ούτε εύκολα, ούτε δύσκολα.

23. Η βαθμολογία με την οποία μπορεί να αξιολογηθεί ένας υποψήφιος στις εξετάσεις κυμαίνεται από 2 ως 160. Να βρεθεί η πιθανότητα ένας υποψήφιος να αξιολογηθεί με βαθμό:

α. μεγαλύτερο από 140

β. μικρότερο από 80

γ. από 80 έως 140 (συμπεριλαμβανομένων)

24. Σε ένα σύνολο Ω αποτελούμενο από 80 μαθητές, οι 30 είναι άριστοι στα Μαθηματικά, οι 40 είναι άριστοι στη Φυσική, ενώ 16 είναι άριστοι και στα δύο. Αν επιλέξουμε ένα μαθητή στην τύχη, να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

α. Να είναι άριστος στα Μαθηματικά ή στη Φυσική.

β. Να είναι άριστος στα Μαθηματικά αλλά όχι Φυσική.

γ. Να μην είναι άριστος σε κανένα από τα δύο.

25. Ένα κουτί περιέχει x άσπρες, y κόκκινες και ω μαύρες μπάλες. Αν πάρουμε τυχαία μια μπάλα, η πιθανότητα να είναι κόκκινη είναι 2/5 και άσπρη 1/4. Να βρεθούν τα x, y, ω αν γνωρίζετε ότι: $4 < x + y + \omega < 21$.

26. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α, Β και Γ ενός δειγματικού χώρου Ω, για τα οποία ισχύει $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/4$, $P(\Gamma) = 2/3$, $A \cup B \cup \Gamma = \Omega$ και $\Gamma \cap A = \Gamma \cap B = \varnothing$. Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου $A \cap B$ και να δείξετε ότι $B \subseteq A$.

27. Έστω Α και Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Να αποδείξτε ότι:

α. $P(A) \cdot P(B) \le \frac{1}{2}(P(A) + P(B))$

β. $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A') \cdot P(B') = P(A' \cap B')$

28. Δίνεται ο δειγματικός χώρος Ω με 24 ισοπίθανα, απλά ενδεχόμενα. Έστω Α ένα ενδεχόμενο του Ω. Αν ισχύει: $P^3(A) + P^3(A') = 1/3$, τότε να προσδιορίσετε το πλήθος των στοιχείων του Α.

29. Έστω Α και Β δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τέτοια ώστε: $\frac{4}{P(A)} + \frac{36}{P(B)} = 64$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A)$, όταν $P(A) > 1/16$.

30. Αν τα γεγονότα A_1 , A_2 , A_3 είναι τέτοια, ώστε $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$ και $P(A_1) = 1/4$, $P(A_2) = 5/12$ και $P(A_3) = 7/12$, τότε να υπολογιστούν οι πιθανότητες των γεγονότων:

α. $A_1' \cap A_2$

β. $A_1' \cap A_3$

γ. $A_1 \cap A_2' \cap A_3'$

δ. $A_1' \cap A_2' \cap A_3'$

(Να λυθεί σχηματικά)

31. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{ 0, 1, 2, \dots , 2\nu \}$ με $P(\kappa) = \dfrac{1}{2^{\kappa}}$ όταν $\kappa = 1, 2, \dots , 2\nu$.

α. Να βρεθεί η P(0).

β. Αν $A = \{0, 2, 4, 6, \dots , 2\nu \}$ να βρεθεί η P(A).

32. Ένα κουτί περιέχει 12 άσπρες μπάλες, x κόκκινες και y μαύρες. Παίρνουμε τυχαία μια μπάλα. Η πιθανότητα να πάρουμε κόκκινη είναι 1/2 και η πιθανότητα να πάρουμε μαύρη είναι 1/3. Να βρείτε πόσες μπάλες υπάρχουν στο κουτί.

33. Δυο κουτιά περιέχουν ν όμοια σφαιρίδια, που είναι αριθμημένα από το 1 έως το ν. Εξάγουμε, συγχρόνως, από ένα σφαιρίδιο από κάθε κουτί. Να δειχτεί ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου: " Ο αριθμός του σφαιριδίου από το 1ο κουτί να είναι μικρότερος του αριθμού του σφαιριδίου από το 2ο κουτί " είναι $\dfrac{\nu-2}{2\nu}$.

34. Ένα κουτί περιέχει μια σφαίρα με την ένδειξη 1, δυο σφαίρες με την ένδειξη 2, τρεις με την ένδειξη 3 κ.ο.κ έως ν σφαίρες με την ένδειξη ν, όπου $\nu \geq 2$.

α. Αν ο ν είναι άρτιος, τότε να βρεθεί η πιθανότητα να τραβήξουμε σφαίρα με άρτια ένδειξη.

β. Αν έχουμε 15 σφαίρες, ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξουμε σφαίρα με ένδειξη μεγαλύτερη του 3;

35. Σε ένα διαγωνισμό του Δημοσίου για πρόσληψη υπαλλήλων, συμμετείχαν 80.000 υποψήφιοι για 3.400 θέσεις. Οι υποψήφιοι ήταν τριών κατηγοριών: απόφοιτοι Λυκείου, πτυχιούχοι Ανώτερων Σχολών και πτυχιούχοι Ανώτατων Σχολών. Τα ποσοστά επιτυχία για κάθε κατηγορία υποψηφίων ήταν 3% για τους απόφοιτους Λυκείου, 6% για τους πτυχιούχους Ανώτατων Σχολών και 5% για εκείνους Ανώτερων Σχολών. Παίρνουμε στην τύχη έναν επιτυχόντα. Να βρείτε την πιθανότητα να είναι:

α. απόφοιτος Λυκείου.

β. πτυχιούχος Ανώτατης Σχολής.

γ. πτυχιούχος Ανώτερης Σχολής.

36. Έστω ο δειγματικός χώρος Ω με ισοπίθανα, απλά ενδεχόμενα.

α. Αν ξέρουμε ότι για κάποιο ενδεχόμενο του Α είναι $P(A) = 0{,}1$ και ότι $21 < N(\Omega) < 31$, να βρείτε τον αριθμό των στοιχείων του Α και κατόπιν εκείνον του Ω.

β. Αν θεωρήσουμε, επίσης, το ενδεχόμενο Β του Ω, το οποίο έχει 28 στοιχεία, να αποδείξετε ότι τα Α, Β δεν είναι ξένα μεταξύ τους.

37. Έστω ο δειγματικός χώρος Ω και τα ενδεχόμενά του Α, Β. Αν γνωρίζουμε ότι: $P(A') = 2\cdot P(A\cap B)$ και $2\cdot P(B') = P(A\cup B)$ τότε αποδείξετε ότι:

α. $P(B) \geq 1/2$

β. $3\cdot P(A) + 6\cdot P(B) = 5$

γ. $P(A) \leq 2/3$

38. Έστω ο δειγματικός χώρος Ω και τα μη κενά ενδεχόμενά του Α, Β, ώστε $P(A\cup B) - P(A) = P(A\cap B) - P(B)$.

α. Να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β δεν είναι ξένα μεταξύ τους.

β. Να αποδείξετε ότι η πιθανότητα του $A\cup B$ είναι ανεξάρτητη της πιθανότητας του Β.

γ. Να αποδείξετε ότι $P(B) \leq P(A)$.

δ. Αν $P(A) + P(B) = 5/6$ και $P(A) \cdot P(B) = 1/6$, τότε να βρείτε τις $P(A)$, $P(B)$.

39. Δίνεται το σύνολο $\Omega = \{ 1, 2, \ldots , \nu \}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ το οποίο υποθέτουμε ότι είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Η πιθανότητα κάθε απλού ενδεχομένου $\kappa\in\Omega$ είναι $P(\kappa) = \kappa/36$, $\kappa = 1, 2, \ldots , \nu$. Εκλέγουμε τυχαίο $\lambda\in\Omega$. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Β = " Η δύναμη $(-1)^{\lambda}$ είναι θετικός ".

40. Έστω $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu \}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, με $P(\omega_1) < P(\omega_2) < \dots < P(\omega_\nu)$, $P(\omega_\nu) = P(\omega_{\nu-1}) + \frac{1}{16}$ για κάθε $\nu > 1$ και $P(\omega_1) = \frac{1}{96}$. Να βρείτε το πλήθος των στοιχειωδών ενδεχομένων του Ω.

41. Έστω Α, Β, Γ ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω.

α. Να διαπιστώσετε, με τη βοήθεια του διαγράμματος Venn, ότι $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$.

β. Να αποδείξετε ότι:

$$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma)$$
$$- P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) - P(B \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma).$$

γ. Ένας αριθμός επιλέγεται τυχαία από τους ακεραίους 1 έως και 50. Να βρείτε την πιθανότητα ο αριθμός αυτός να είναι πολλαπλάσιο του 3 ή πολλαπλάσιο του 5 ή πολλαπλάσιο του 6.

42. Ομοίως:

α. Να δείξετε, με τη βοήθεια του διαγράμματος Venn, ότι $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$.

β. Παίρνουμε στην τύχη έναν ακέραιο αριθμό από τους 1 έως και 50. Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου " Ο αριθμός διαιρείται με το 2, αλλά όχι με το 5 " ;

43. Ένας πωλητής πουλάει μια μονάδα ενός προϊόντος με πιθανότητα 1/2 , σε κάθε επαφή με πελάτη. Η πιθανότητα να μην πουλήσει καμία μονάδα σε ν επισκέψεις πελατών είναι $\frac{1}{2^\nu}$. Πόσους πελάτες πρέπει να επισκεφτεί, ώστε να πουλήσει τουλάχιστον μία μονάδα προϊόντος με πιθανότητα μεγαλύτερη από 95% ;

Υπόδειξη: Α = "Ο πωλητής πουλάει μία τουλάχιστον μονάδα προϊόντος σε μία επίσκεψη". Τότε $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{2^\nu}$ και θέλουμε $P(A) > 95/100$.

44. Αν Α, Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με πιθανότητες $P(A) < P(B)$, οι οποίες είναι ρίζες της εξίσωσης: $\lambda x^2 - \lambda(\kappa + \rho)x + \kappa\rho = 0$, όπου κ, ρ, λ διαδοχικοί ακέραιοι με $1 < \kappa < \rho < \lambda$, τότε να δείξετε ότι:

α. $A \cap B \neq \varnothing$

β. $\kappa + \rho - \lambda \leq P(A \cap B) \leq \kappa$

(Όλες οι ασκήσεις είναι του Μαθηματικού Χ.Γ.Αντωνόπουλου < Mathematica.gr)