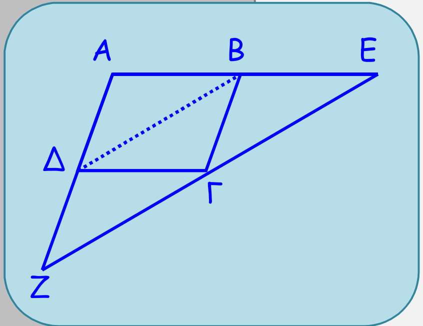
Προεκτεινουμε τις πλευρες ΑΒ και ΑΔ παραλληλογραμμου ΑΒΓΔ κατα τμηματα ΒΕ=ΑΒ και ΔΖ = ΔΑ αντιστοιχως. Να αποδειξετε οτι τα σημεια Ζ, Γ και Ε ειναι συνευθειακα.

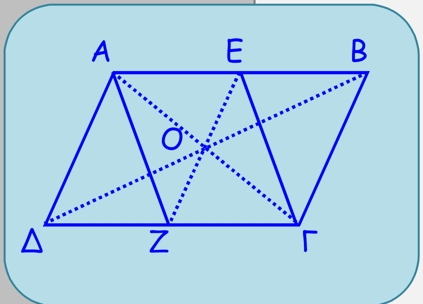
$$\left.\begin{matrix} \text{ΒΕ} =\parallel \text{ΔΓ} \\ \text{ΔΖ} =\parallel \text{ΒΓ} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \text{ΒΕΓΔ παραλληλογραμμο} \\ \text{ΔΖΓΒ παραλληλογραμμο} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{ΓΕ} \parallel \text{ΖΓ} \ (\parallel \text{ΒΔ})$$

Δηλαδη οι παραλληλες ΓΕ, ΖΓ εχουν κοινο σημειο, οποτε ταυτιζονται που σημαινει Ζ, Γ, Ε συνευθειακα σημεια.



Αν Ε και Ζ ειναι τα μεσα των πλευρων ΑΒ και ΓΔ αντιστοιχως, παραλληλογραμμου ΑΒΓΔ, να αποδειξετε οτι οι ΑΓ, ΒΔ και ΕΖ συντρεχουν.

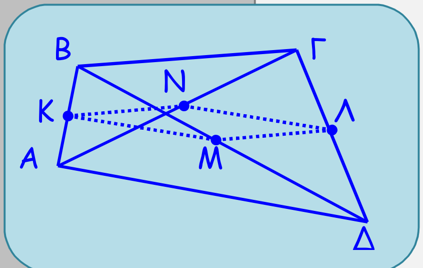
- Το ΑΒΓΔ ειναι παραλληλογραμμο, αρα οι διαγωνιες του ΑΓ, ΒΔ διχοτομουνται σημειο Ο.
- Το ΑΕΓΖ ειναι παραλληλογραμμο (ΑΕ =|| ΖΓ, μισα απεναντι πλευρων παραλληλογραμμου) και η μια διαγωνιος του ειναι η ΑΓ με μεσο το σημειο Ο. Αρα και η αλλη διαγωνιος του ΕΖ θα διερχεται απ'το σημειο Ο.



Δειξτε οτι τα μεσα των διαγωνιων και τα μεσα δυο απεναντι πλευρων κυρτου τετραπλευρου ειναι κορυφες παραλληλογραμμου.

- Στο τριγ. ΑΒΔ : Κ, Μ μεσα των ΑΒ, ΒΔ, αρα $\text{ΚΜ} =\parallel \dfrac{\text{ΑΔ}}{2}$ (1)
- Στο τριγ. ΑΓΔ : Ν, Λ μεσα των ΑΓ, ΓΔ, αρα $\text{ΝΛ} =\parallel \dfrac{\text{ΑΔ}}{2}$ (2)

Απο (1),(2) : ΚΜ =|| ΝΛ που σημαινει ΚΝΛΜ παραλληλογραμμο.

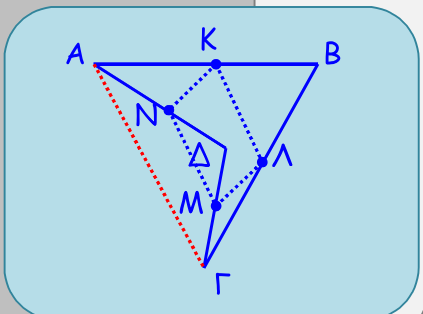


Δειξτε οτι τα μεσα των πλευρων μη κυρτου τετραπλευρου ειναι κορυφες παραλληλογραμμου.

Φερνω το ΑΓ.

- Στο τριγ. ΑΒΓ : Κ, Λ μεσα των ΑΒ, ΒΓ, αρα $\text{ΚΛ} =\parallel \dfrac{\text{ΑΓ}}{2}$ (1)
- Στο τριγ. ΑΔΓ : Μ, Ν μεσα των ΓΔ, ΔΑ, αρα $\text{ΜΝ} =\parallel \dfrac{\text{Γ}}{2}$ (2)

Απο (1),(2) : ΚΛ =|| ΜΝ που σημαινει ΚΛΜΝ παραλληλογραμμο.

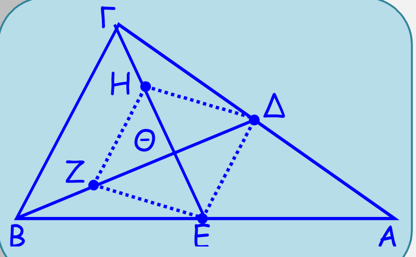


Κανε την επισκεψη σου στο : http://drmaths58.blogspot.com/

Οι διαμεσοι ΒΔ, ΓΕ τριγωνου ΑΒΓ τεμνονται στο Θ. Αν Ζ, Η ειναι τα μεσα των ΒΘ, ΓΘ αντιστοιχα, να δειχτει οτι το ΔΕΖΗ ειναι παραλληλογραμμο.

$$\left.\begin{array}{l} \text{τρ.ΑΒΓ}: \Delta, E \text{ μεσα, αρα } \Delta E =\parallel \dfrac{B\Gamma}{2} \\ \text{τρ.ΒΘΓ}: H, Z \text{ μεσα, αρα } HZ =\parallel \dfrac{B\Gamma}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta E =\parallel HZ \Rightarrow$$

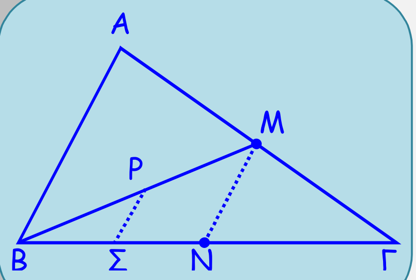
ΔΕΖΗ παραλληλογραμμο.



Θεωρουμε τριγωνο ΑΒΓ και Ρ το μεσο της διαμεσου ΒΜ. Αν Σ σημειο της ΒΓ ωστε $B\Sigma = \dfrac{B\Gamma}{4}$, να δειχτει οτι $\Sigma P =\parallel \dfrac{BA}{4}$.

Ειναι $B\Sigma = \dfrac{BN}{2} = \dfrac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \dfrac{B\Gamma}{4}$. Εστω Ν μεσο της ΒΓ.

$$\left.\begin{array}{l} \text{τρ.ΒΝΜ}: P, \Sigma \text{ μεσα, αρα } P\Sigma =\parallel \dfrac{MN}{2} \\ \text{τρ.ΑΒΓ}: M, N \text{ μεσα, αρα } MN =\parallel \dfrac{AB}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow P\Sigma =\parallel \dfrac{\frac{AB}{2}}{2} =\parallel \dfrac{AB}{4}$$



Να δειχτει οτι τα μεσα πλευρων ορθογωνιου σχηματιζουν ρομβο, ενω τα μεσα των πλευρων ρομβου σχηματιζουν ορθογωνιο.

- $$\left\{\begin{array}{l} \text{τρ.ΑΔΒ}: \Theta, E \text{ μεσα, αρα } \Theta E =\parallel \dfrac{B\Delta}{2} \\ \text{τρ.ΒΔΓ}: H, Z \text{ μεσα, αρα } HZ =\parallel \dfrac{B\Delta}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \Theta E =\parallel HZ \Rightarrow$$

  ΘΕΖΗ παραλληλογραμμο. Ομως $EZ = \dfrac{A\Gamma}{2} = \dfrac{B\Delta}{2} = \Theta E$

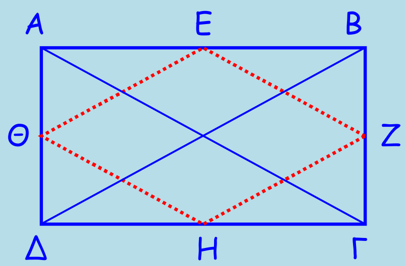
  που σημαινει οτι ΘΕΖΗ ρομβος.

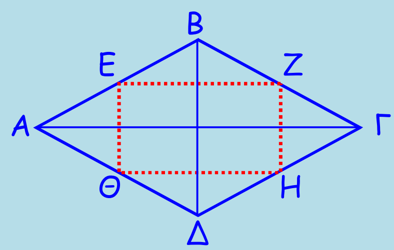
- $$\left\{\begin{array}{l} \text{τρ.ΑΔΒ}: \Theta, E \text{ μεσα, αρα } \Theta E =\parallel \dfrac{B\Delta}{2} \\ \text{τρ.ΒΔΓ}: H, Z \text{ μεσα, αρα } HZ =\parallel \dfrac{B\Delta}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \Theta E =\parallel HZ \Rightarrow$$

  ΘΕΖΗ παραλληλογραμμο.

  Ομως $EZ \parallel A\Gamma$, $\Theta E \parallel B\Delta$, $A\Gamma \perp B\Delta \Rightarrow E\Theta \perp EZ$,

  που σημαινει οτι ΘΕΖΗ ορθογωνιο.





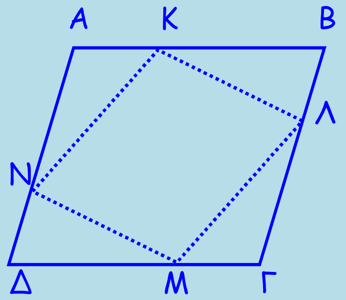
Κανε την επισκεψη σου στο : http://drmaths58.blogspot.com/

Στις πλευρες του παραλληλογραμμου ΑΒΓΔ θεωρουμε τα ισα τμηματα ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ = ΔΝ. Δειξτε οτι το ΚΛΜΝ ειναι παραλληλογραμμο.

$$\left.\begin{array}{l} AK = \Gamma M \ (\text{υποθεση}) \\ AN = \Gamma\Lambda \ (\text{διαφορα ισων}) \\ \hat{A} = \hat{\Gamma} \ (AB\Gamma\Delta \ \text{παραλληλογραμμο}) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A\overset{\Delta}{K}N = \Gamma\overset{\Delta}{\Lambda}M \ \text{και} \\ KN = M\Lambda \ \ (1) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} B\Lambda = \Delta N \ (\text{υποθεση}) \\ BK = \Delta M \ (\text{διαφορα ισων}) \\ \hat{B} = \hat{\Delta} \ (AB\Gamma\Delta \ \text{παραλληλογραμμο}) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} K\overset{\Delta}{B}\Lambda = N\overset{\Delta}{\Delta}M \ \text{και} \\ K\Lambda = MN \ \ (2) \end{array}$$

Απο (1), (2) : ΚΛΜΝ ειναι παραλληλογραμμο.

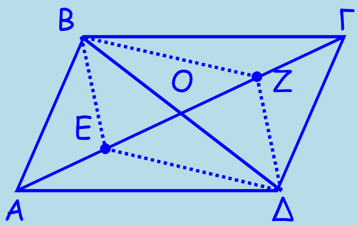


Σε παραλληλογραμμο ΑΒΓΔ τα σημεια Ε, Ζ ειναι μεσα των ΟΑ, ΟΓ αντιστοιχα, οπου Ο το σημειο τομης των διαγωνιων του. Να δειξετε οτι το ΔΕΒΖ ειναι παραλληλογραμμο.

Αφου ΑΒΓΔ ειναι παραλληγραμμο τοτε ΑΓ και ΒΔ διχοτομουν - ται, δηλαδη ΟΒ = ΟΔ (1) και ΟΑ = ΟΓ (2). Ετσι

$$OA = O\Gamma \Rightarrow OE + EA = OZ + Z\Gamma \underset{Z \ \text{μεσο}}{\overset{E \ \text{μεσο}}{\Rightarrow}} 2OE = 2OZ \Rightarrow OE = OZ \ (3)$$

Απο (1) και (3) προκυπτει οτι το ΔΕΒΖ ειναι παραλληλογραμμο.

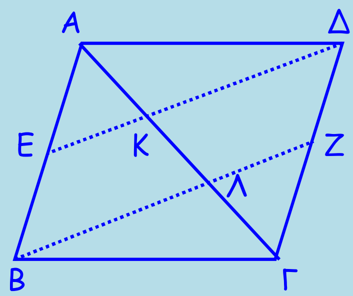


Αν Ε, Ζ ειναι τα μεσα των πλευρων ΑΒ, ΓΔ ενος παραλληλογραμμου ΑΒΓΔ, να δειξετε οτι οι ευθειες ΔΕ, ΒΖ τριχοτομουν την διαγωνιο ΑΓ.

Ειναι ΒΕ =|| ΒΖ (μισα απεναντι πλευρων παραλληλογραμμου), αρα ΒΕ || ΓΖ.

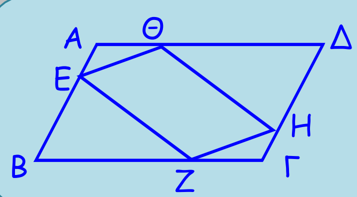
- Στο τριγωνο ΑΒΛ : Ε μεσο της ΑΒ και ΕΚ || ΒΛ. Αρα Κ μεσο της ΑΛ και ΑΚ = ΚΛ (1)
- Στο τριγωνο ΒΓΛ : Ζ μεσο της ΒΓ και ΔΚ || ΖΛ. Αρα Λ μεσο της ΚΓ και ΚΓ = ΚΛ (2)

Απο (1) και (2) προκυπτει : ΑΚ = ΚΛ = ΚΓ.



Στις πλευρες ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ενος παραλληλογραμμου ΑΒΓΔ, παιρνουμε τα σημεια Ε,Ζ,Η,Θ ωστε ΕΖΗΘ παραλληλογραμμο. Δειξτε οτι ΑΕ=ΓΗ και ΑΘ=ΓΖ.

$$\left.\begin{array}{l} E\Theta = ZH \ (\text{απεναντι πλευρες παρ / μου}) \\ \hat{A} = \hat{\Gamma} \ (\text{απεναντι γωνιες παρ / μου}) \\ A\hat{\Theta}E = \Gamma\hat{Z}H \ (\text{πλευρες παραλληλες}) \end{array}\right\} \overset{\Gamma\text{-}\Pi\text{-}\Gamma}{\Rightarrow} \begin{array}{l} A\overset{\Delta}{\Theta}E = \Gamma\overset{\Delta}{Z}H \ \text{αρα} \\ A\Theta = \Gamma Z, \ AE = \Gamma H \end{array}$$



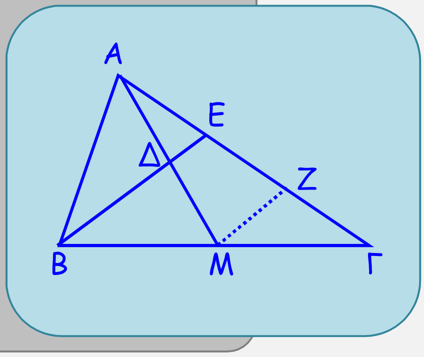
Κανε την επισκεψη σου στο : http://drmaths58.blogspot.com/

Εστω Δ το μεσο της διαμεσου ΑΜ τριγωνου ΑΒΓ. Αν η ΒΔ τεμνει την ΑΓ στο Ε να δειξετε οτι ΕΓ = 2ΑΕ.

Φερνουμε $MZ \parallel BE$.

- Στο τριγωνο ΒΕΓ : Μ μεσο ΒΓ και $MZ \parallel BE$. Αρα Ζ μεσο της ΕΓ και $EZ = Z\Gamma$ (1).
- Στο τριγωνο ΑΜΖ : Δ μεσο ΑΜ και $MZ \parallel \Delta E$. Αρα Ε μεσο της ΑΖ και $AE = EZ$ (2).

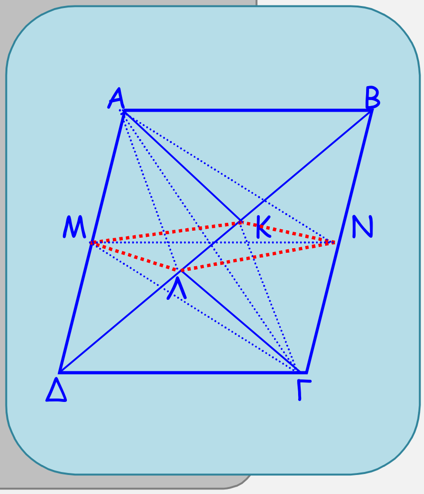
Απο (1) + (2) : $AE + EZ = EZ + Z\Gamma \overset{(1)}{\Rightarrow} AE + AE = E\Gamma \Rightarrow 2AE = E\Gamma$



Απο τις κορυφες Α και Γ παραλληλογραμμου ΑΒΓΔ φερνουμε καθετες προς τη διαγωνιο ΒΔ, τις ΑΚ και ΓΛ αντιστοιχα. Αν Μ, Ν τα μεσα των ΑΒ, ΓΔ αντιστοιχα να δειξετε οτι τα Κ, Λ, Μ, Ν ειναι κορυφες παραλληλογραμμου.

- Το τετραπλευρο ΑΜΓΝ ειναι παραλληλογραμμο, αφου $AM = \parallel \Gamma N$ (μισα απεναντι πλευρων ΑΒΓΔ).
  Αρα εχει διαγωνιες ΑΓ, ΜΝ που διχοτομουνται στο Ο.
- Το τετραπλευρο ΑΚΓΛ ειναι παραλληλογραμμο, αφου
  $AK = \parallel \Gamma\Lambda$ ($\overset{\Delta}{A\Delta B} = \overset{\Delta}{B\Gamma\Delta}$: $AB = \Gamma\Delta$, $A\Delta = B\Gamma$, $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και καθετα στην ιδια ευθεια ΒΔ αρα παραλληλα).
  Αρα εχει διαγωνιες ΑΓ, ΚΛ που διχοτομουνται στο Ο.

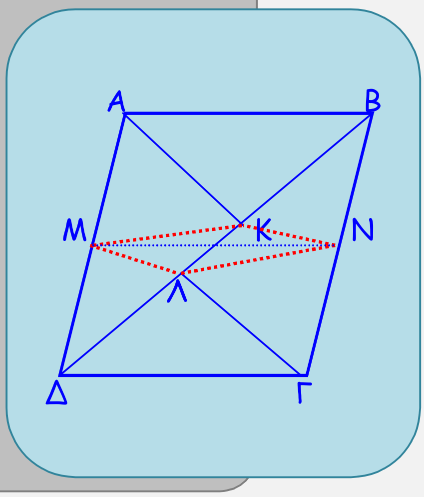
Ετσι το ΜΚΝΛ ειναι παραλληλογραμμο αφου οι διαγωνιες του διχοτομουνται.



Απο τις κορυφες Α και Γ παραλληλογραμμου ΑΒΓΔ φερνουμε καθετες προς τη διαγωνιο ΒΔ, τις ΑΚ και ΓΛ αντιστοιχα. Αν Μ, Ν τα μεσα των ΑΒ, ΓΔ αντιστοιχα να δειξετε οτι τα Κ, Λ, Μ, Ν ειναι κορυφες παραλληλογραμμου.

- Παιρνω Ο μεσο του ΚΛ. Το Ο ειναι και μεσο της ΒΔ γιατι τα τριγωνα ΑΒΚ, ΔΛΓ ειναι ισα (ορθογωνια, $AB = \Gamma\Delta$, $A\hat{B}K = \Lambda\hat{\Delta}\Gamma$)
  δηλαδη : $OK = O\Lambda \overset{KB=\Lambda\Delta}{\Rightarrow} OK + KB = O\Lambda + \Lambda\Delta \Rightarrow OB = O\Delta$.
  Σημ. : Το ιδιο αποτελεσμα αν χρησιμοποιουσαμε το παραλληλογραμμο ΑΚΓΛ (προηγουμενη ασκηση).
- Το Ο ειναι κεντρο συμμετριας του ΑΒΓΔ και τα Μ, Ν συμμετρικα ως προς Ο. Δηλαδη η ΜΝ διερχεται απ' το Ο και $OM = ON$.

Ετσι το ΜΚΝΛ ειναι παραλληλογραμμο αφου οι διαγωνιες του διχοτομουνται.

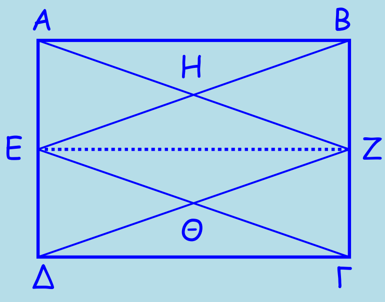


Κανε την επισκεψη σου στο : http://drmaths58.blogspot.com/

Αν Ε, Ζ ειναι τα μεσα των πλευρων ΑΔ, ΒΓ αντιστοιχως ορθογωνιου ΑΒΓΔ, Η το σημειο τομης των ΑΖ, ΒΕ και Θ το σημειο τομης των ΔΖ, ΓΕ, να αποδειξε-τε οτι το ΕΘΖΗ ειναι ρομβος

- Τα ορθογωνια ΑΒΖΕ και ΓΔΕΖ ειναι ισα (ισες πλευρες) οποτε οι διαγωνιες τους (και τα μισα τους) θα ειναι ισες.
  Ετσι : $ΕΗ = ΗΖ = ΖΘ = ΘΕ$ (1)
- Τα ισοσκελη τριγωνα ΗΕΖ και ΘΕΖ ειναι ισα (Π - Π - Π) αρα
  $Η\hat{Ε}Ζ = Ε\hat{Ζ}Θ \Rightarrow ΗΕ \,||\, ΖΘ$ και $Η\hat{Ζ}Ε = Θ\hat{Ε}Ζ \Rightarrow ΗΖ \,||\, ΕΘ$
  Αρα ΕΗΖΘ ειναι παραλληλογραμμο (2)

Απο (1), (2) προκυπτει το ζητουμενο.



Απ'τη κορυφη Α τριγωνου ΑΒΓ φερνω τις καθετες ΑΔ, ΑΕ προς τις διχοτομους (εσωτερικη - εξωτερικη) της γωνιας Β. Να δειχτει οτι :
• ΑΔΒΕ ειναι ορθογωνιο • ΕΔ // ΒΓ.

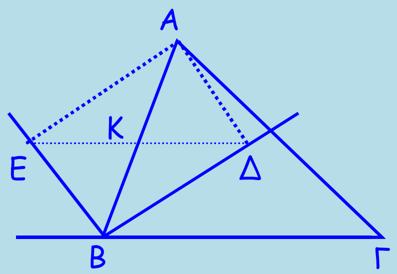
- Ειναι $\hat{Β} + \hat{Β}_{εξ} = 180^0$, οποτε $Ε\hat{Β}Δ = 90^0$

$$\left\{\begin{array}{l} ΑΔ \perp ΒΔ \text{ και } ΕΒ \perp ΒΔ \text{ τοτε } ΑΔ \parallel ΕΒ \\ ΑΕ \perp ΕΒ \text{ και } ΔΒ \perp ΕΒ \text{ τοτε } ΑΕ \parallel ΔΒ \end{array}\right. \Rightarrow ΑΔΒΕ$$

  παραλληλογραμμο και επειδη $Ε\hat{Β}Δ = 90^0$ ειναι ορθογωνιο.
- Το τριγωνο ΚΒΔ ειναι ισοσκελες (απο ορθογωνιο)

  και ειναι : $Α\hat{Κ}Δ = Κ\hat{Β}Δ + Κ\hat{Δ}Γ = 2Κ\hat{Β}Δ = 2\frac{\hat{Β}}{2} = \hat{Β}$.

  Οι $Α\hat{Κ}Δ$, $\hat{Β}$ ειναι εντος - εκτος επι ταυτα, αρα $ΕΔ \,||\, ΒΓ$.

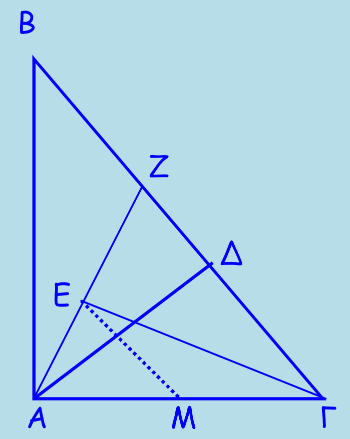


Σε ορθογωνιο τριγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 90^0$) φερνω το υψος ΑΔ. Η διχοτομος της γωνιας $\hat{Γ}$ τεμνει τη διχοτομο της γωνιας $Β\hat{Α}Δ$ στο Ε. Αν Μ ειναι το μεσο της πλευ-ρας ΑΓ, να δειχτει οτι : • το τριγωνο ΜΑΕ ειναι ισοσκελες • ΕΜ // ΒΓ.

$Β\hat{Α}Δ = \hat{Γ}$, $Γ\hat{Α}Δ = \hat{Β}$ (συμπληρωματικες της $\hat{Β}$, $\hat{Γ}$ αντιστοιχα) (1)
Προεκτεινω ΑΕ που τεμνει την ΒΓ στο Ζ.

$$\left.\begin{array}{l} Α\hat{Ζ}Γ = \hat{Β} + \frac{\hat{Γ}}{2} \text{ (εξωτερικη τριγ. ΑΒΖ)} \\ Γ\hat{Α}Ζ = \hat{Β} + \frac{\hat{Γ}}{2} \text{ (λογω (1))} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} Α\hat{Ζ}Γ = Γ\hat{Α}Ζ, \text{ οποτε} \\ \text{τριγ.ΑΖΓ ισοσκελες} \end{array}$$

Ομως στο τριγ. ΑΖΓ η ΓΕ διχοτομος, αρα και υψος και διαμεσος.
- Στο ορθογωνιο τριγωνο ΕΑΓ η ΕΜ διαμεσος, οποτε ΕΜ = ΜΑ, δηλαδη το τριγωνο ΜΑΕ ισοσκελες.
- Στο τριγωνο ΖΑΓ: Ε, Μ μεσα των ΑΖ, ΑΓ οποτε ΕΜ||ΖΓ.



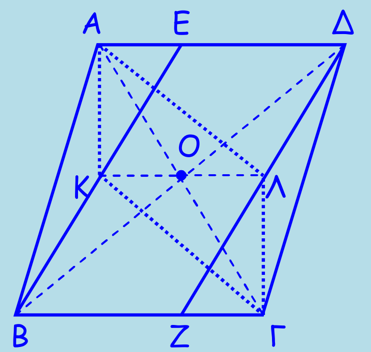
Κανε την επισκεψη σου στο : http://drmaths58.blogspot.com/

Δινεται παραλληλογραμμο ΑΒΓΔ. Πανω στις ΑΒ,ΔΓ αντιστοιχα, θεωρουμε σημεια Ε, Ζ τετοια ωστε ΑΕ = ΓΖ. Αν Κ, Λ μεσα των ΔΕ, ΒΖ αντιστοιχα, να δειξετε οτι το ΑΚΓΛ ειναι παραλληλογραμμο και οτι οι ΚΛ, ΑΓ, ΔΒ συντρεχουν.

Εστω Ο η τομη των διαγωνιων του παραλληλογραμμου ΑΒΓΔ.

- Στο $\overset{\Delta}{\Delta E B}$: Κ μεσο ΔΕ και Ο μεσο ΒΔ. Ετσι $KO =|| \dfrac{EB}{2}$ (1)
- Στο $\overset{\Delta}{Z\Delta B}$: Λ μεσο ΒΖ και Ο μεσο ΒΔ. Ετσι $\Lambda O =|| \dfrac{\Delta Z}{2}$ (2)
- ΕΒ = ΔΖ (3) σαν διαφορες ισων τμηματων.

Απο (1),(2),(3) : ΚΟ =|| ΛΟ, δηλαδη Ο μεσο του ΚΛ.
Τελικα το ΑΚΓΛ ειναι παραλληλογραμμο αφου οι διαγωνιες του ΑΓ και ΚΛ διχοτομουνται.



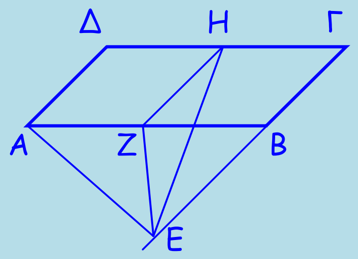
Σε παραλληλογραμμο ΑΒΓΔ ειναι ΑΒ=2ΒΓ και ΑΕ το υψος. Αν Ζ, Η ειναι τα μεσα των πλευρων ΑΒ, ΔΓ αντιστοιχα, να δειχτει οτι η ΖΕ διχοτομει τη γωνια $\Gamma\hat{E}Z$.

Στο ορθογωνιο τριγωνο ΑΒΕ η ΕΖ ειναι διαμεσος, οποτε :

$EZ = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{2B\Gamma}{2} = B\Gamma = ZH \Rightarrow \overset{\Delta}{EZH}$ ισοσκελες και $Z\hat{E}H = Z\hat{H}E$ (1)

ΖΗ || ΒΓ που τεμνει η ΕΗ, αρα $H\hat{E}B = Z\hat{H}E$ (2) (εντος εναλλαξ)

Απο (1),(2) : $Z\hat{E}H = H\hat{E}B$, δηλαδη ΕΗ διχοτομος της $Z\hat{E}\Gamma$.



Σ'ενα τριγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A} = 45^0$ και $\hat{\Gamma} = 30^0$ φερνουμε τη διαμεσο ΑΜ. Να δειχτει οτι $M\hat{A}B = 30^0$.

Φερνουμε το υψος ΒΗ. Στο ορθογωνιο τριγωνο ΒΗΓ η ΗΜ ειναι διαμεσος, οποτε :

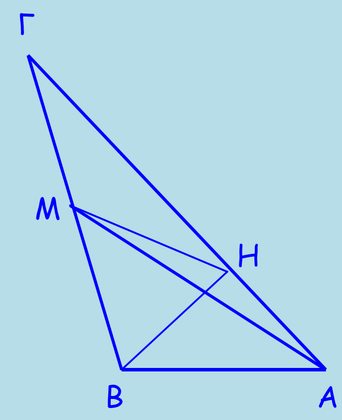
$HM = \dfrac{B\Gamma}{2} = BM = M\Gamma = BH$ (αφου $\hat{\Gamma} = 30^0$), δηλαδη τριγωνο ΒΗΜ ισοπλευρο και $H\hat{B}M = 60^0 \Rightarrow H\hat{B}A = 105^0 - 60^0 = 45^0$.

Ομως και $\hat{A} = 45^0$, αρα το τριγωνο ΑΗΒ ισοσκελες.

Στο τριγωνο ΑΗΜ : $M\hat{H}\Gamma = H\hat{A}M + H\hat{M}A \overset{AH=HM}{\Rightarrow} M\hat{H}\Gamma = 2H\hat{A}M \Rightarrow$

$90^0 - 60^0 = 2H\hat{A}M \Rightarrow H\hat{A}M = 15^0$

Τελικα : $M\hat{A}B = \hat{A} - H\hat{A}M = 45^0 - 15^0 = 30^0$



Κανε την επισκεψη σου στο : http://drmaths58.blogspot.com/

Αν Ε, Ζ ειναι αντιστοιχως τα μεσα των πλευρων ΒΓ και ΓΔ παραλληλογραμμου ΑΒΓΔ, να αποδειξετε οτι οι ΑΕ και ΑΖ τριχοτομουν τη διαγωνιο ΒΔ.

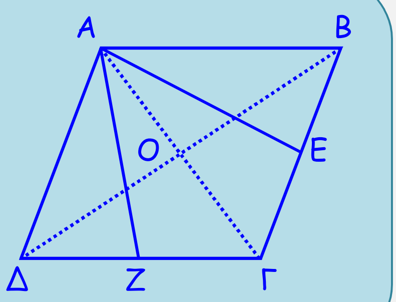
Εστω Ο η τομη των διαγωνιων του παραλληλογραμμου ΑΒΓΔ.

• Στο $\overset{\triangle}{\Delta A\Gamma}$: Θ το βαρυκεντρο και $\Delta\Theta = \frac{2}{3}\Delta O = \frac{2}{3}\cdot\frac{B\Delta}{2} = \frac{B\Delta}{3}$ (1)

• Στο $\overset{\triangle}{BA\Gamma}$: Η το βαρυκεντρο και $HB = \frac{2}{3}BO = \frac{2}{3}\cdot\frac{B\Delta}{2} = \frac{B\Delta}{3}$ (2)

• $\Theta H = B\Delta - \Delta\Theta - HB = B\Delta - \frac{B\Delta}{3} - \frac{B\Delta}{3} = \frac{B\Delta}{3}$ (3)

Απο (1),(2),(3) προκυπτει το ζητουμενο.



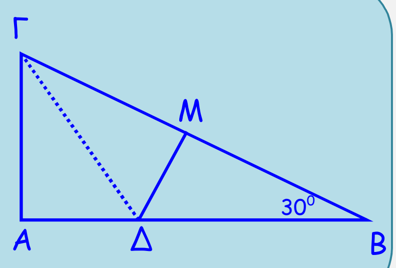
Σε ορθογωνιο τριγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) με $\hat{B} = 30^0$ και Μ μεσο της υποτεινουσας η μεσοκαθετη της ΒΓ τεμνει την ΑΒ στο Δ. Δειξτε οτι ΜΔ=ΑΔ=ΑΒ/3.

Τα ορθογωνια τριγωνα ΒΔΜ και ΑΓΔ ειναι ισα γιατι :

$$\left.\begin{array}{l} \Delta B = \Delta\Gamma \ (\Delta M \text{ μεσοκαθετη}) \\ MB = A\Gamma \ (AB\Gamma \text{ ορθογωνιο}, \hat{B} = 30^0) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta M = \Delta A \quad (1)$$

• Στο ορθογωνιο τριγωνο ΒΔΜ , $\hat{B} = 30^0$, οποτε

$$2\Delta M = B\Delta \Rightarrow 2\Delta M = AB - A\Delta \overset{(1)}{\Rightarrow} 3\Delta M = AB \Rightarrow \Delta M = \frac{AB}{3}$$



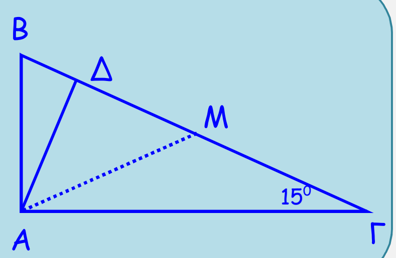
Σε ορθογωνιο τριγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) με υψος ΑΔ ισχυει ΒΓ=4ΑΔ. Να υπολογισετε τις γωνιες του τριγωνου.

Φερνουμε την διαμεσο ΑΜ. Ειναι γνωστο οτι ΑΜ = ΜΓ = ΜΒ.

Ειναι : $B\Gamma = 4A\Delta \Rightarrow 2AM = 4A\Delta \Rightarrow AM = 2A\Delta$ που σημαινει για το ορθογωνιο τριγωνο ΜΑΔ οτι $\widehat{AM\Delta} = 30^0$.

Στο τριγωνο ΑΜΓ : $\widehat{AM\Delta} = \widehat{MA\Gamma} + \hat{\Gamma} \overset{AM=M\Gamma}{\Rightarrow} 30^0 = 2\hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{\Gamma} = 15^0$

Ακομη, $\hat{B} = 90^0 - \hat{\Gamma} = 90^0 - 15^0 = 75^0$



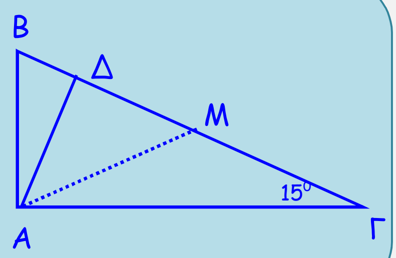
Σε ορθογωνιο τριγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) με υψος ΑΔ και $\hat{\Gamma} = 15^0$ να δειξετε οτι ισχυει ΒΓ=4ΑΔ.

Φερνουμε την διαμεσο ΑΜ. Ειναι γνωστο οτι ΑΜ = ΜΓ = ΜΒ.

Στο τριγωνο ΑΜΓ : $\widehat{AM\Delta} = \widehat{MA\Gamma} + \hat{\Gamma} \overset{AM=M\Gamma}{\Rightarrow} \widehat{AM\Delta} = 2\hat{\Gamma} = 30^0$.

Για το ορθογωνιο τριγωνο ΜΑΔ η $\widehat{AM\Delta} = 30^0$ οποτε

$$A\Delta = \frac{AM}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4} \Rightarrow B\Gamma = 4A\Delta$$



Κανε την επισκεψη σου στο : http://drmaths58.blogspot.com/

Δινεται ισοσκελες τραπεζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ || ΓΔ) με ΑΔ = ΑΒ = ΒΓ και ΔΒ = ΔΓ. Να βρεθουν οι γωνιες του τραπεζιου.

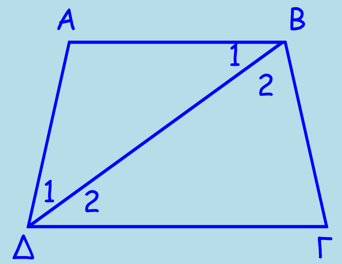
$$\left.\begin{array}{l}\text{Τριγ.ΑΔΒ ισοσκελες}: \hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 \\ AB \parallel \Delta\Gamma : \hat{B}_1 = \hat{\Delta}_2\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = \frac{\hat{\Delta}}{2}$$

Στο τριγωνο ΑΔΒ (ΔΒ = ΔΓ) : $\hat{\Gamma} = \hat{B}_2 (= \hat{\Delta})$

$\hat{B} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \frac{\hat{\Delta}}{2} + \hat{\Delta} = \frac{3\hat{\Delta}}{2} = \hat{A}$. Ετσι

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^0 \Rightarrow \frac{3\hat{\Delta}}{2} + \frac{3\hat{\Delta}}{2} + \hat{\Delta} + \hat{\Delta} = 360^0 \Rightarrow 5\hat{\Delta} = 360^0$

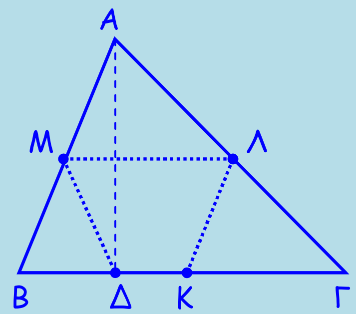
$\Rightarrow \hat{\Delta} = 72^0 = \hat{\Gamma}$ και $\hat{A} = 180^0 - \hat{\Delta} = 180^0 - 72^0 = 108^0 = \hat{B}$



Σε τριγωνο ΑΒΓ εχουμε υψος ΑΔ και Κ, Λ, Μ τα μεσα των πλευρων του ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντιστοιχα. Να δειχτει οτι το ΚΛΜΔ ειναι ισοσκελες τραπεζιο.

- Στο τριγωνο ΑΒΓ (Μ, Λ μεσα των ΑΒ, ΑΓ) :
  ΜΛ || ΒΓ που σημαινει οτι ΚΛΜΔ τραπεζιο.
- Στο τριγωνο ΑΒΓ (Κ, Λ μεσα των ΒΓ, ΑΓ) : $K\Lambda = \frac{AB}{2}$ (1)
- Στο τριγωνο ΑΒΔ : $\hat{\Delta} = 90^0$ και ΔΜ διαμεσος : $\Delta M = \frac{AB}{2}$ (2)

  Απο τις (1) και (2) ΚΛ = ΔΜ που σημαινει οτι το τραπεζιο ΚΛΜΔ ειναι ισοσκελες.



Σε ισοσκελες τραπεζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ = ΒΓ) να δειξετε οτι οι μεσοκαθετες των μη παραλληλων πλευρων τεμνονται σε σημειο που ισαπεχει απ'τις κορυφες.

Αφου ΟΜ, ΟΝ ειναι μεσοκαθετοι των ΑΔ και ΒΓ αντιστοιχα :

ΟΑ = ΟΔ και ΟΒ = ΟΓ (1)

Φερνω την ΜΝ που ειναι παραλληλη στις βασεις και ειναι :

ΑΜ = ΒΝ (2) μισα ισων πλευρων, και $A\hat{M}N = B\hat{N}M$ (3) αφου και ΑΒΝΜ ισοσκελες τραπεζιο.

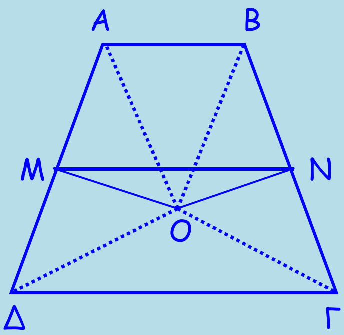
Απο (3) : $A\hat{M}N = B\hat{N}M \Rightarrow 90^0 - A\hat{M}N = 90^0 - B\hat{N}M \Rightarrow$

$O\hat{M}N = O\hat{N}M$ αρα το τριγωνο ΟΜΝ ισοσκελες και ΟΜ = ΟΝ (4)

Τα τριγωνα ΟΜΑ και ΟΝΒ ειναι ισα γιατι :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ορθογωνια} \\ AM = BN \text{ απο } (2) \\ OM = ON \text{ απο } (4)\end{array}\right\} \Rightarrow OA = OB\ (5)$$

Απο (1) και (5) : ΟΑ = ΟΔ = ΟΒ = ΟΓ .



Κανε την επισκεψη σου στο : http://drmaths58.blogspot.com/

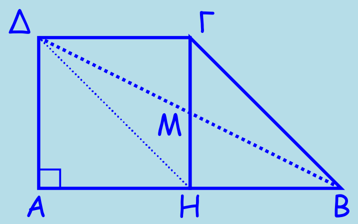
Δινεται ορθογωνιο τραπεζιο ΑΒΓΔ ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$) και το υψος του ΓΗ.
Αν $2\Gamma\Delta = AB$ και $\hat{\Gamma} = 3\hat{B}$, να δειχτει οτι :
• Το ΑΗΓΔ ειναι τετραγωνο • Η ΔΒ διχοτομει το υψος ΓΗ.

• Το τετραπλευρο ΑΗΓΔ ειναι ορθογωνιο ($\Delta\Gamma \parallel AH$, $\Delta A \parallel \Gamma H$, $\hat{A} = 90^0$) οποτε $AH = \Delta\Gamma = \frac{AB}{2}$. Αρα $AH = \Delta\Gamma = HB$ (1)

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\Gamma} = 3\hat{B} \\ \hat{\Gamma} + \hat{B} = 180^0 \ (A\Gamma \parallel AB)\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}3\hat{B} + \hat{B} = 180^0 \Rightarrow 4\hat{B} = 180^0 \Rightarrow \\ \hat{B} = 45^0 \Rightarrow \overset{\triangle}{H B \Gamma} \text{ ισοσκελες}\end{array}$$

Αρα $\Gamma H = HB$, οποτε λογω της (1) το ΑΗΓΔ ειναι τετραγωνο.

• $A\Gamma = \parallel HB$ οποτε ΔΓΒΗ ειναι παραλληλογραμμο και οι διαγωνι - ες του διχοτομουνται. Αρα ΔΒ διχοτομει το ΓΗ.



Θεωρουμε τραπεζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Φερουμε την $BE \perp \Delta\Gamma$ που τεμνει την ΑΓ στο Κ και την ΑΕ που τεμνει την ΒΔ στο Λ.
Να δειχτει οτι : • $\hat{\Gamma} = 45^o$ • $B\Delta = AE$ • $\Lambda K = \frac{\Delta\Gamma}{4}$

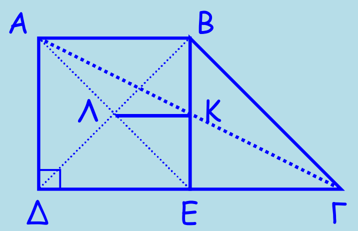
Ειναι $\Delta\Gamma = 2AB$, $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$, $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^0$.

• $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^0 \Rightarrow 3\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^0 \Rightarrow 4\hat{\Gamma} = 180^0 \Rightarrow \hat{\Gamma} = 45^0$

• $A\Delta \parallel = BE$ (αποστασεις παραλληλων) και $\hat{A} = 90^0$, αρα ΑΒΕΔ ορθογωνιο και κατα συνεπεια $AE = B\Delta$.

• Απ'τα πιο πανω ειναι $\Delta E = E\Gamma = AB$ και $AB \parallel E\Gamma$.
Ετσι το ΑΒΓΕ ειναι παραλληλογραμμο και το Κ μεσο της ΑΓ.
Ομως και το Λ ειναι μεσο της ΑΕ, οποτε στο τριγωνο ΑΕΒ :

$$K\Lambda = \frac{AB}{2} = \frac{\frac{AB}{2}}{2} = \frac{\Delta\Gamma}{4}.$$



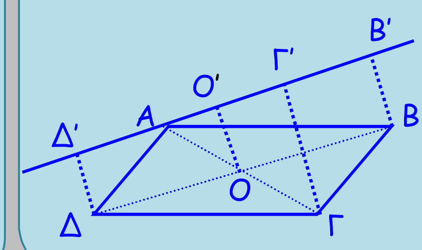
Ευθεια ε περναει απο τη κορυφη Α και αφηνει το παραλληλογραμμο ΑΒΓΔ προς το ιδιο μερος της. Αν ΒΒ', ΓΓ', ΔΔ' ειναι οι αποστασεις των Β, Γ, Δ απ'την ε αντι - στοιχα, να δειχτει οτι : $\Gamma\Gamma' = BB' + \Delta\Delta'$.

• Η ΟΟ' ειναι διαμεσος του τραπεζιου ΒΒ'Δ'Δ και

$$OO' = \frac{BB' + \Delta\Delta'}{2} \quad (1)$$

• Στο τριγωνο ΑΓΓ' (Ο,Ο' μεσα των ΑΓ, Α'Γ') : $OO' = \frac{\Gamma\Gamma'}{2}$ (2)

Απο (1) και (2) : $\frac{\Gamma\Gamma'}{2} = \frac{BB' + \Delta\Delta'}{2} \Rightarrow \Gamma\Gamma' = BB' + \Delta\Delta'$



Κανε την επισκεψη σου στο : http://drmaths58.blogspot.com/

Αν Α΄,Β΄,Γ΄,Δ΄ και Κ΄ ειναι αντιστοιχως οι προβολες των κορυφων και του κεντρου Κ παραλληλογραμμου ΑΒΓΔ σε μια ευθεια ε που αφηνει ολες τις κορυφες προς το ιδιο μερος της, να αποδειξετε οτι: ΑΑ΄+ ΒΒ΄+ ΓΓ΄+ ΔΔ΄ = 4ΚΚ΄

• Η ΚΚ' ειναι διαμεσος του τραπεζιου ΒΒ'Δ'Δ και

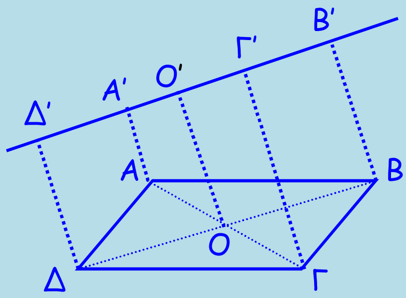
$$\text{KK}' = \frac{\text{BB}' + \Delta\Delta'}{2} \quad (1)$$

• Η ΚΚ' ειναι διαμεσος του τραπεζιου ΑΑ'Γ'Γ και

$$\text{KK}' = \frac{\text{AA}' + \Gamma\Gamma'}{2} \quad (2)$$

Απο (1) + (2) : $2\text{KK}' = \frac{\text{AA}' + \Gamma\Gamma'}{2} + \frac{\text{BB}' + \Delta\Delta'}{2} \Rightarrow$

$$2\text{KK}' = \frac{\text{AA}' + \text{BB}' + \Gamma\Gamma' + \Delta\Delta'}{2} \Rightarrow 4\text{KK}' = \text{AA}' + \text{BB}' + \Gamma\Gamma' + \Delta\Delta'.$$

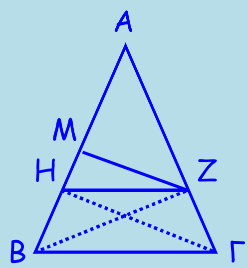


Δινεται ισοσκελες τριγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Μ μεσο της πλευρας ΑΒ. Φερνουμε τη μεσοκαθετη της ΑΒ που τεμνει την ΑΓ στο Ζ. Αν ΖΗ // ΒΓ, να αποδειξετε οτι ΓΗ = ΑΖ.

• $\left.\begin{array}{l} \text{HZ} \parallel \text{B}\Gamma \text{ (υποθεση)} \\ \hat{\text{B}} = \hat{\Gamma} \text{ (}\overset{\triangle}{\text{AB}\Gamma} \text{ ισοσκελες)} \end{array}\right\} \Rightarrow$ ΗΖΓΒ ειναι ισοσκελες τραπεζιο και ΒΖ = ΓΗ (1)

• Η ΖΜ ειναι μεσοκαθετη της ΑΒ, αρα ΑΖ = ΖΒ (2)

Απο (1), (2) : ΑΖ = ΓΗ

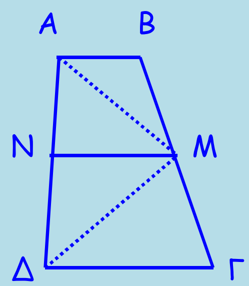


Δινεται τραπεζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΔΓ) και Μ μεσο της πλευρας ΒΓ. Αν ΑΔ = ΑΒ + ΓΔ να δειξετε οτι $\widehat{\text{AM}\Delta} = 90^0$.

Φερνουμε τη διαμεσο ΜΝ.

• Ειναι $\text{MN} = \frac{\text{AB} + \Gamma\Delta}{2} = \frac{\text{A}\Delta}{2}$

• Στο τριγωνο ΑΜΔ, η ΜΝ ειναι διαμεσος στην πλευρα ΑΔ και ισχυει $\text{MN} = \frac{\text{A}\Delta}{2}$. Αρα το τριγωνο ΑΜΔ ειναι ορθογωνιο με $\widehat{\text{AM}\Delta} = 90^0$.



Κανε την επισκεψη σου στο : http://drmaths58.blogspot.com/

Εστω τραπεζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ=ΒΓ+ΑΔ.
Να δειξετε οτι οι διχοτομοι των γωνιων $\hat{\Delta}$ και $\hat{\Gamma}$ τεμνονται σε σημειο που βρισκεται πανω στην ΑΒ.

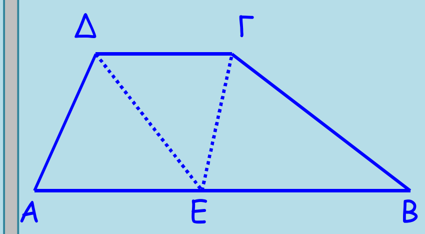
Εστω οτι η διχοτομος της γωνιας $\hat{\Delta}$ τεμνει τη ΑΒ στο Ε.

Θα δειξουμε οτι η ΓΕ ειναι διχοτομος της γωνιας $\hat{\Gamma}$.

$$\left.\begin{array}{l} A\hat{\Delta}E = \Gamma\hat{\Delta}E \ (\Delta E \text{ διχοτομος}) \\ \Gamma\hat{\Delta}E = \Delta\hat{E}A \ (\text{εντος εναλλαξ}, \Delta\Gamma \parallel AB) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \overset{\Delta}{AE\Delta} \text{ ειναι ισοσκελες} \\ \text{αρα } AE = A\Delta \ \ (1) \end{array}$$

Απ'την υποθεση : $AB = B\Gamma + A\Delta \overset{(1)}{\Rightarrow} AB = B\Gamma + AE \Rightarrow$
$AB - AE = B\Gamma \Rightarrow EB = B\Gamma$ που σημαινει οτι το τριγωνο ΕΒΓ ειναι ισοσκελες. Ετσι

$$\left.\begin{array}{l} B\hat{\Gamma}E = \Gamma\hat{E}B \ (\overset{\Delta}{\Gamma EB} \text{ ειναι ισοσκελες}) \\ \Delta\hat{\Gamma}E = \Gamma\hat{E}B \ (\text{εντος εναλλαξ}, \Delta\Gamma \parallel AB) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B\hat{\Gamma}E = \Delta\hat{\Gamma}E, \text{ αρα η } \Gamma E \\ \text{διχοτομος της } \hat{\Gamma}. \end{array}$$

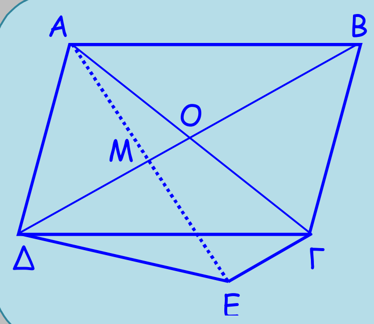


Δινεται παραλληλογραμμο ΑΒΓΔ και το συμμετρικο Ε του σημειου Α ως προς τη διαγωνιο ΒΔ. Να αποδειχθει οτι το ΒΓΕΔ ειναι ισοσκελες τραπεζιο.

Φερνω τις διαγωνιες του ΑΒΓΔ που τεμνονται στο Ο και το συμμετρικο Ε του Α ως προς τη ΒΔ.

- Στο τριγωνο ΑΕΓ : Μ, Ο τα μεσα των πλευρων ΑΕ και ΑΓ αντιστοιχα. Αρα $MO \parallel E\Gamma$ που σημαινει : ΒΓΕΔ τραπεζιο.
- ΔΜ μεσοκαθετη της ΑΕ, οποτε $\Delta E = A\Delta = B\Gamma \overset{A\Delta = B\Gamma}{\Rightarrow} \Delta E = B\Gamma$.

Αρα το τραπεζιο ΒΓΔΕΔ ειναι ισοσκελες αφου $\Delta E = B\Gamma$.



Σε τραπεζιο ΑΒΓΔ η βαση ΔΓ ειναι διπλασια της βασης ΑΒ. Δειξτε οτι οι διαγωνιες ΑΓ, ΒΔ τριχοτομουν τη διαμεσο ΜΝ.

Η ΜΝ ειναι παραλληλη στις βασεις και τεμνει τισ ΒΔ, ΑΓ στα σημεια Ε, Ζ αντιστοιχα. Ετσι

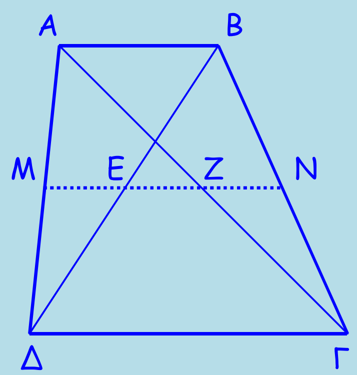
$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{AB\Delta} : M \text{ μεσο } A\Delta \\ ME \parallel AB \end{array}\right\} \Rightarrow E \text{ μεσο της } B\Delta \text{ και } ME = \frac{AB}{2} \ \ (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{AB\Gamma} : N \text{ μεσο } B\Gamma \\ ZN \parallel AB \end{array}\right\} \Rightarrow Z \text{ μεσο της } A\Gamma \text{ και } ZN = \frac{AB}{2} \ \ (2)$$

Αφου Ε, Ζ μεσα των διαγωνιων, τοτε :

$$EZ = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2} \Rightarrow EZ = \frac{2AB - AB}{2} \Rightarrow EZ = \frac{AB}{2} \ \ (3)$$

Απ'τις (1),(2),(3) προκυπτει το ζητουμενο.



Κανε την επισκεψη σου στο : http://drmaths58.blogspot.com/