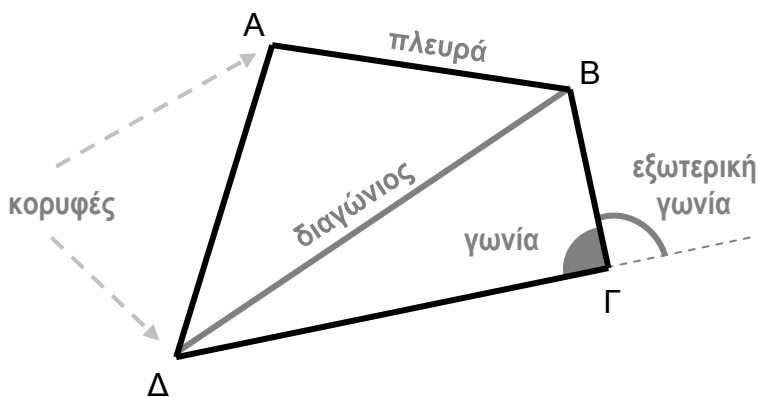




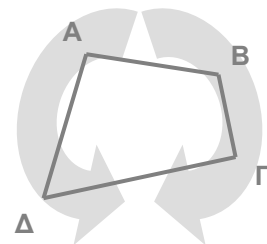
Παραλληλόγραμμα Τραπέζια

1. Γενικά για τα τετράπλευρα

Ένα τετράπλευρο θα λέγεται **κυρτό** αν η προέκταση οποιασδήποτε πλευράς του αφήνει το σχήμα από το ίδιο μέρος (στο ίδιο ημιεπίπεδο, όπως λέμε καλύτερα).



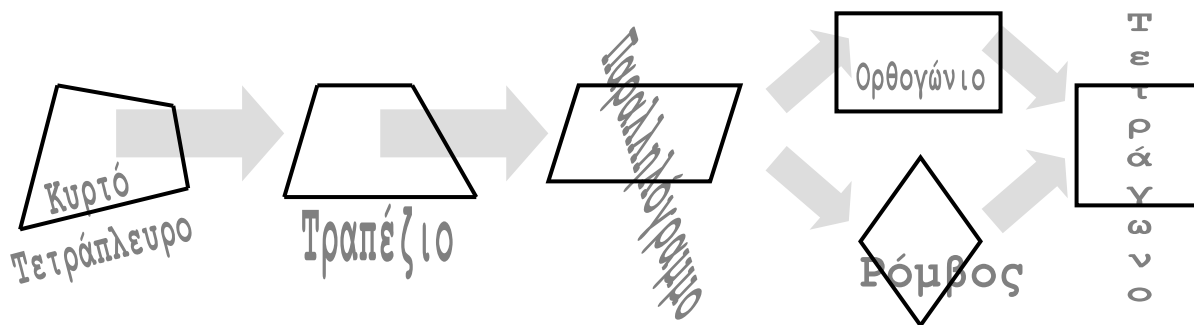
Δεν διαβάζουμε τα γράμματα στην τύχη αλλά με την ίδια φορά πάντα, πχ. δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ ή ΑΔΓΒ, όμως όχι ΑΒΔΓ!



Γνωρίζουμε ότι «Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού n -γώνου είναι $2n - 4$ ορθές». Συνεπώς:

Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού τετράπλευρου είναι 4 ορθές ή 360° .

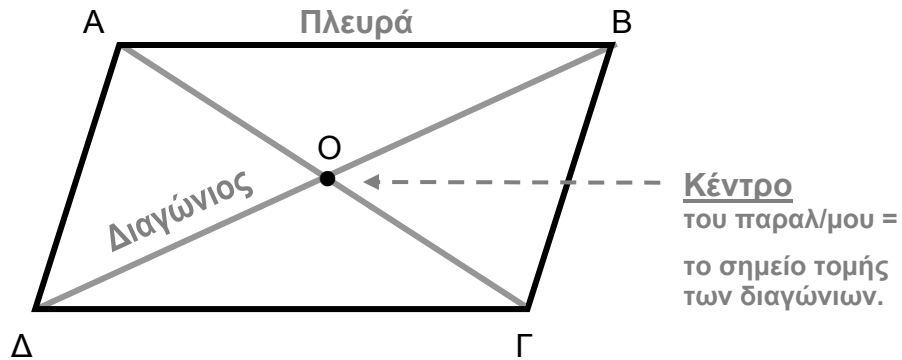
Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε κάποια χαρακτηριστικά κυρτά τετράπλευρα. Αν τα ταξινομήσουμε από το πιο αφηρημένο στο πιο συγκεκριμένο, θα έχουμε:



2. Παραλληλόγραμμο

Το λέει και τ' όνομά του:

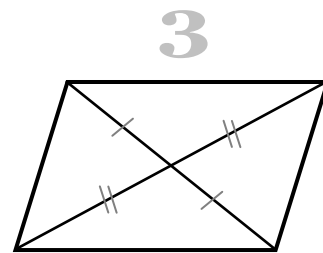
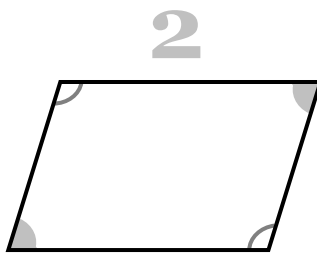
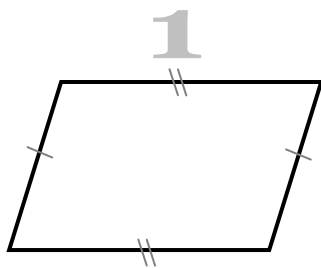
Παραλληλόγραμμο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ παραλληλόγραμμου

Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύει ότι:

1. Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.
2. Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.
3. Οι διαγώνιοι διχοτομούνται.



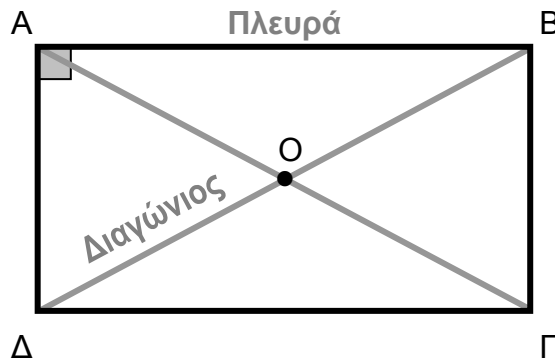
ΚΡΙΤΗΡΙΑ παραλληλόγραμμου

Τα κριτήρια χρειάζονται, προκειμένου να καταλάβουμε αν ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο. Για να είναι, λοιπόν, παραλληλόγραμμο θα πρέπει:

1. Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες. (Ορισμός)
2. Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες. (Ιδιότητα)
3. Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες. (Ιδιότητα)
4. Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. (Ιδιότητα)
5. Δύο απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες ΚΑΙ ίσες.

3. Ορθογώνιο (παραλληλόγραμμο)

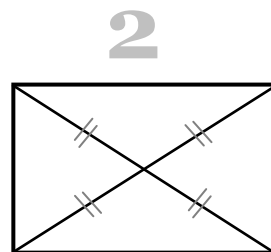
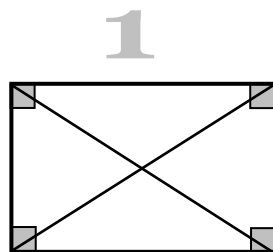
Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο εκείνο που έχει μία γωνία ορθή.



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ορθογώνιου παραλληλόγραμμου

Σε κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ισχύουν, φυσικά, όλες οι ιδιότητες των παραλληλόγραμμων. Επιπλέον όμως ισχύει ότι:

1. Όλες οι γωνίες είναι ορθές.
2. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.



ΚΡΙΤΗΡΙΑ ορθογώνιου παραλληλόγραμμου

Για να καταλάβουμε πότε ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο θα πρέπει:

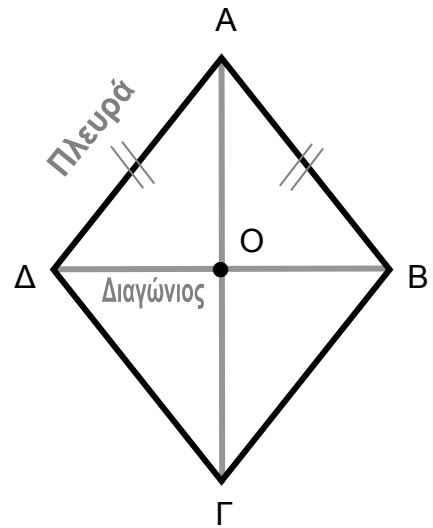
1. Να είναι παραλληλόγραμμο και να έχει μία γωνία ορθή. (Ορισμός)
2. Να είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του να είναι ίσες. (Ιδιότητα)
3. Να είναι ένα τετράπλευρο με τρεις γωνίες ορθές.
4. Να είναι ένα τετράπλευρο με όλες τις γωνίες του ίσες.

4. Ρόμβος

Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο εκείνο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

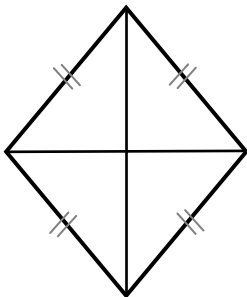
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ρόμβου

Σε κάθε ρόμβο ισχύουν, επίσης, όλες οι ιδιότητες των παραλληλόγραμμων. Επιπλέον όμως ισχύει ότι:

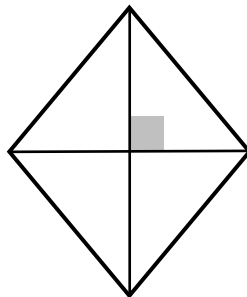


1. Όλες οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες.
2. Οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
3. Οι διαγώνιοί του διχοτομούν τις γωνίες του.

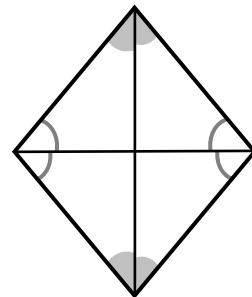
1



2



3



ΚΡΙΤΗΡΙΑ ρόμβου

Για να καταλάβουμε πότε ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος θα πρέπει:

1. Να είναι παραλληλόγραμμο και να έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες. (Ορισμός)
2. Να είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του να τέμνονται κάθετα. (Ιδιότητα)
3. Να είναι παραλληλόγραμμο και μια διαγώνιός του να διχοτομεί μία γωνία του. (Ιδιότητα)
4. Να είναι ένα τετράπλευρο με όλες τις πλευρές του ίσες. (Ιδιότητα)

Παρατηρούμε ότι: Η 3^η ιδιότητα αρκεί να ισχύει για ΜΙΑ μόνο διαγώνιο.

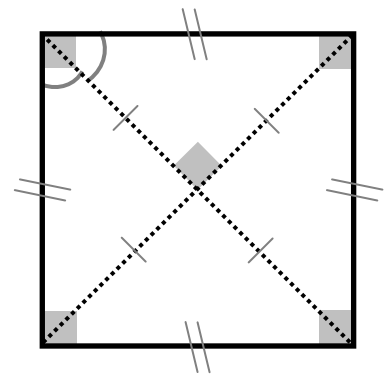
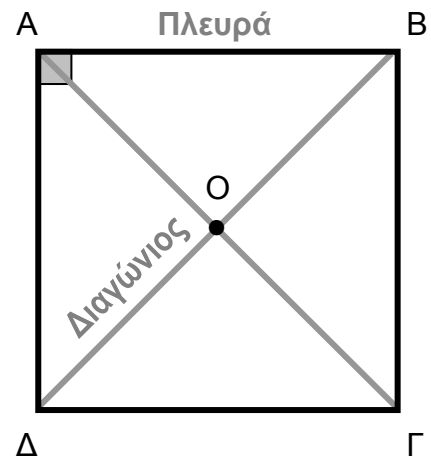
5. Τετράγωνο

Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο εκείνο που είναι συγχρόνως ορθογώνιο και ρόμβος.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ τετραγώνου

Σε κάθε τετράγωνο ισχύουν, συγχρόνως, όλες οι ιδιότητες των παραλληλόγραμμων, των ορθογώνιων και των ρόμβων.

1. Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.
2. Όλες του οι πλευρές είναι ίσες.
3. Όλες του οι γωνίες είναι ορθές.
4. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες, τέμνονται κάθετα, διχοτομούνται και διχοτομούν τις γωνίες του.



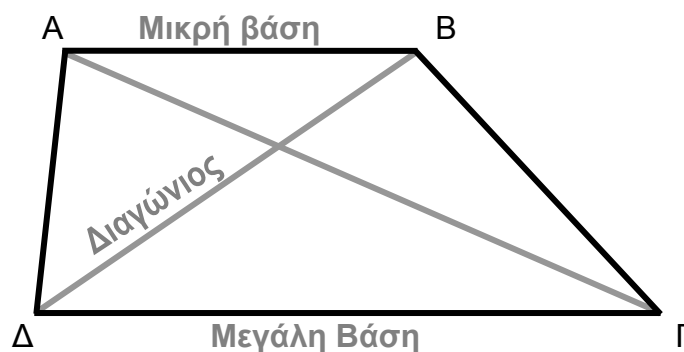
ΚΡΙΤΗΡΙΑ τετραγώνου

Για να δείξουμε πως ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο, αρκεί να δείξουμε πως είναι παραλληλόγραμμο, για το οποίο ισχύουν μία ιδιότητα του ορθογωνίου και μία του ρόμβου. Δηλαδή, είναι καταρχήν παραλληλόγραμμο και επιπλέον:

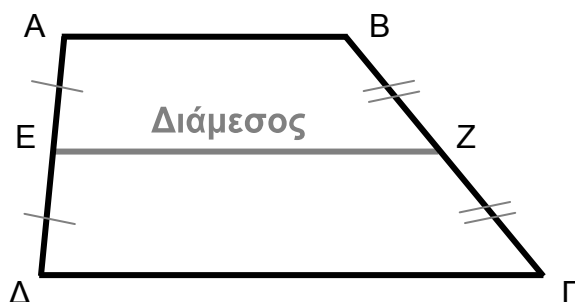
- | Ορθογώνιο | | Ρόμβος |
|--------------------------------|-----|--|
| 1. Μια γωνία του είναι ορθή | και | δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες. |
| 2. Μια γωνία του είναι ορθή | και | μία διαγώνιος του διχοτομεί μια γωνία του. |
| 3. Μια γωνία του είναι ορθή | και | οι διαγώνιοί του είναι κάθετες. |
| 4. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες | και | δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες. |
| 5. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες | και | η μία διχοτομεί μια γωνία του. |
| 6. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες | και | κάθετες. |

6. Τραπεζίιο

Τραπεζίιο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.

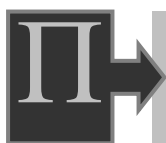


Η διάμεσος ενός τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους.

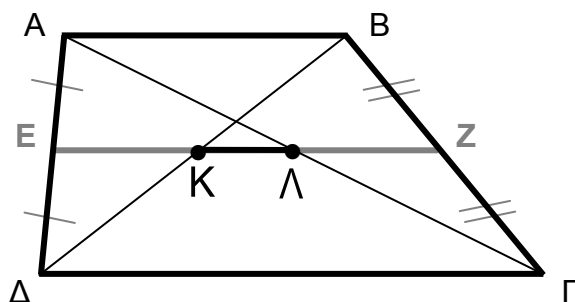


$EZ \parallel AB, \Delta\Gamma$ και

$$EZ = \frac{AB + \Delta\Gamma}{2}$$



- α) Η διάμεσος EZ ενός τραπεζίου ABΓΔ διέρχεται από τα μέσα K και Λ των διαγωνίων του και
β) το τμήμα ΚΛ είναι, επίσης, παράλληλο με τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά τους.



$K\Lambda \parallel AB, \Delta\Gamma$ και

$$K\Lambda = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2}$$

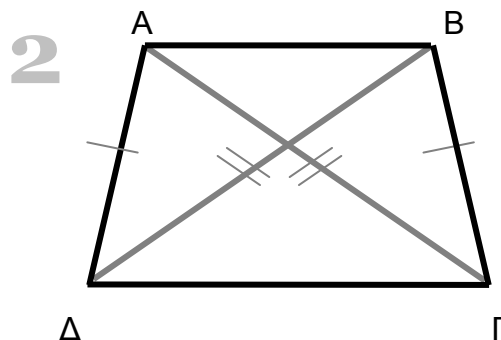
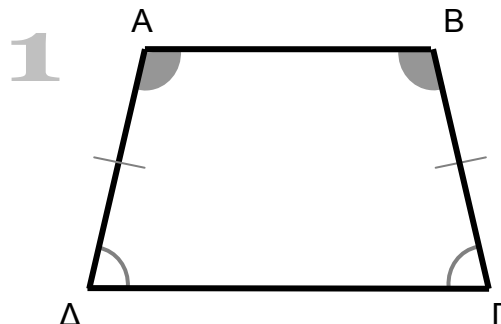
7. Ισοσκελές Τραπέζιο

Ισοσκελές λέγεται το τραπέζιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ισοσκελούς τραπέζιου

Σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο ισχύουν τα παρακάτω:

1. Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες.
2. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.



ΚΡΙΤΗΡΙΑ ισοσκελούς τραπέζιου

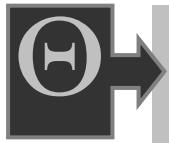
Ένα τραπέζιο θα είναι ισοσκελές, αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:

1. Οι μη παράλληλες πλευρές του είναι ίσες. (Ορισμός)
2. Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες. (Ιδιότητα)
3. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες. (Ιδιότητα)

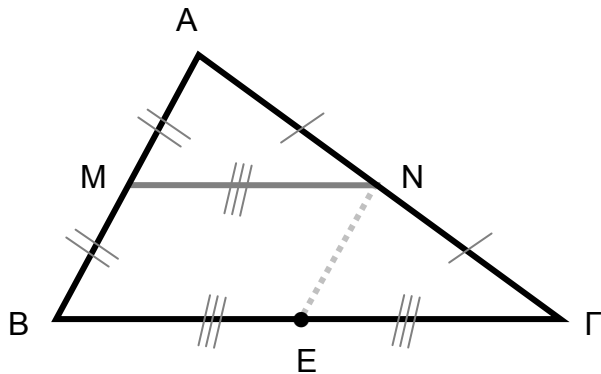


Παρατηρούμε ότι: Όσον αφορά στα κριτήρια, εκτός από ελάχιστες εξαιρέσεις, δε χρειάζεται να απομνημονεύσουμε καινούργιους κανόνες! Για να καταλάβουμε τι είδους είναι ένα τετράπλευρο αρκεί να γνωρίζουμε καλά τον ορισμό και τις ιδιότητες του σχήματος.

7. Εφαρμογές παραλληλόγραμμων



Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.



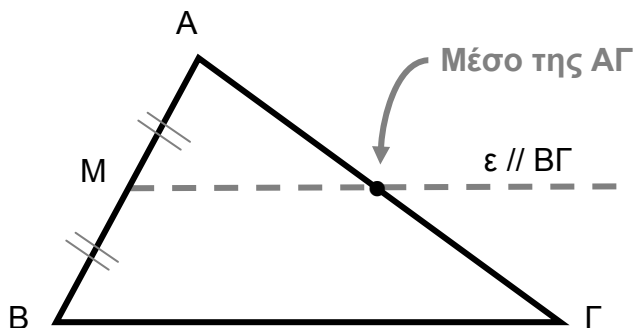
$$MN // = \frac{BG}{2}$$

Παρατήρηση:

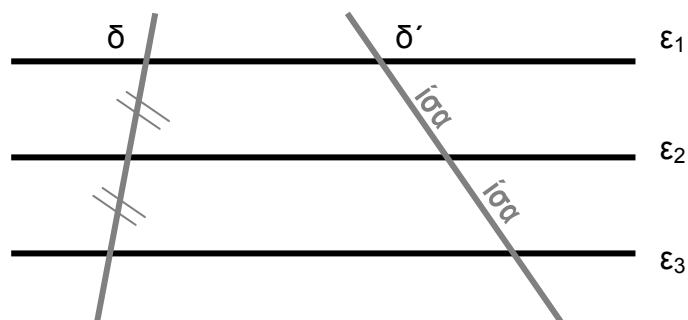
Προφανώς το MNEB είναι παραλληλόγραμμο.

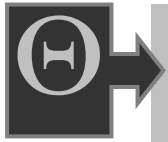


Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη του πλευρά, τότε η ευθεία θα διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς.



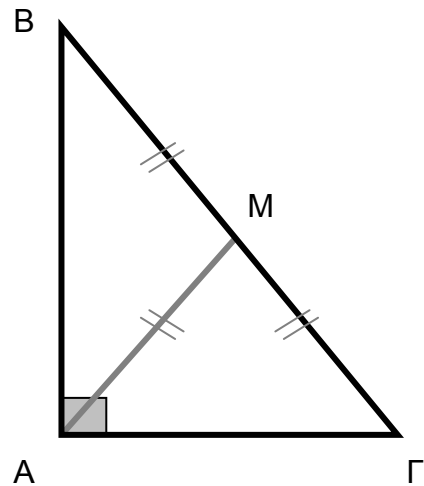
Αν τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.



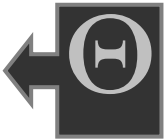


Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

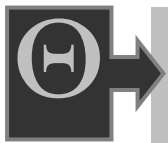
$$AM = \frac{BG}{2}$$



Παρατήρηση: Συνεπώς τα τρίγωνα AMΓ και AMB είναι πάντα ισοσκελή.

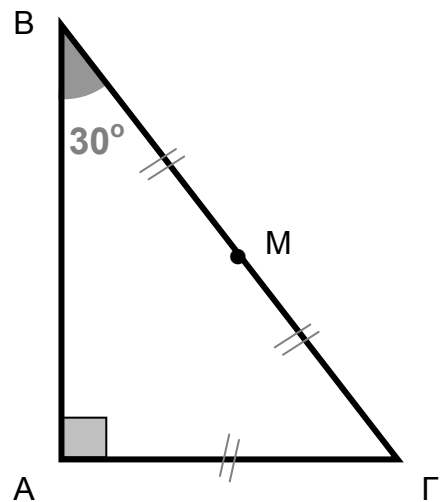


(Αντιστρόφως) Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.



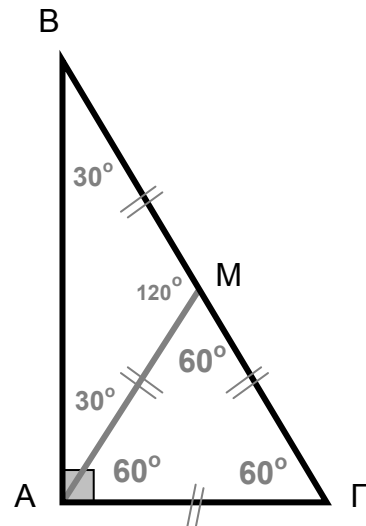
Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30° , τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας.

$$AG = \frac{BG}{2}$$



Παρατηρήσεις:

1. Ισχύει και το αντίστροφο: «Αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μια κάθετη πλευρά του ισούται με το μισό της υποτείνουσας, τότε η γωνία απέναντι από την πλευρά αυτή είναι ίση με 30° ».
2. Αν συνδυάσουμε και τα δύο θεωρήματα, τότε συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο AMΓ είναι **ισόπλευρο!** (Βλέπε διπλανό σχήμα)



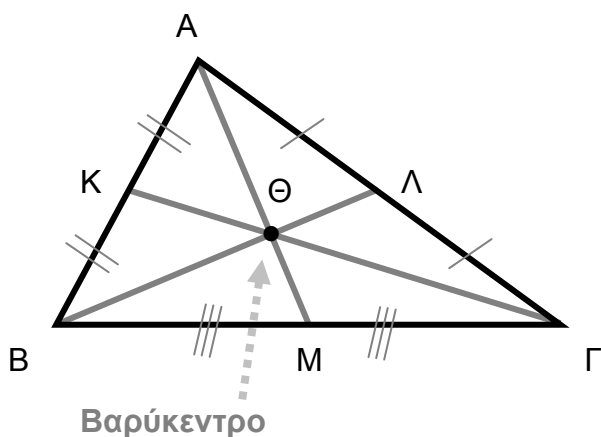
8. Βαρύκεντρο & Ορθόκεντρο



Και οι τρεις διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο λέγεται βαρύκεντρο του τριγώνου.



Για το βαρύκεντρο ενός τριγώνου ισχύει ότι απέχει από κάθε κορυφή, απόσταση ίση με τα $\frac{2}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου.



$$ΑΘ = \frac{2}{3} ΑΜ$$

$$ΒΘ = \frac{2}{3} ΒΛ$$

$$ΓΘ = \frac{2}{3} ΓΚ$$



Και τα τρία ύψη ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο λέγεται ορθόκεντρο του τριγώνου.

