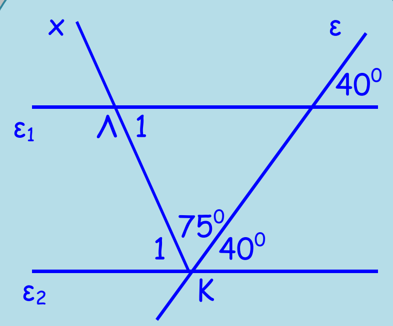
Οι παραλληλες ευθειες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τεμνονται απ'την ευθεια ε υπο γωνια 40^0.
Απ'το σημειο τομης Κ των $\varepsilon, \varepsilon_2$ φερνουμε ημιευθεια Κx που τεμνει την ε_1 στο Λ.
Αν $\varepsilon\widehat{K}\Lambda = 75^0$, να υπολογιστει η γωνια $\varepsilon_1\widehat{\Lambda}K$.

$\widehat{\Lambda}_1 = \widehat{K}_1$ (1), ως εντος εναλλαξ των παραλληλων $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που τε - μνονται απ'την Κx.
Ειναι
$\widehat{K}_1 + 75^0 + 40^0 = 180^0$ (αθροισμα ευθεια γωνια) $\Rightarrow$
$\widehat{K}_1 = 180^0 - 115^0 = 65^0$
Οποτε λογω της (1) $\widehat{\Lambda}_1 = 65^0$.

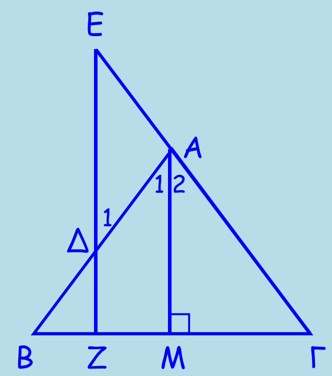


Αν Δ ειναι τυχαιο σημειο της πλευρας ΑΒ ισοσκελους (ΑΒ = ΑΓ) τριγωνου ΑΒΓ και στην προεκταση της ΓΑ παρουμε τμημα ΑΕ = ΑΔ, να δειξετε οτι: $\Delta E \perp B\Gamma$.

Εστω ΑΜ η διαμεσος (και υψος και διχοτομος) του ισοσκελους τριγωνου ΑΒΓ.
- Το τριγωνο ΑΔΕ ισοσκελες, αρα $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{E}$ (1).
- Η $\widehat{A}$ εξωτερικη στο τριγωνο ΑΔΕ, αρα

$\widehat{A} = \widehat{\Delta}_1 + \widehat{E} \overset{(1)}{=} 2\widehat{\Delta}_1 \Rightarrow \widehat{\Delta}_1 = \dfrac{\widehat{A}}{2} = \widehat{A}_1$ που σημαινει οτι ΕΔ || ΑΜ

($\widehat{\Delta}_1 = \widehat{A}_1$ και εντος εναλλαξ) και αφου $AM \perp B\Gamma$ (υψος) και $\Delta E \perp B\Gamma$.



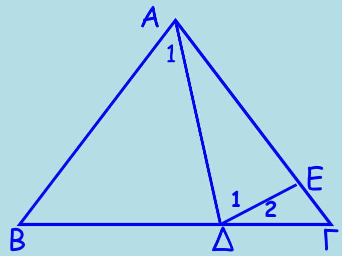
Δινεται ισοσκελες τριγωνο ΑΒΓ, με ΑΒ = ΑΓ, σημειο Δ στη βαση ΒΓ και σημειο Ε στην πλευρα ΑΓ τετοιο, ωστε $B\widehat{A}\Delta = 2\Gamma\widehat{\Delta}E$. Να δειχθει οτι: ΑΔ = ΑΕ

Ειναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ και $\widehat{A}_1 = 2\widehat{\Delta}_2$.
- Η $A\widehat{\Delta}\Gamma$ ειναι εξωτερικη γωνια στο τριγωνο ΑΒΔ οποτε :

$A\widehat{\Delta}\Gamma = \widehat{A}_1 + \widehat{B} \Rightarrow \widehat{\Delta}_1 + \widehat{\Delta}_2 = 2\widehat{\Delta}_2 + \widehat{\Gamma} \Rightarrow \widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2 + \widehat{\Gamma}$ (1)
- Η $A\widehat{E}\Delta$ ειναι εξωτερικη γωνια στο τριγωνο ΕΓΔ οποτε :

$A\widehat{E}\Delta = \widehat{\Delta}_2 + \widehat{\Gamma}$ (2)

Απο (1),(2) : $A\widehat{E}\Delta = \widehat{\Delta}_1$ που σημαινει οτι το τριγωνο ΑΔΕ ειναι ισοσκελες και ισχυει ΑΔ = ΑΕ.

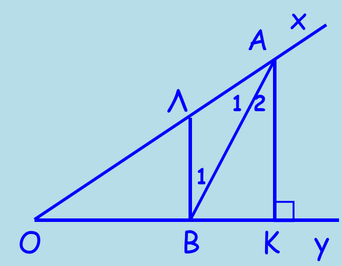


Εστω γωνια $x\widehat{O}y$ και Α σημειο της Οx. Απ'το Α φερνουμε την ΑΚ καθετη στην Οy και την διχοτομο της γωνιας $O\widehat{A}K$ που τεμνει την Οy στο Β. Απ'το Β φερνουμε την ΒΛ καθετη στην Οy. Να δειξετε οτι ΒΛ = ΛΑ.

• ΛΒ || ΑΚ σαν καθετες στην ιδια ευθεια Οy.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ (ΑΒ διχοτομος)} \\ \hat{B}_1 = \hat{A}_2 \text{ (εντος εναλλαξ παραλληλων} \\ \qquad \text{ΛΒ, ΑΚ που τεμνει η ΑΒ)}\end{array}\right\} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \quad (1)$$

Η (1) σημαινει οτι το τριγωνο ΑΛΒ ειναι ισοσκελες και ΒΛ = ΛΑ.

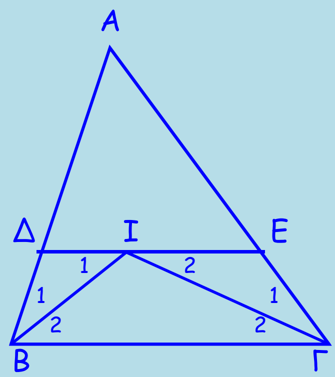


Απο το εγκεντρο Ι τριγωνου ΑΒΓ φερουμε παραλληλη στη ΒΓ που τεμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα σημεια Δ και Ε αντιστοιχως. Να δειξετε οτι: ΔΕ = ΒΔ + ΓΕ.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}_1 = \hat{B}_2 \text{ (ΙΒ διχοτομος)} \\ \hat{B}_2 = \hat{I}_1 \text{ (εντος εναλλαξ παραλληλων} \\ \qquad \text{ΔΕ, ΒΓ που τεμνει η ΙΒ)}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\hat{I}_1 = \hat{B}_1 \text{ που σημαινει οτι} \\ \text{το τριγωνο ΔΙΒ ισοσκε -} \\ \text{λες και ΔΙ = ΒΔ (1)}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2 \text{ (ΙΓ διχοτομος)} \\ \hat{\Gamma}_2 = \hat{I}_2 \text{ (εντος εναλλαξ παραλληλων} \\ \qquad \text{ΔΕ, ΒΓ που τεμνει η ΙΓ)}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\hat{I}_2 = \hat{\Gamma}_2 \text{ που σημαινει οτι} \\ \text{το τριγωνο ΓΙΕ ισοσκε -} \\ \text{λες και ΕΙ = ΕΓ (2)}\end{array}$$

Απο (1) + (2) προκυπτει το ζητουμενο.



Σε τριγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 2\hat{B}$, να δειξετε οτι α < 2β.

Φερνουμε το υψος ΓΔ και πανω στη ΑΒ παιρνουμε σημειο Ε, τετοιο ωστε ΕΔ = ΑΔ.

Το τριγωνο ΑΓΔ ειναι ισοσκελες (ΓΔ υψος και διαμεσος) αρα

ΑΓ = ΓΕ (1) και $A\hat{E}\Gamma = \hat{A} = 2\hat{B}$ (2)

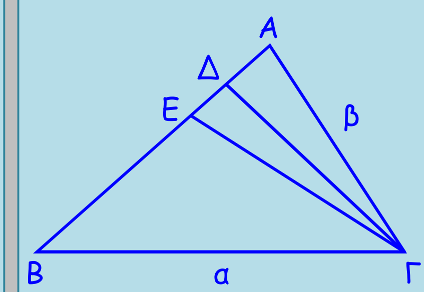
Ομως η $A\hat{E}\Gamma$ ειναι εξωτερικη στο τριγωνο ΕΒΓ, οποτε ειναι :

$A\hat{E}\Gamma = \hat{B} + E\hat{\Gamma}B$ (3)

Απο (2), (3) : $\hat{B} + E\hat{\Gamma}B = 2\hat{B} \Rightarrow E\hat{\Gamma}B = \hat{B}$ που σημαινει οτι τριγωνο

ΕΓΒ ισοσκελες και $EB = E\Gamma \overset{(1)}{=} A\Gamma = \beta$ (4)

Απο τριγωνικη ανισοτητα στο τριγωνο ΕΓΒ και την (4) προκυπτει οτι : $\alpha < \beta + \beta \Rightarrow \alpha < 2\beta$

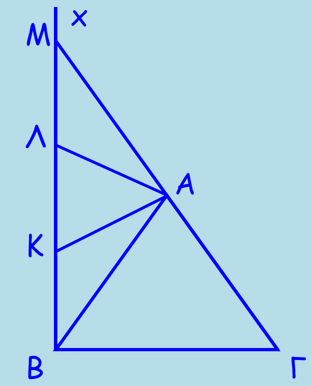


Σε ισοσκελες τριγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φερουμε ημιευθεια $Bx \perp ΒΓ$, που βρισκεται στο ημιεπιπεδο (ΒΓ,Α). Αν η Bx τεμνει την προεκταση της ΓΑ στο Μ και στη ΒΜ παρουμε σημεια Κ,Λ τετοια, ωστε : $B\hat{A}Λ = Γ\hat{A}K = 90^0$, να δειξετε οτι : ΒΛ = ΚΜ και οτι το ΑΚΛ ειναι ισοσκελες.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{M} = \text{συμπληρωματικη της } \hat{Γ} \\ M\hat{B}A = \text{συμπληρωματικη της } A\hat{B}Γ \\ A\hat{B}Γ = \hat{Γ}\ \ (ΑΒΓ \text{ ισοσκελες}) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \hat{M} = M\hat{B}A\ (1) \text{ δηλαδη τρι-} \\ \text{γωνο } MAB \text{ ισοσκελες και} \\ AM = MB\ (2) \end{array}$$

Τα τριγωνα ΑΛΒ και ΑΚΜ ειναι ισα γιατι :

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ορθογωνια} \\ \hat{M} = M\hat{B}A\ \ (1) \\ AM = MB\ (2) \end{array}\right\} \text{αρα} \begin{array}{l} \bullet\ ΒΛ = ΚΜ \\ \bullet\ ΑΛ = ΚΑ \text{ που σημαινει τριγ. ΑΚΛ ισοσκελες.} \end{array}$$



Απο τα ακρα ευθ. τμηματος ΑΒ φερουμε στο ιδιο ημιεπιπεδο δυο παραλληλες ημιευθειες Αx και Βy. Παιρνουμε τυχαιο σημειο Γ του ΑΒ και στις Αx, Βy τα σημεια Δ, Ε αντιστοιχα, ωστε ΑΔ = ΑΓ και ΒΕ = ΒΓ. Να αποδειξετε οτι $Δ\hat{Γ}E = 90^0$.

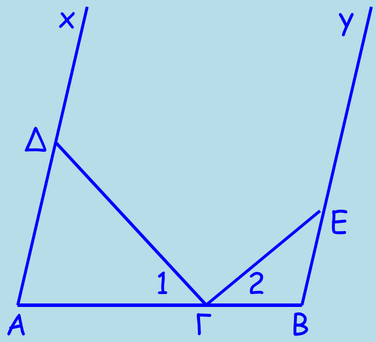
• Τριγ. ΑΔΓ ισοσκελες, αρα $\hat{Δ} = \hat{Γ}_1$ και $\hat{A} + 2\hat{Γ}_1 = 180 \Rightarrow \hat{Γ}_1 = \dfrac{\hat{A}}{2}$ (1)

• Τριγ. ΒΔΕ ισοσκελες, αρα $\hat{E} = \hat{Γ}_2$ και $\hat{B} + 2\hat{Γ}_2 = 180 \Rightarrow \hat{Γ}_2 = \dfrac{\hat{B}}{2}$ (2)

Απο (1) + (2) : $\hat{Γ}_1 + \hat{Γ}_2 = \dfrac{\hat{A}}{2} + \dfrac{\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{Γ}_1 + \hat{Γ}_2 = \dfrac{\hat{A}+\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{Γ}_1 + \hat{Γ}_2 = \dfrac{180^0}{2}$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \hat{Γ}_1 + \hat{Γ}_2 = 90^0$, οποτε και $Δ\hat{Γ}E = 90^0$.

(*) : Οι γωνιες $\hat{A}, \hat{B}$ ειναι εντος - εκτος επι τα αυτα μερη των παραλληλων Αx, Βy που τεμνονται απο ΑΒ και $\hat{A} + \hat{B} = 180^0$.



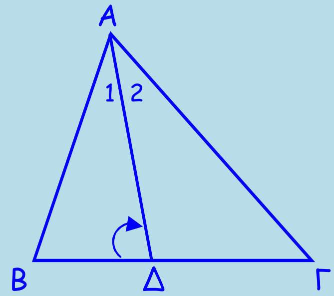
Σε τριγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} - \hat{Γ} = 30^0$ φερουμε τη διχοτομο ΑΔ.
Να δειξετε οτι $A\hat{Δ}B = 75^0$.

Ειναι

$$A\hat{Δ}B + \hat{A}_1 + \hat{B} = 180^0 \Rightarrow A\hat{Δ}B + \frac{\hat{A}}{\cancel{2}} + \hat{B} = 90^0 + \frac{\hat{A}}{\cancel{2}} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{Γ}}{2} \Rightarrow$$

$$A\hat{Δ}B = 90^0 + \frac{\hat{B}}{2} - \hat{B} + \frac{\hat{Γ}}{2} \Rightarrow A\hat{Δ}B = 90^0 + \frac{\hat{Γ}}{2} - \frac{\hat{B}}{2} \Rightarrow$$

$$A\hat{Δ}B = 90^0 - \frac{\hat{B} - \hat{Γ}}{2} \Rightarrow A\hat{Δ}B = 90^0 - \frac{30^0}{2} \Rightarrow A\hat{Δ}B = 90^0 - 15^0 = 75^0$$



Σε τριγωνο ΑΒΓ φερουμε απ'τη κορυφη Β ευθεια x'x || ΑΓ. Στην x'x και εκατερωθεν του Β παιρνουμε τμηματα ΒΜ = ΒΝ = ΑΒ. Να δειξετε οτι : ΑΜ ⊥ ΑΝ.

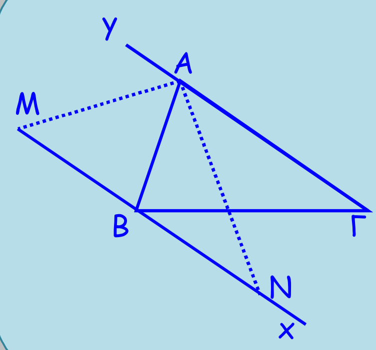
Τα τριγωνα ΑΒΜ, ΑΒΝ ειναι ισοσκελη (ΑΒ = ΒΜ = ΒΝ) οποτε :

$\hat{M} = M\hat{A}B$ (1) και $\hat{N} = N\hat{A}B$ (2)

• $\hat{M} = M\hat{A}y$, εντος εναλλαξ (ΜΝ || ΑΓ που τεμνονται απο ΑΜ) και λογω (1) $M\hat{A}B = M\hat{A}y$, δηλ. ΑΜ διχοτομος της $\hat{A}_{εξ}$.

• $\hat{N} = N\hat{A}\Gamma$, εντος εναλλαξ (ΜΝ || ΑΓ που τεμνονται απο ΑΝ) και λογω (2) $N\hat{A}B = N\hat{A}\Gamma$, δηλ. ΑΝ διχοτομος της $\hat{A}$.

Αρα $M\hat{A}N = 90^0$ ($\hat{A}$, $\hat{A}_{εξ}$ εφεξης παραπληρωματικες γωνιες).



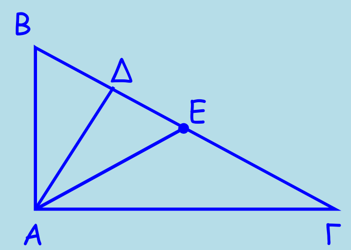
Στην υποτεινουσα ορθογωνιου τριγωνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) παιρνουμε σημειο Ε, τετοιο ωστε ΒΕ = ΑΒ. Αν ΑΔ υψος, να δειξετε οτι η ΑΕ ειναι διχοτομος της $\Gamma\hat{A}\Delta$.

Το τριγωνο ΑΒΕ ειναι ισοσκελες (ΒΕ = ΒΑ), αρα : $B\hat{A}E = A\hat{E}B$ (1)

• Στο τριγ. ΑΔΕ : $\Delta\hat{A}E = 90^0 - A\hat{E}B \overset{(1)}{=} 90^0 - B\hat{A}E$ (2).

• $\hat{A} = 90^0$, οποτε $E\hat{A}\Gamma = 90^0 - B\hat{A}E$ (3).

Απο (2), (3) : $\Delta\hat{A}E = E\hat{A}\Gamma$, που σημαινει ΑΕ διχοτομος της $\Gamma\hat{A}\Delta$.



Στην προεκταση της υποτεινουσας ορθογωνιου τριγωνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) παιρνουμε τμημα ΓΚ = γ. Φερνουμε ημιευθεια Κx ⊥ ΒΚ προς το μερος του Α και παιρνουμε ΚΛ = β. Να δειξετε οτι η ΒΛ ειναι διχοτομος της $\hat{B}$.

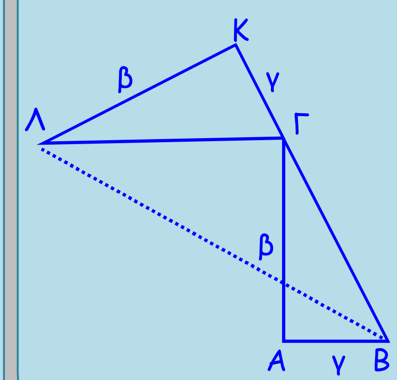
Τα τριγωνα ΑΒΓ και ΓΚΛ ειναι ισα γιατι :

$\left.\begin{array}{l} \text{Ορθογωνια} \\ AB = K\Gamma = \gamma \\ A\Gamma = K\Lambda = \beta \end{array}\right\}$ αρα : $K\hat{\Gamma}\Lambda = \hat{B}$ (1) και ΑΓ = ΓΛ (2)

• Απ'την (1) προκυπτει οτι ΑΒ || ΓΛ ($K\hat{\Gamma}\Lambda$, $\hat{B}$ ειναι εντος - εκτος και επι τα αυτα μερη), οποτε $A\hat{B}\Lambda = \Gamma\hat{\Lambda}B$ (3), εντος εναλλαξ (ΑΒ || ΓΛ που τεμνονται απο ΒΛ).

• Απ'την (2) προκυπτει $\Gamma\hat{B}\Lambda = B\hat{\Lambda}\Gamma$ (4) (τριγ. ΒΓΛ ισοσκελες).

Απο (3), (4) : $A\hat{B}\Lambda = \Gamma\hat{B}\Lambda$ που σημαινει οτι ΒΛ διχοτομος της $\hat{B}$.



Σε τριγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 60^0$ φερουμε τις διχοτομους ΒΔ, ΔΕ των γωνιων $\hat{B}, \hat{\Gamma}$ αντιστοιχα. Να δειξετε οτι : $B\hat{\Delta}\Gamma = \Gamma\hat{E}A$.

• $B\hat{\Delta}\Gamma$ ειναι εξωτερικη του τριγωνου ΑΔΒ, οποτε :

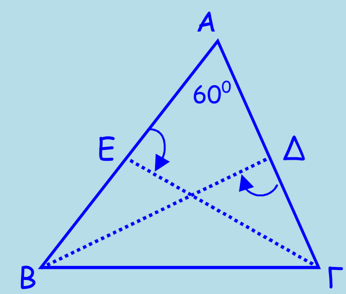
$$B\hat{\Delta}\Gamma = \hat{A} + A\hat{B}\Delta = 60^0 + \frac{\hat{B}}{2} \quad (1)$$

• $\Gamma\hat{E}A$ ειναι εξωτερικη του τριγωνου ΓΕΒ, οποτε :

$$\Gamma\hat{E}A = \hat{B} + E\hat{\Gamma}B = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{B}}{2} + 90^0 - \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{B}}{2} + 90^0 - \frac{60^0}{2} =$$

$$= \frac{\hat{B}}{2} + 90^0 - 60^0 = 60^0 + \frac{\hat{B}}{2} \quad (2)$$

Απο (1), (2) προκυπτει : $B\hat{\Delta}\Gamma = \Gamma\hat{E}A$.

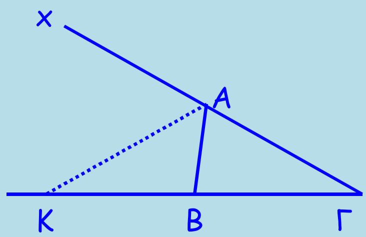


Αν η διχοτομος της εξωτερικης γωνιας $\hat{A}$ τριγωνου ΑΒΓ τεμνει την προεκταση της ΓΒ στο σημειο Κ, να δειξετε οτι : $2\hat{K} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.

$\hat{B}$ ειναι εξωτερικη του τριγωνου ΑΚΒ, οποτε :

$$\hat{B} = \hat{K} + K\hat{A}x \Rightarrow \hat{K} = \hat{B} - \frac{\hat{A}_{\varepsilon\xi}}{2} \Rightarrow \hat{K} = \hat{B} - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Rightarrow \hat{K} = \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Rightarrow$$

$$\hat{K} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2} \Rightarrow 2\hat{K} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$$



Απο τα ακρα ευθ. τμηματος ΑΒ φερουμε στο ιδιο ημιεπιπεδο δυο παραλληλες ημιευθειες Αx και Βy. Παιρνουμε τυχαιο σημειο Γ του ΑΒ και στις Αx, Βy τα σημεια Δ, Ε αντιστοιχα, ωστε ΑΔ = ΑΓ και ΒΕ = ΒΓ. Να αποδειξετε οτι $\Delta\hat{\Gamma}E = 90^0$.

• Τριγ. ΑΔΓ ισοσκελες, αρα $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}_1$
  ομως $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}_2$ (εντος εναλλαξ Αx || Γz που τεμνει η ΑΒ),
  οποτε $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$ (1)

• Τριγ. ΒΔΕ ισοσκελες, αρα $\hat{E} = \hat{\Gamma}_4$
  ομως $\hat{E} = \hat{\Gamma}_3$ (εντος εναλλαξ Βy || Γz που τεμνει η ΑΒ),
  οποτε $\hat{\Gamma}_3 = \hat{\Gamma}_4$ (2)

Ειναι : $\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 + \hat{\Gamma}_3 + \hat{\Gamma}_4 = 180^0 \overset{(1,2)}{\Rightarrow} 2(\hat{\Gamma}_2 + \hat{\Gamma}_3) = 180^0 \Rightarrow$

$\hat{\Gamma}_2 + \hat{\Gamma}_3 = 90^0$, οποτε και $\Delta\hat{\Gamma}E = 90^0$.