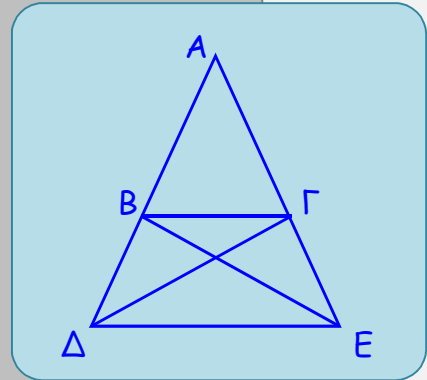


Σε ισοσκελες τριγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) προεκτεινω τις AB, AG κατα τμηματα $BD=GE$ αντιστοιχα. Να δειξετε οτι $BE=GD$.

Τα τριγωνα ABE και AGD ειναι ισα γιατι :

1. \hat{A} = κοινη
2. $AB = AG$ (τριγ. $AB\Gamma$ ισοσκελες)
3. $AE = AD$ (αθροισματα ισων)

Οποτε και τα υπολοιπα στοιχεια τους ισα και $GD = BE$.



Αν τα τριγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ ειναι ισα τοτε:

- $\mu_\alpha = \mu_{\alpha'}$
- $\delta_\alpha = \delta_{\alpha'}$

Τα τριγωνα ABM και $A'B'M'$ ειναι ισα γιατι :

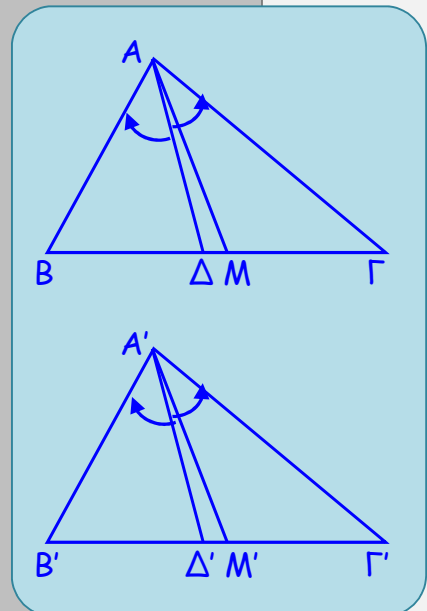
1. $AB = A'B'$ (υποθεση)
2. $\hat{B} = \hat{B}'$ (υποθεση)
3. $BM = B'M'$ (μισα ισων)

Οποτε και τα υπολοιπα στοιχεια τους ισα και $AM = A'M'$.

Τα τριγωνα $AB\Delta$ και $A'B'\Delta'$ ειναι ισα γιατι :

1. $AB = A'B'$ (υποθεση)
2. $\hat{B} = \hat{B}'$ (υποθεση)
3. $\hat{BA\Delta} = \hat{B'A'\Delta'}$ (μισα ισων)

Οποτε και τα υπολοιπα στοιχεια τους ισα και $A\Delta = A'\Delta'$.



Δειξετε οτι τα τριγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ ειναι ισα αν:

- $\nu_\alpha = \nu_{\alpha'}$
- $\nu_\beta = \nu_{\beta'}$
- $a = a'$

• Τα τριγωνα $AB\Delta$ και $A'B'\Delta'$ ειναι ισα γιατι :

Ορθογωνια

$BE = B'E'$ (υποθεση)

$B\Gamma = B'\Gamma'$ (υποθεση)

Οποτε και τα υπολοιπα σημεια τους ισα, δηλαδη $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$

• Τα τριγωνα $AG\Delta$ και $A'\Gamma'\Delta'$ ειναι ισα γιατι :

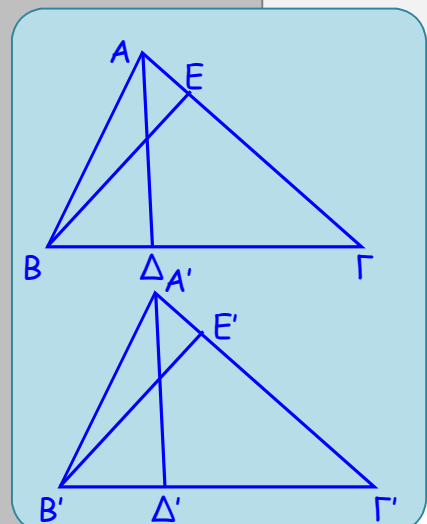
Ορθογωνια

$\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$ (προηγ.αποδειξη)

$A\Delta = A'\Delta'$ (υποθεση)

Οποτε και τα υπολοιπα σημεια τους ισα, δηλαδη $A\Gamma = A'\Gamma'$

Ειναι : $B\Gamma = B'\Gamma', A\Gamma = A'\Gamma'$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$ που σημαινει οτι τα τριγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ ειναι ισα.



Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και $B\Delta, \Gamma E$ τα υψη του. Να δείχτει ότι:

- Το τρίγωνο $A\epsilon\Delta$ είναι ισοσκελές
- $E\Delta \parallel B\Gamma$

• Τα τρίγωνα $A\epsilon\Gamma$ και $A\Delta B$ είναι ίσα γιατί :

1. Ορθογωνία
2. $AB = A\Gamma$ (τριγ. $AB\Gamma$ ισοσκελές)
3. $\hat{A} =$ κοινή

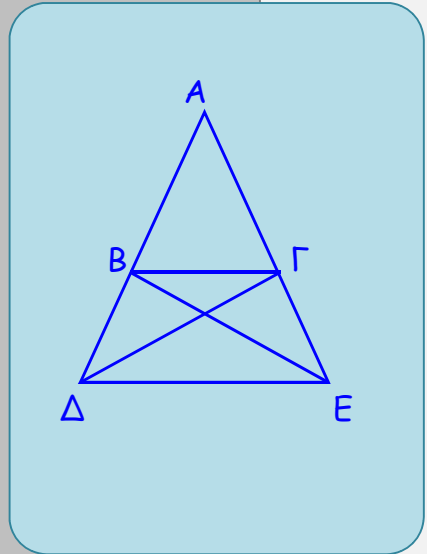
Οποτε και τα υπολοιπα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή $A\epsilon = A\Delta$.

Αρα το τρίγωνο $A\Delta\epsilon$ ισοσκελές και $\hat{\epsilon} = \hat{\Delta}$.

• Είναι

$$\begin{cases} \hat{\epsilon} + \hat{\Delta} + \hat{A} = 180^\circ \\ \hat{\Gamma} + \hat{B} + \hat{A} = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot \hat{\epsilon} + \hat{A} = 180^\circ \\ 2 \cdot \hat{B} + \hat{A} = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{\epsilon} = \hat{B} \Rightarrow$$

$E\Delta \parallel A\Gamma$ (εντός - εκτός...)

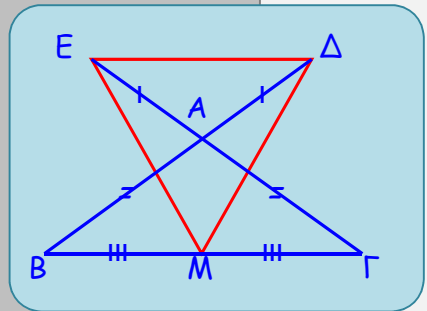


Στις προεκτασεις των ίσων πλευρών BA και GA ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ θεωρούμε ίσα τμήματα $A\Delta, A\epsilon$ αντιστοίχα. Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να δείχτει ότι το τρίγωνο $M\epsilon\Delta$ είναι ισοσκελές.

Τα τρίγωνα $M\epsilon\Gamma$ και $M\Delta B$ είναι ίσα γιατί :

- $BM = M\Gamma$ (υποθεση)
- $\Delta B = \epsilon\Gamma$ (αθροισμα ίσων τμηματων)
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (τριγ. $AB\Gamma$ ισοσκελές)

Οποτε και τα υπολοιπα σημεια τους ίσα, δηλαδή $M\Delta = M\epsilon$ που σημαίνει ότι το τρίγωνο $M\Delta\epsilon$ είναι ισοσκελές.



Στις πλευρες Ox, Oy γωνίας $x\hat{O}y$ θεωρούμε σημεια A και B ωστε $OA = OB$.

- Αν M σημείο της διχοτομής $x\hat{O}y$, δείξτε ότι $MA = MB$.
- Αν οι AM, MB τεμνουν τις Ox, Oy στα A', B' αντιστοίχα, δείξτε ότι $AA' = BB'$.

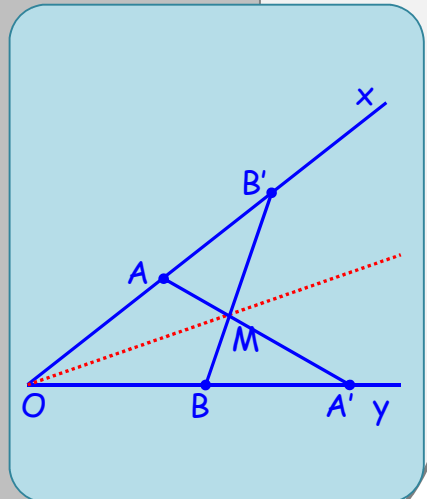
• Τα τρίγωνα OAM και MOB είναι ίσα γιατί :

- $OM =$ κοινή
 - $OA = OB$ (υποθεση)
 - $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (OM διχοτομος)
- Οποτε... ίσα, δηλαδή $MA = MB$ (1) και $\hat{O}BM = \hat{O}AM$

• Τα τρίγωνα $B'AM$ και $BA'M$ είναι ίσα γιατί :

- $MA = MB$ (1)
 - $\hat{AMB}' = \hat{BMA}'$ (κατακορυφή)
 - $\hat{MAB}' = \hat{MBA}'$ (παραπληρωματικες ίσων)
- Οποτε ... ίσα, ... $MA' = MB'$ (2)

Απο (1) + (2) : $MA + MA' = MB + MB' \Rightarrow AA' = BB'$



Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτομος του $B\Delta$. Από το Δ φέρνουμε ευθεία κάθετη στη $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο Z .
Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

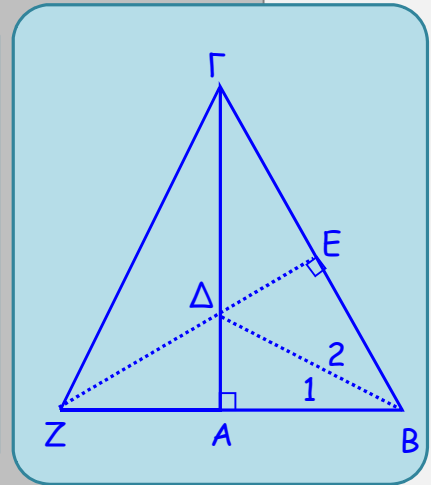
• Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Delta E$ είναι ίσα γιατί:

Ορθογώνια $B\Delta =$ κοινή $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ ($B\Delta$ διχοτομος)	} Οποτε και τα υπολοιπα σημεια τους ίσα, δηλαδή $AB = BE$ (1)
--	---

• Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και BEZ είναι ίσα γιατί:

Ορθογώνια $\hat{B} =$ κοινή $AB = BE$ (λογω της (1))	} Οποτε και τα υπολοιπα σημεια τους ίσα, δηλαδή $B\Gamma = BZ$ (2)
--	--

Η (2) δηλώνει ότι το τρίγωνο $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελές.

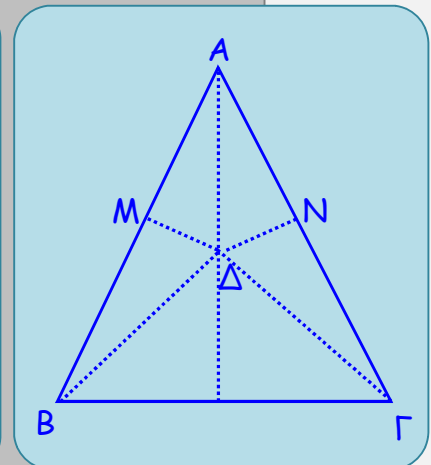


Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και σημείο Δ στο εσωτερικό του που ισαπεχει από τα άκρα της βάσης του.

Να αποδείξετε ότι το σημείο Δ ισαπεχει από τις πλευρές AB και $A\Gamma$.

Αφού το Δ ισαπεχει από τα B και Γ , σημαίνει ότι βρίσκεται στη μεσοκάθετη του $B\Gamma$.

- Η μεσοκάθετη της βάσης διέρχεται από τη κορυφή ισοσκελούς τριγώνου.
- Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με βάση $B\Gamma$) η μεσοκάθετη της βάσης διέρχεται από τη κορυφή A .
- Οποτε η AK είναι και διάμεσος, άρα και διχοτομος της \hat{A} .
- Κάθε σημείο της διχοτομου της \hat{A} ισαπεχει από τις πλευρές της, άρα και το Δ , που σημαίνει ότι $\Delta M = \Delta N$.



Στις προεκτασεις των πλευρών AB , $B\Gamma$, ΓA ισοπλευρού τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τμήματα $B\Delta = \Gamma E = AZ$. Δείξτε ότι το τρίγωνο $\Delta E Z$ είναι ισοπλευρό.

• Τα τρίγωνα $EB\Delta$ και ΓZE είναι ίσα γιατί:

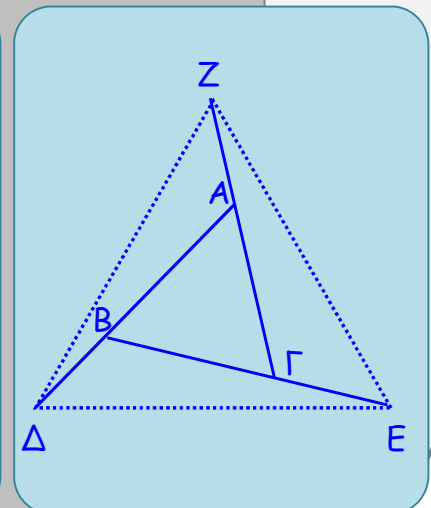
$B\Delta = \Gamma E$ (υποθεση) $BE = \Gamma Z$ (αθροισμα ισων) $\hat{\Delta BE} = \hat{E\Gamma Z}$ (παραπληρωματισων)	} Οποτε ... ίσα ... δηλαδή $\Delta E = ZE$ (1)
---	---

• Τα τρίγωνα $EB\Delta$ και $A\Delta Z$ είναι ίσα γιατί:

$B\Delta = AZ$ (υποθεση) $BE = A\Delta$ (αθροισμα ισων) $\hat{\Delta BE} = \hat{Z\Delta A}$ (παραπληρωματισων)	} Οποτε ... ίσα ... δηλαδή $\Delta E = \Delta Z$ (2)
--	---

Από (1) και (2): $\Delta E = ZE = \Delta Z$.

Άρα το τρίγωνο $\Delta E Z$ είναι ισοπλευρό.



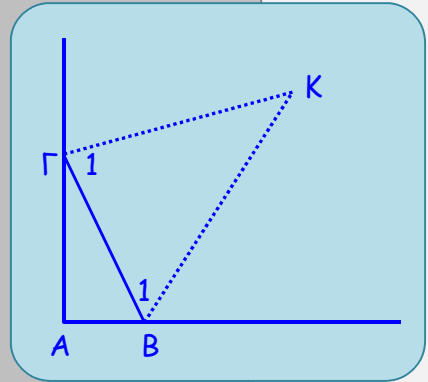
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και φε-ρνούμε τις εξωτερικές διχοτομους των γωνιών B και Γ που τεμνονται στο K . Να δείχτει ότι $\hat{B}\hat{K}\hat{\Gamma} = 45^\circ$.

Στο τρίγωνο $KB\Gamma$ είναι:

$$\hat{K} + \hat{B}_1 + \hat{\Gamma}_1 = 180^\circ \Rightarrow \hat{K} + \frac{\hat{B}_{εξ}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}_{εξ}}{2} = 180^\circ \Rightarrow \hat{K} + \frac{\hat{A} + \hat{\Gamma}}{2} + \frac{\hat{B} + \hat{A}}{2} = 180^\circ$$

$$\hat{K} + \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{A}}{2} = 180^\circ \Rightarrow \hat{K} + \hat{A} + \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} \Rightarrow$$

$$\hat{K} = \hat{B} + \hat{\Gamma} - \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2} \Rightarrow \hat{K} = \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2} \Rightarrow \hat{K} = \frac{90^\circ}{2} \Rightarrow \hat{K} = 45^\circ$$



Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) και φε-ρνούμε την διχοτομο $B\Delta$. Αν απ' το Γ φε-ρούμε καθετη στην $B\Gamma$ που τεμνει την προεκαταση της $B\Delta$ στο E , να δείχτει ότι το τρ. $\Gamma\Delta E$ είναι ισοσκελες.

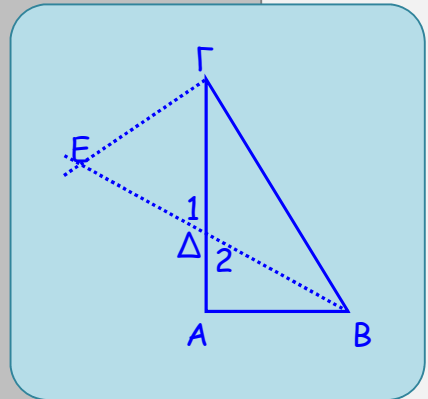
• Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ορθογώνιο, αρα:

$$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90^\circ - \frac{\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} \quad (1)$$

• Το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι ορθογώνιο, αρα:

$$\hat{E} = 90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}\hat{B}\hat{E}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} \quad (2)$$

Απο τις (1), (2) προκυπτει ότι: $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}$, που σημαίνει ότι το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ισοσκελες.



Αν $A\Delta$ διχοτομος τριγωνου $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, να δείχτει ότι:

$$\bullet \hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} - \hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} = \hat{B} - \hat{\Gamma} \quad \bullet \hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} = 90^\circ - \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2} \quad \text{και} \quad \hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 90^\circ + \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$$

• Είναι

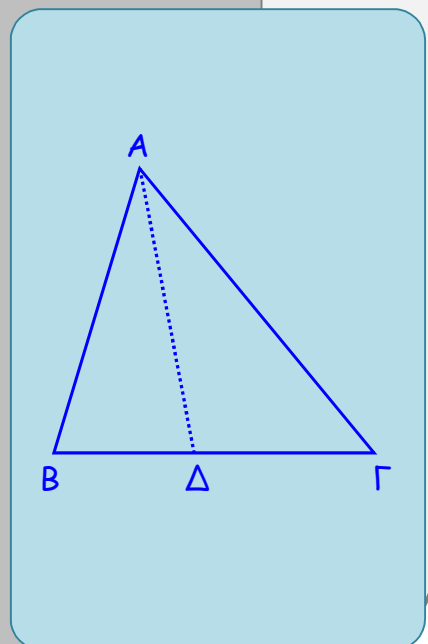
$$\left. \begin{aligned} \hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} &= \hat{B} + \frac{\hat{A}}{2} \\ \hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} &= \hat{\Gamma} + \frac{\hat{A}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} - \hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} = \hat{B} + \frac{\hat{A}}{2} - \hat{\Gamma} - \frac{\hat{A}}{2} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$$

$$\bullet \hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} + \hat{B} + \frac{\hat{A}}{2} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} + \hat{B} + \frac{\hat{A}}{2} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Rightarrow$$

$$\hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Rightarrow \hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} = 90^\circ - \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$$

$$\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} + \frac{\hat{A}}{2} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} + \frac{\hat{A}}{2} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Rightarrow$$

$$\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 90^\circ + \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Rightarrow \hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 90^\circ + \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$$



Αν AD διχοτομος τριγωνου $AB\Gamma$ και E ενα σημειο στη προεκταση του AB τετοιο ωστε $AE = AG$, να δειχτει οτι $\Delta B < \Delta E$.

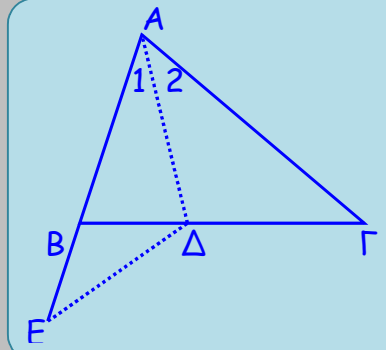
Τα τριγωνα ADE και $AD\Gamma$ ειναι ισα γιατι :

$AD = \text{κοινη}$
 $AE = AG$ (υποθεση)
 $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (AD διχοτομος)

Οποτε και τα υπολοιπα σημεια τους ισα, δηλαδη $\hat{E} = \hat{\Gamma}$ (1)

Η ΔBE εξωτερικη στο τριγωνο $AB\Gamma$, οποτε :

$\Delta BE > \hat{\Gamma} \Rightarrow \Delta BE > \hat{E}$, που σημαινει οτι $\Delta E > \Delta B$.



Αν AM ειναι διαμεσος τριγωνου $AB\Gamma$ με $AB < AG$, να δειξετε οτι :

- $\hat{MAB} > \hat{MAG}$
- $\beta - \gamma < 2\mu_a < \beta + \gamma$
- $\mu_a + \mu_b + \mu_\gamma < 2\tau$

• Προεκτεινουμε την AM κατα τμημα $M\Delta = AM$.

Τα τριγωνα ADE και $AD\Gamma$ ειναι ισα γιατι :

$MA = M\Delta$ (υποθεση)
 $MB = M\Gamma$ (M μεσο $B\Gamma$)
 $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (κατακορυφη)

Οποτε ... ισα, δηλαδη $AB = \Gamma\Delta$ (1) και $\hat{MAB} = \hat{MAG}$ (2)

$AB < AG \Rightarrow \Gamma\Delta < AG$ (τριγ. $A\Gamma\Delta$) $\Rightarrow \hat{MAG} < \hat{MAG} \Rightarrow \hat{MAG} < \hat{MAB}$.

• Απο τριγωνικη ανισοτητα στο τριγωνο $A\Gamma\Delta$ προκυπτει :

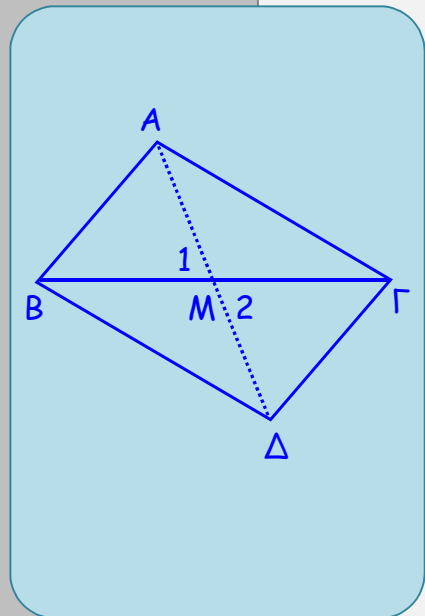
$$|AG - \Gamma\Delta| < A\Delta < AG + \Gamma\Delta \Rightarrow \beta - \gamma < 2\mu_a < \beta + \gamma$$

Ειναι $2\mu_a < \beta + \gamma$

• Ομοια $2\mu_b < \alpha + \gamma$

• Ομοια $2\mu_\gamma < \alpha + \beta$

$$\begin{cases} 2(\mu_a + \mu_b + \mu_\gamma) < 2(\alpha + \beta + \gamma) \\ \mu_a + \mu_b + \mu_\gamma < 2\tau \end{cases}$$



Αν K τυχαιο σημειο της πλευρας $B\Gamma$ τριγ. $AB\Gamma$, να δειξετε οτι : $\tau - \alpha < AK < \tau$.

Απο τριγωνικη ανισοτητα στα τριγωνα ABK , $A\Gamma K$ προκυπτει :

$$\begin{cases} AB < BK + AK \\ AG < GK + AK \end{cases} \xrightarrow{(+)} AB + AG < BK + GK + 2AK \Rightarrow \gamma + \beta < \alpha + 2AK \Rightarrow$$

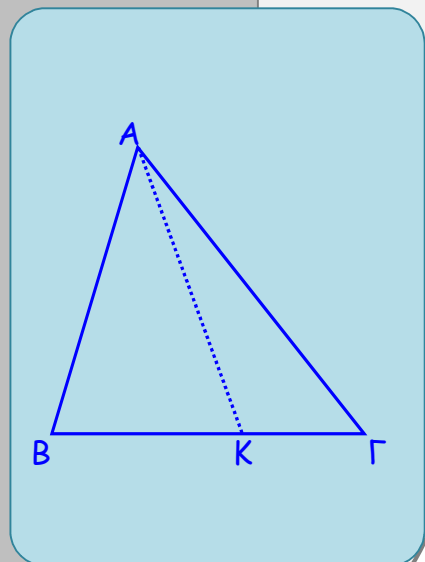
$$\alpha + \gamma + \beta < 2\alpha + 2AK \Rightarrow 2\tau < 2\alpha + 2AK \Rightarrow \tau - \alpha < AK \quad (1)$$

Απο τριγωνικη ανισοτητα στα τριγωνα ABK , $A\Gamma K$ προκυπτει :

$$\begin{cases} AK < BK + AB \\ AK < GK + AG \end{cases} \xrightarrow{(+)} 2AK < BK + GK + AB + AG \Rightarrow 2AK < \alpha + \gamma + \beta \Rightarrow$$

$$2AK < 2\tau \Rightarrow AK < \tau \quad (2)$$

Απο(1),(2) : $\tau - \alpha < AK < \tau$



Αν AM η διαμεσος και AD η διχοτομος τριγωνου $ABΓ$ με $AB < AG$, να δειξετε οτι : • $ΔB < ΔΓ$ • $δ_α < μ_α$

• Παιρνομε στην AG τμημα $AE = AB$.

Τα τριγωνα $ABΔ$ και $AΔE$ ειναι ισα γιατι :

$AD =$ κοινη
 $AE = AB$ (κατασκευη)
 $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (AD διχοτομος)

Οποτε ... ισα, δηλαδη :
 $ΔB = ΔE$ (1) και $\hat{B} = \hat{E}_1$ (2)

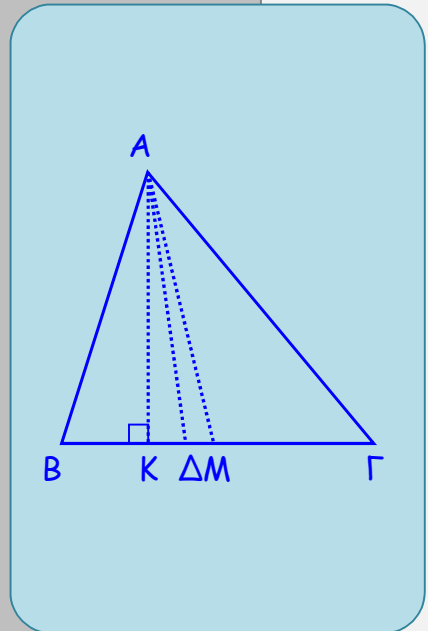
(2) : $\hat{B}_{εξ} = \hat{E}_2$, ομως $\hat{B}_{εξ} > \hat{Γ} \Rightarrow \hat{E}_2 > \hat{Γ} \Rightarrow ΔΓ > ΔE \stackrel{(1)}{\Rightarrow} ΔΓ > ΔB$.

• Αν AK υφος, απ' τη προηγουμενη αποδειξη :

$$ΔB < ΔΓ \Rightarrow 2ΔB < ΔΓ + ΔB \Rightarrow 2ΔB < BΓ \Rightarrow ΔB < \frac{BΓ}{2} \Rightarrow$$

$$ΔB < MB \Rightarrow ΔB - KB < MB - KB \Rightarrow ΔK < KM \Rightarrow δ_α < μ_α$$

(*) : Αφου τα ιχνη δυο πλαγιων τμηματων απεχουν ανισα απ' το ιχνος της καθετου, ομοια ανισα ειναι και τα τμηματα.



Αν Δινεται κυκλος (O,R) , δυο ισες χορδες του $AB, ΓΔ$ και τα αντιστοιχα αποστηματα τους OK, OL . Αν οι προεκτασεις των χορδων τεμνονται στο σημειο M να δειξετε οτι : $MA = MΓ$ και $MB = MΔ$.

Ειναι $AK = KB = ΓΛ = ΛΔ$ (μισα ισων) (1).

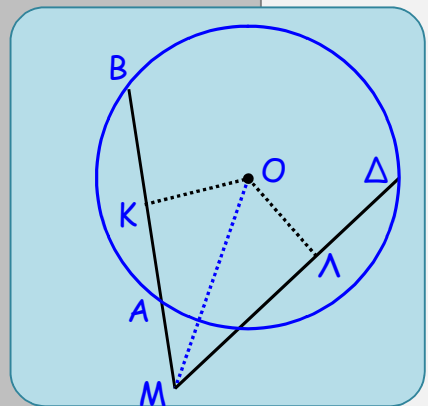
Τα τριγωνα $ABΔ$ και $AΔE$ ειναι ισα γιατι :

Ορθογωνια
 $OM =$ κοινη
 $OK = OL$ (αποστηματα ισων χορδων)

Οποτε ... ισα, δηλαδη :
 $MK = MΛ$

$$\bullet MK = MΛ \stackrel{(1)}{\Rightarrow} MK - AK = MΛ - ΓΛ \Rightarrow MA = MΓ$$

$$\bullet MK = MΛ \stackrel{(1)}{\Rightarrow} MK + KB = MΛ + ΛΔ \Rightarrow MB = MΔ$$



Δυο κυκλοι με κεντρα $K, Λ$ τεμνονται στα A και B . Αν M το μεσο της χορδης AB , να δειχτει οτι $K, M, Λ$ ειναι συνευθειακα.

Φερνομε το μεσο M της AB και τα τμηματα $KM, ΛM$.

• Στο ισοσκελες τριγωνο KAB ($KA = KB =$ ακτινα) KM ειναι διαμεσος, αρα και υφος, οποτε $KM \perp AB$ (1)

• Στο ισοσκελες τριγωνο $ΛAB$ ($ΛA = ΛB =$ ακτινα) $ΛM$ ειναι διαμεσος, αρα και υφος, οποτε $ΛM \perp AB$ (2)

Απο (1), (2) τα $K, M, Λ$ συνευθειακα, γιατι απ' το ιδιο σημειο ευθειας διερχεται μια μονο καθετη.

