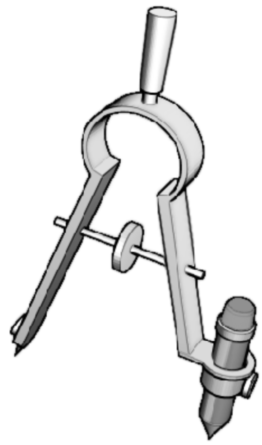
2 Τα Βασικά Γεωμετρικά Σχήματα

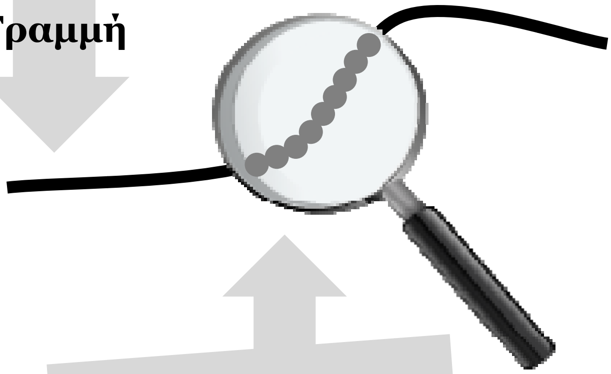


1. Οι Πρωταρχικές Γεωμετρικές Έννοιες

Σημείο A •

Δεν έχει διαστάσεις!! Υπάρχει μόνο στο μυαλό μας. Συμβολίζεται με κεφαλαίο γράμμα.

Γραμμή



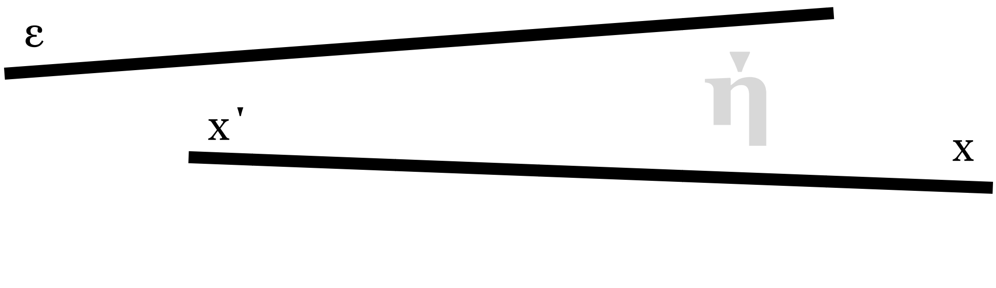
Κάθε γραμμή αποτελείται από άπειρα σημεία.

Ευθεία

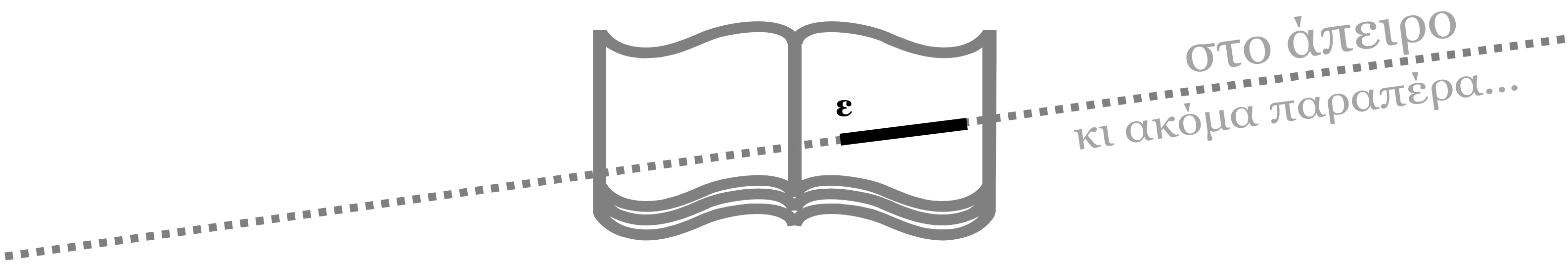
Δεν είναι εύκολο να ορίσει κανείς την ευθεία, όσο απλό κι αν φαίνεται αρχικά. Για το λόγο αυτό τη δεχόμαστε διαισθητικά, σαν μια «ίσια» γραμμή χωρίς αρχή και χωρίς τέλος!

Γράφουμε ... " Δίνεται η **ευθεία ε** ή **x΄x** "

Σχεδιάζουμε ...



Η ευθεία δε σταματάει εκεί που σταματάμε εμείς να σχεδιάζουμε, ούτε εκεί που τελειώνει το φύλλο! Συνεπώς, τα x και x΄ δεν είναι οριακά σημεία, αλλά απλά ονόματα για τις δυο κατευθύνσεις της ευθείας!



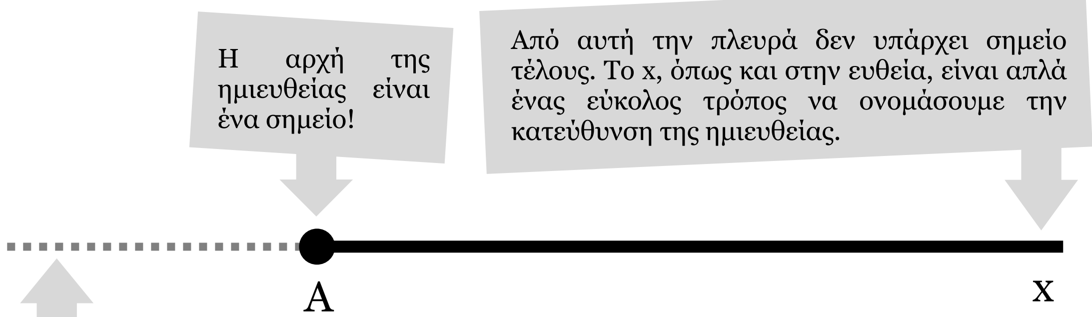
Σχετικές Θέσεις Δύο Ευθειών

Δύο ευθείες μπορούμε να τις σχεδιάσουμε με τους εξής τρόπους:

Ημιευθεία

Με την ίδια λογική που καταλαβαίνουμε την ευθεία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ημιευθεία είναι μια «ίσια» γραμμή, που έχει αρχή αλλά δεν έχει τέλος!

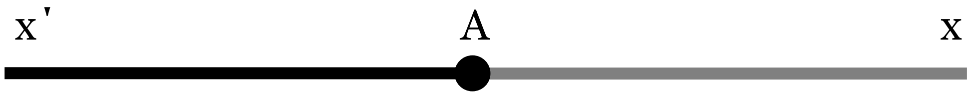
Γράφουμε ... " Δίνεται η **ημιευθεία Αx** "



Φορέας = Η ευθεία, πάνω στην οποία βρίσκεται "ξαπλωμένη" η ημιευθεία.

Την ημιευθεία μπορούμε να την ορίσουμε και καλύτερα ως εξής :

Καθένα από τα δυο μέρη, στα οποία χωρίζεται μια ευθεία από ένα οποιοδήποτε σημείο της.



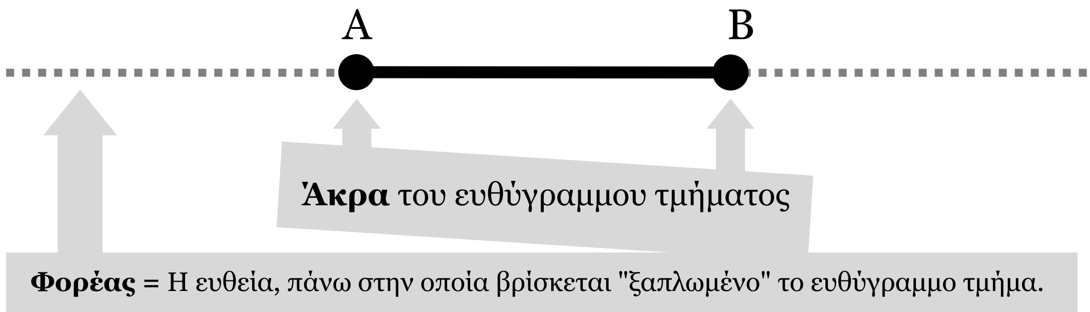
Στην περίπτωση αυτή, οι δυο ημιευθείες λέγονται **αντικείμενες** (= σα να λέμε, δηλαδή, «αντίθετες»).

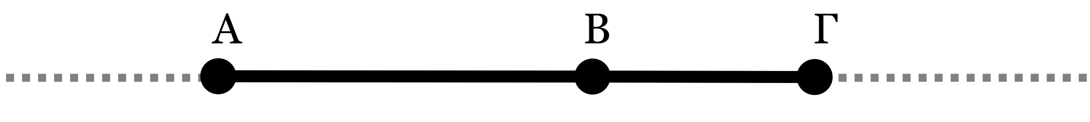
Ευθύγραμμο Τμήμα

Μπορούμε να πούμε, απλά, μια «ίσια» γραμμή με αρχή και τέλος! Αλλά και καλύτερα:

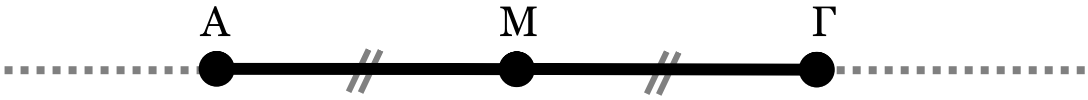
Το μέρος εκείνο μιας ευθείας, το οποίο βρίσκεται ανάμεσα σε δυο σημεία της (καθώς και τα σημεία αυτά).

Γράφουμε ... " Δίνεται το **ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ** (ή **ΒΑ**) "





ΑΒ, ΒΓ = διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα



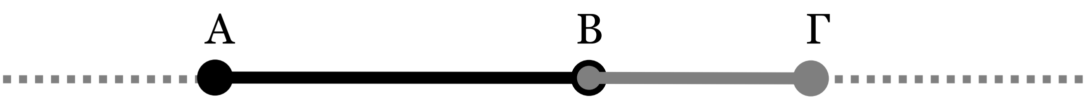
Μέσο του ευθύγραμμου τμήματος

Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ονομάζεται ένα εσωτερικό του σημείο Μ, το οποίο χωρίζει το ΑΒ σε δυο ίσα τμήματα.

Γράφουμε ... $\boxed{\mathbf{AM = MB = \frac{AB}{2}}}$

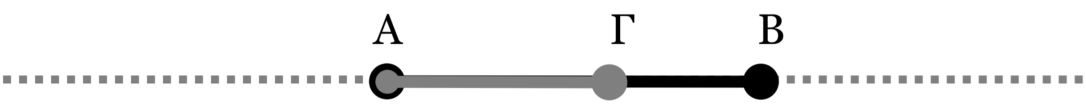
Πρόσθεση - Αφαίρεση
Ευθύγραμμων Τμημάτων

Για να προσθέσουμε δύο ή περισσότερα ευθύγραμμα τμήματα τα μεταφέρουμε πάνω σε μια ευθεία, έτσι ώστε να είναι **διαδοχικά**.



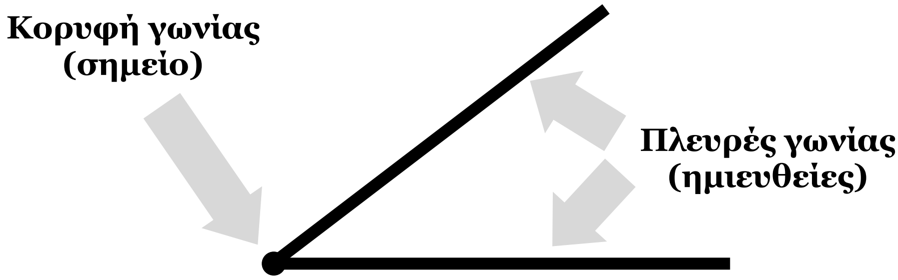
$\boxed{\mathbf{AB + B\Gamma = A\Gamma}}$

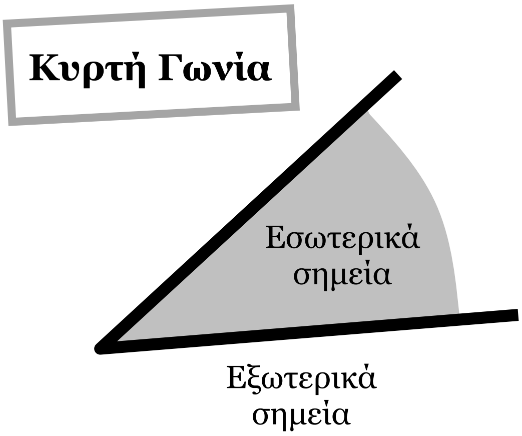
Για να αφαιρέσουμε δυο ευθύγραμμα τμήματα τα μεταφέρουμε πάνω σε μια ευθεία, έτσι ώστε **το μικρότερο τμήμα να βρίσκεται στο εσωτερικό του μεγαλύτερου**, έχοντας όμως το ένα άκρο κοινό.

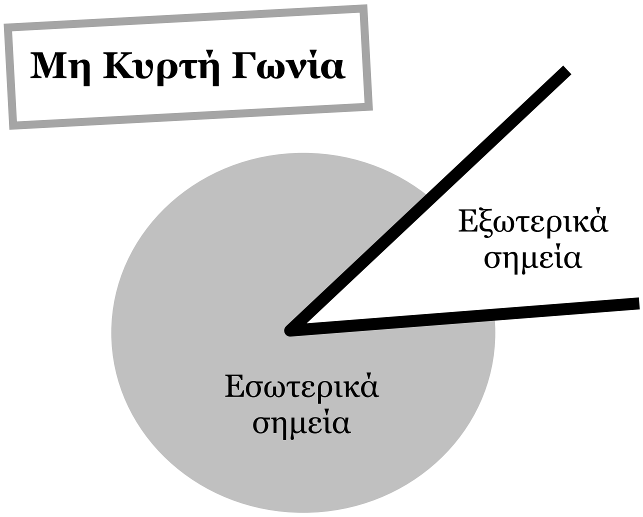


$\boxed{\mathbf{AB - A\Gamma = \Gamma B}}$ και $\boxed{\mathbf{AB - \Gamma B = A\Gamma}}$

2. Γωνίες

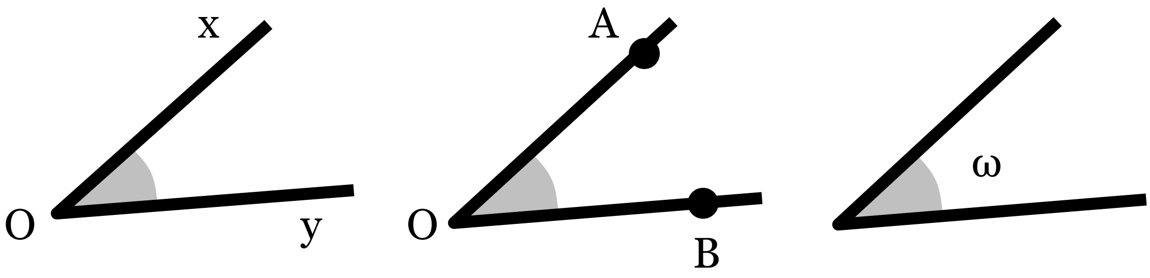






Πώς ονομάζουμε μια γωνία

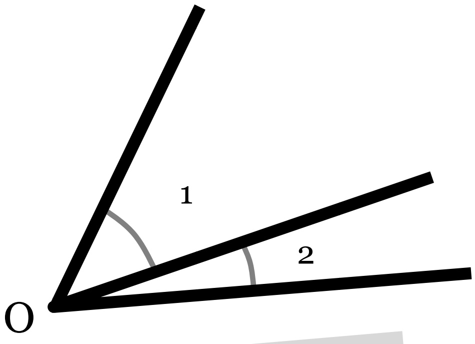
Μια γωνία την ονομάζουμε με πολλούς τρόπους, αναλόγως τι μας εξυπηρετεί καλύτερα σε κάθε πρόβλημα. Μερικά παραδείγματα:



Γωνία $\mathbf{x\hat{O}y}$ ή $\mathbf{y\hat{O}x}$ ή απλά $\mathbf{\hat{O}}$

Γωνία $\mathbf{A\hat{O}B}$ ή $\mathbf{B\hat{O}A}$

Γωνία $\boldsymbol{\hat{\omega}}$

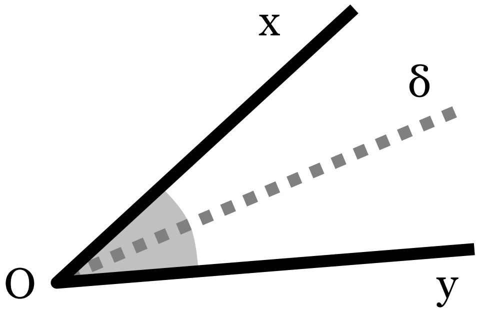


Για ευκολία όταν στο σχήμα υπάρχουν πολλές γωνίες με κοινή κορυφή.

Γωνίες $\hat{O}_1$ και $\hat{O}_2$

Διχοτόμος Γωνίας

Διχοτομός μιας γωνίας $x\hat{O}y$ ονομάζεται μια ημιευθεία Οδ, η οποία χωρίζει τη $x\hat{O}y$ σε δυο ίσες γωνίες.



Γράφουμε ...

$$x\hat{O}\delta = \delta\hat{O}y = \frac{x\hat{O}y}{2}$$

Είδη Γωνιών

Μηδενική Γωνία

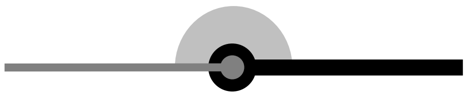
Η κυρτή γωνία της οποίας οι πλευρές ταυτίζονται.

0^o

Ευθεία Γωνία

Η γωνία της οποίας οι πλευρές είναι αντικείμενες ημιευθείες.

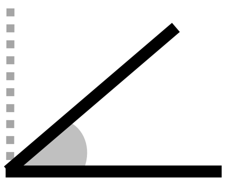
180^o



Οξεία Γωνία

Μια γωνία μικρότερη από μια ορθή.

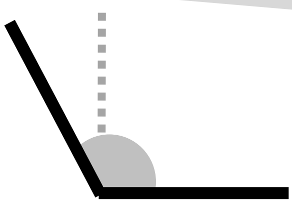
$< 90^o$



Αμβλεία Γωνία

Μια γωνία μεγαλύτερη από μια ορθή.

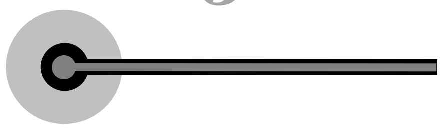
$> 90^o$



Πλήρης Γωνία

Η μη–κυρτή γωνία της οποίας οι πλευρές ταυτίζονται.

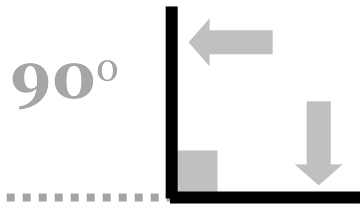
360^o



Ορθή Γωνία

Καθεμία από τις ίσες γωνίες στις οποίες χωρίζεται μια ευθεία γωνία από τη διχοτόμο της.

90^o



Οι πλευρές μιας ορθής γωνίας ονομάζονται **κάθετες** μεταξύ τους.

Κυρτή Γωνία

Μια γωνία μικρότερη από μια ευθεία γωνία.

$< 180^o$

Μη Κυρτή Γωνία

Μια γωνία μεγαλύτερη από μια ευθεία γωνία.

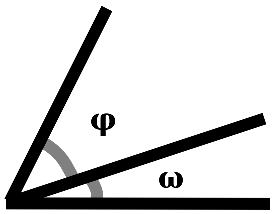
$> 180^o$

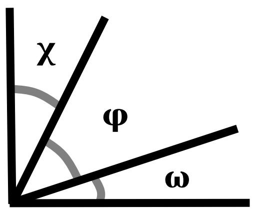
Σχέσεις Γωνιών

Εφεξής Γωνίες

Θα λέγονται δυο γωνίες αν, με απλά λόγια, είναι «κολλητά» η μία στην άλλη, αν δηλαδή η μία αποτελεί συνέχεια της άλλης. Ποιο σωστά, λέμε:

Δυο γωνίες θα λέγονται εφεξής αν έχουν: (α) κοινή κορυφή, (β) κοινή μία πλευρά και (γ) κανένα άλλο κοινό σημείο.

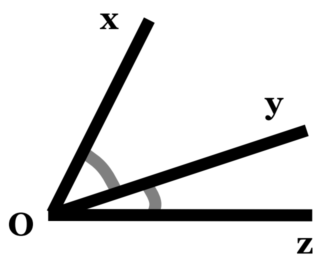




Όταν έχουμε πάνω από δυο εφεξής μαζί τις ονομάζουμε **διαδοχικές**.

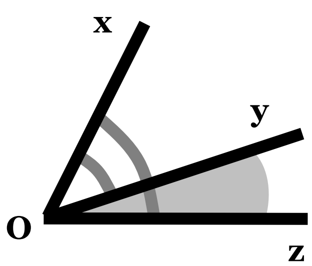
Πρόσθεση - Αφαίρεση
Γωνιών

Για να προσθέσουμε δύο ή περισσότερες γωνίες τις μεταφέρουμε, έτσι ώστε να γίνουν **εφεξής** ή **διαδοχικές**.



$$x\hat{O}y + y\hat{O}z = x\hat{O}z$$

Για να αφαιρέσουμε δυο γωνίες τις μεταφέρουμε, έτσι ώστε **η μικρότερη γωνία να βρίσκεται στο εσωτερικό της μεγαλύτερης**, έχοντας όμως κοινή κορυφή και κοινή τη μία πλευρά.



$$x\hat{O}z - x\hat{O}y = y\hat{O}z$$ **και** $$x\hat{O}z - y\hat{O}z = x\hat{O}y$$

Παραπληρωματικές Γωνίες

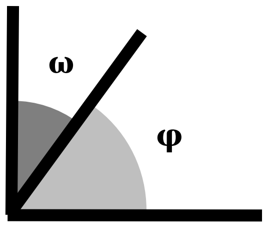
Δυο γωνίες θα λέγονται παραπληρωματικές αν έχουν άθροισμα μια ευθεία γωνία.

$\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 180^o$ ή $\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 2 ∟$

δηλ. 2 ορθές

Συμπληρωματικές Γωνίες

Δύο γωνίες θα λέγονται συμπληρωματικές αν έχουν άθροισμα μια ορθή γωνία.



$\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 90^o$ ή $\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 1 ∟$

δηλ. 1 ορθή

Κατακορυφήν Γωνίες

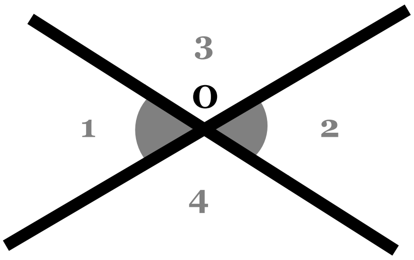
Θα λέγονται δυο γωνίες αν, με απλά λόγια, οι πλευρές τους σχηματίζουν ένα μεγάλο «Χ». Ποιο σωστά όμως λέμε:

Δυο γωνίες θα λέγονται κατακορυφήν αν οι πλευρές της μίας είναι αντικείμενες ημιευθείες (ή προεκτάσεις) των πλευρών της άλλης.

Για τις κατακορυφήν γωνίες γνωρίζουμε, επίσης, το εξής ΘΕΩΡΗΜΑ:

Θ

Οι κατακορυφήν γωνίες είναι πάντα ίσες.



Σε κάθε παρόμοιο σχήμα, λοιπόν, οι απέναντι γωνίες είναι **κατακορυφήν** και ίσες, ενώ οι γειτονικές γωνίες είναι **παραπληρωματικές**. Δηλαδή:

$$\boxed{\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ και } \hat{O}_3 = \hat{O}_4}$$ κατακορυφήν

$$\hat{O}_1 + \hat{O}_3 = 2\llcorner$$
$$\hat{O}_1 + \hat{O}_4 = 2\llcorner$$
$$\hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 2\llcorner$$
$$\hat{O}_2 + \hat{O}_4 = 2\llcorner$$

παραπληρωματικές

3. Κύκλος

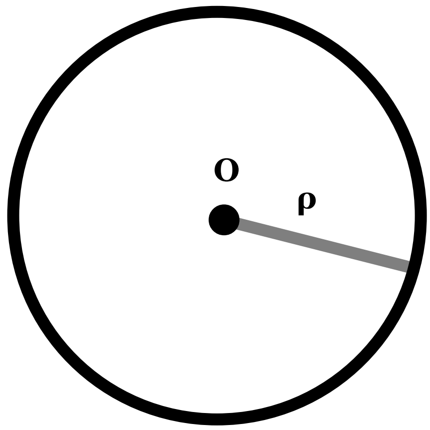
Γεωμετρικός Τόπος

Το σύνολο των σημείων του επιπέδου που έχουν μια κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα λέγεται γεωμετρικός τόπος.

Κύκλος

Το σύνολο των σημείων του επιπέδου, που απέχουν από ένα σημείο Ο απόσταση ίση με ρ, λέγεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ.

Γράφουμε ... " Δίνεται ο κύκλος **(Ο, ρ)** "



Σύμφωνα με τον ορισμό του γεωμετρικού τόπου, μπορούμε επίσης να δώσουμε τον εξής ορισμό:

«Κύκλος, με κέντρο Ο και ακτίνα ρ, είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου τα οποία απέχουν από το σημείο Ο απόσταση ίση με ρ».

Προφανώς...

Δυο κύκλοι θα λέγονται ίσοι όταν έχουν ίσες ακτίνες.

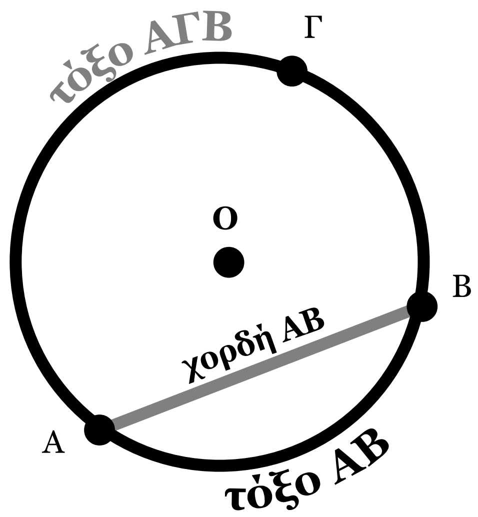
Τόξο, Χορδή, Διάμετρος και άλλα πολλά...

Χορδή

Ένα ευθύγραμμο τμήμα, με άκρα δύο σημεία του κύκλου, λέγεται χορδή του κύκλου.

Τόξο

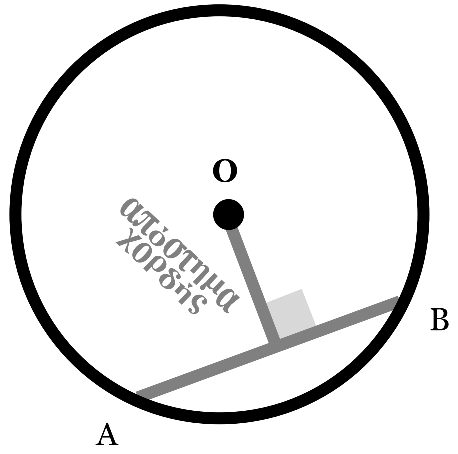
Καθένα από τα δύο μέρη, στα οποία χωρίζεται ένας κύκλος από δύο σημεία του, λέγεται τόξο του κύκλου.



Γράφουμε ... " Δίνεται το τόξο $\overset{\frown}{\mathbf{AB}}$ "

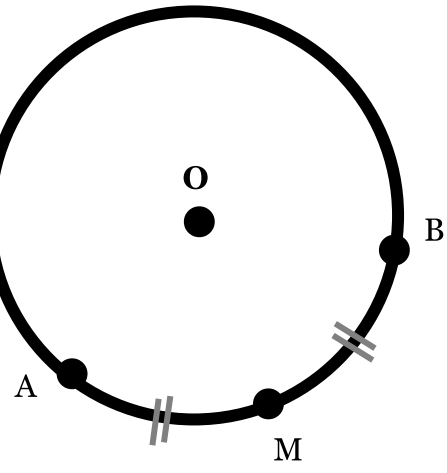
Απόστημα

Το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα, από το κέντρο του κύκλου προς μία του χορδή, λέγεται απόστημα της χορδής.

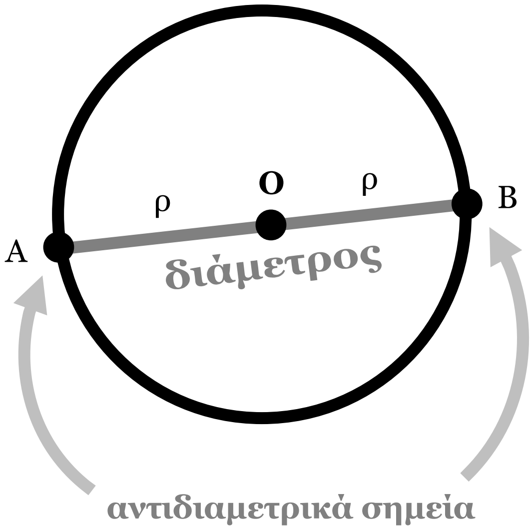


Μέσο Τόξου

Μέσο ενός τόξου ΑΒ θα λέγεται ένα εσωτερικό σημείο του Μ, το οποίο να χωρίζει το ΑΒ σε δύο ίσα τόξα.



Γράφουμε ... $\overset{\frown}{\mathbf{AM}} = \overset{\frown}{\mathbf{MB}} = \dfrac{\overset{\frown}{\mathbf{AB}}}{\mathbf{2}}$



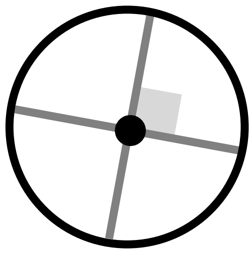
Διάμετρος

Μια χορδή που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου λέγεται διάμετρος.

Είναι προφανές ότι μια διάμετρος **δ** είναι διπλάσια της ακτίνας, δηλαδή ...

$$\boldsymbol{\delta = 2\rho} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{\rho = \frac{\delta}{2}}$$

Καθένα από τα δύο ίσα τόξα, στα οποία μια διάμετρος χωρίζει έναν κύκλο, λέγεται **ημικύκλιο**. Αν πάλι χωρίσουμε τον κύκλο σε τέσσερα ίσα τόξα (φέρνοντας δυο κάθετες διαμέτρους), τότε το καθένα λέγεται **τεταρτοκύκλιο**.



Θέση Σημείου ως προς Κύκλο

Αν μας δώσουν ένα σημείο του επιπέδου κι έναν κύκλο, μπορούν να συμβούν ακριβώς τρία πράγματα και μόνον: είτε το σημείο να βρίσκεται εντός του κύκλου, είτε εκτός του κύκλου, είτε ακριβώς πάνω σε αυτόν.

Αν λοιπόν **(Ο, ρ)** ένας κύκλος, **Μ** ένα σημείο του επιπέδου και **ΟΜ** η απόσταση του σημείου Μ από το κέντρο Ο του κύκλου, τότε ισχύει:

- **Αν Μ εσωτερικό σημείο:**

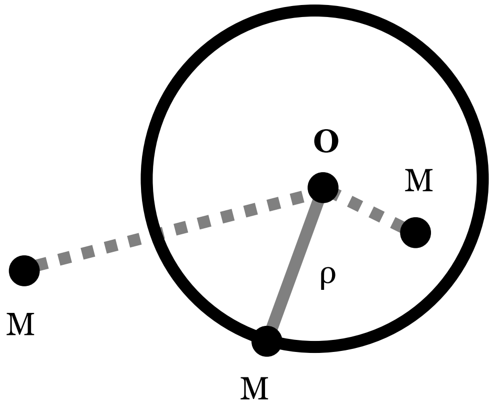
  $\boldsymbol{OM < \rho}$

- **Αν Μ εξωτερικό σημείο:**

  $\boldsymbol{OM > \rho}$

- **Αν Μ σημείο του κύκλου:**

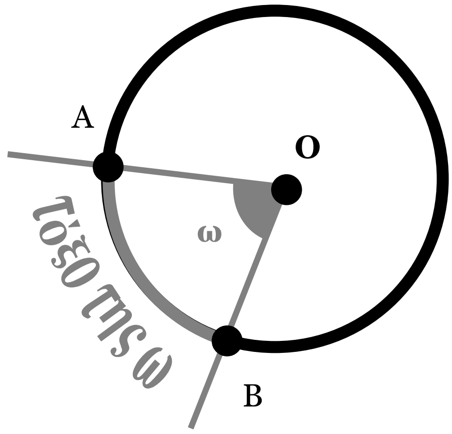
  $\boldsymbol{OM = \rho}$



Επίκεντρη Γωνία

Μια γωνία λέγεται επίκεντρη όταν η κορυφή της είναι το κέντρο ενός κύκλου.

Θα λέμε, ακόμα, ότι η επίκεντρη γωνία ω **«βαίνει στο τόξο ΑΒ»**.

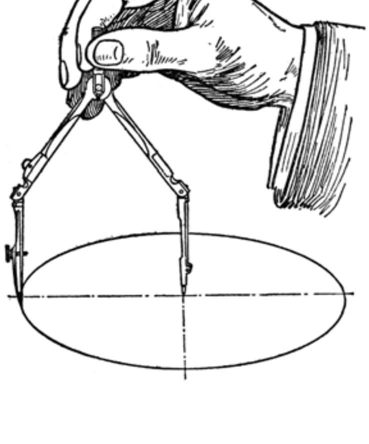


Σύγκριση τόξων

Μπορούμε να συγκρίνουμε τόξα **ΜΟΝΟ αν βρίσκονται στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους!!!** Προσοχή, λοιπόν!!! **Τόξα που βρίσκονται σε άνισους κύκλους ΔΕΝ συγκρίνονται!**

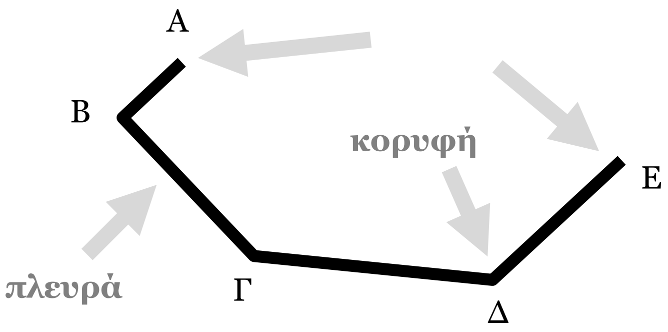
Θ

Δυο τόξα είναι ίσα, αν και μόνο αν οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες είναι ίσες.



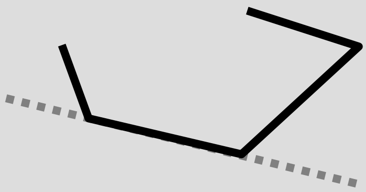
4. Ευθύγραμμα Σχήματα

Τεθλασμένη Γραμμή είναι το σχήμα εκείνο, που αποτελείται από διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα, έτσι ώστε τα άκρα τους ανά τρία διαδοχικά να μην είναι συνευθειακά.



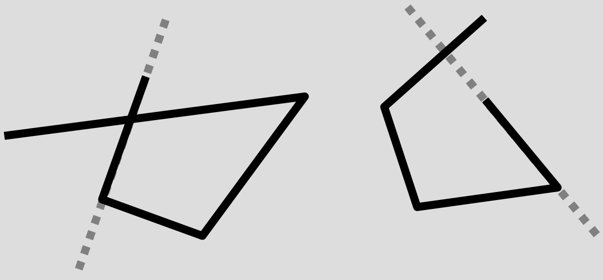
Περίμετρος = το άθροισμα των πλευρών

πχ. Π = ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΕ

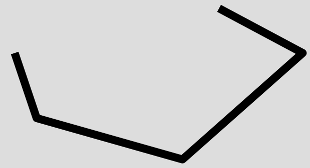


Κυρτή Τεθλασμένη

Όταν ο φορέας κάθε πλευράς της αφήνει όλες τις άλλες κορυφές, προς το ίδιο μέρος.

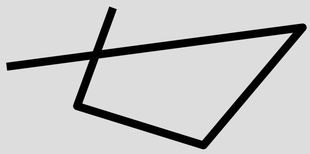


Μη Κυρτές Τεθλασμένες



Απλή Τεθλασμένη

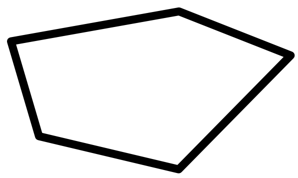
Όταν δύο οποιεσδήποτε μη διαδοχικές πλευρές της δεν τέμνονται.



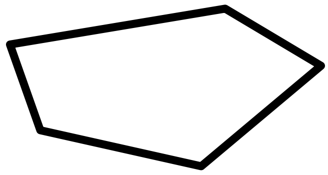
Τεθλασμένη που ΔΕΝ είναι απλή.

Κλειστή Τεθλασμένη

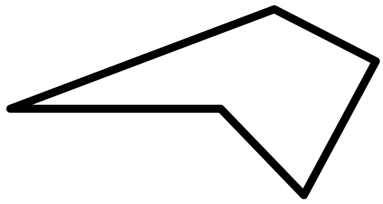
Μια τεθλασμένη της οποίας τα άκρα ταυτίζονται.



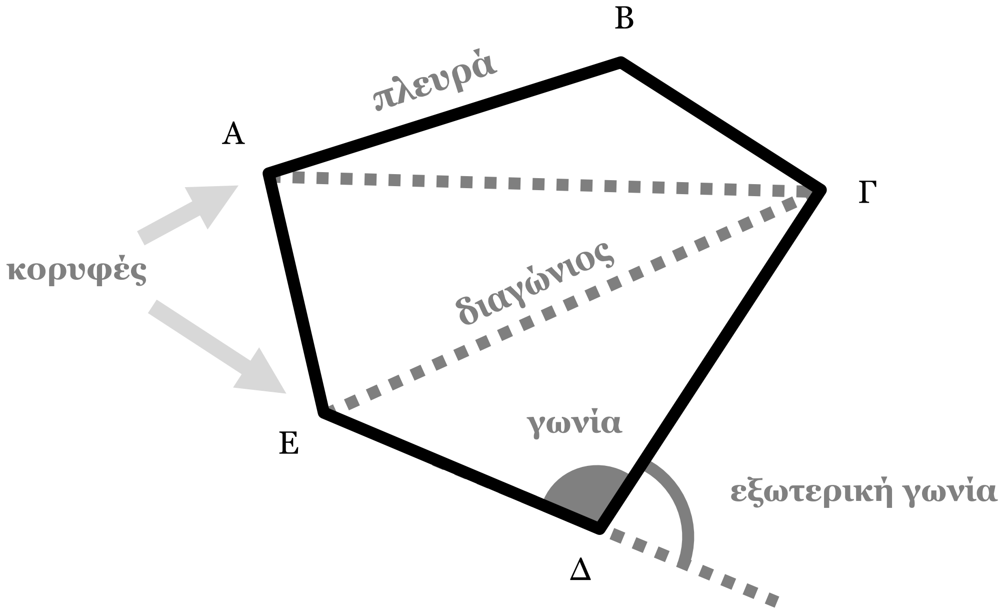
Πολύγωνο Μια **κλειστή** και **απλή** τεθλασμένη γραμμή.

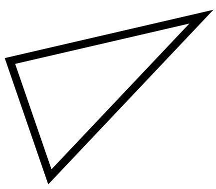


Κυρτό πολύγωνο

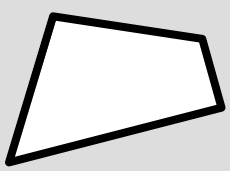


Μη κυρτό πολύγωνο

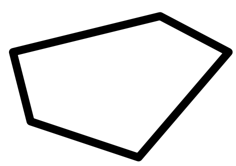




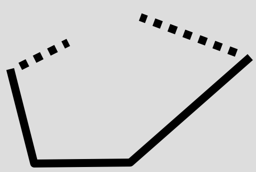
Τρίγωνο



Τετράπλευρο



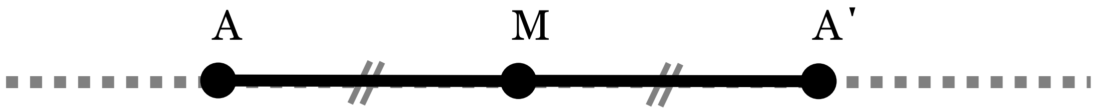
Πεντάγωνο



ν–γωνο

5. Παράρτημα

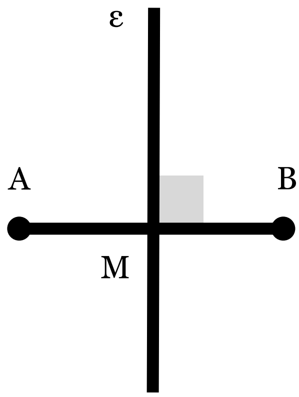
Σημεία συμμετρικά ως προς κέντρο



Αν σε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΑ΄ σημειώσουμε το μέσο του Μ, τότε για τα σημεία Α και Α΄ θα λέμε ότι είναι συμμετρικά, ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο Μ. Άρα:

Ένα σημείο Α΄ θα λέγεται συμμετρικό ενός σημείου Α, ως προς κέντρο συμμετρίας ένα σημείο Ο, όταν το Ο είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΑ΄.

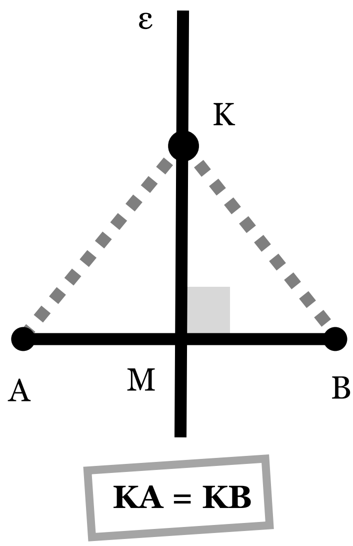
Μεσοκάθετος Ευθύγραμμου Τμήματος



Όπως λέει και το όνομά της…

Μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ θα λέγεται η ευθεία που είναι κάθετη στο ΑΒ και διέρχεται από το μέσο του.

Ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου



Κάθε σημείο της μεσοκάθετου ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ισαπέχει από τα άκρα του Α και Β.

Αλλά και αντιστρόφως…

Αν ένα σημείο ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ τότε είναι σημείο της μεσοκάθετου.

Άρα, σύμφωνα με τα προηγούμενα, μπορούμε να πούμε ότι:

Μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, που ισαπέχουν από τα άκρα του ΑΒ.

Σημεία συμμετρικά ως προς άξονα

Για τα σημεία Α και Β, στο προηγούμενο σχήμα, λέμε ότι είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία ε, η οποία θα λέγεται και **άξονας συμμετρίας**. Άρα:

Ένα σημείο Α΄ θα λέγεται συμμετρικό ενός σημείου Α, ως προς άξονα συμμετρίας μια ευθεία (ε), όταν η (ε) είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΑ΄.