ΘΕΜΑ 4_17855

α. Γνωρίζουμε ότι Τ = 2π/ω , όπου ω ο συντελεστής της ανεξάρτητης μεταβλητής t . Εδώ έχουμε ω = π/4 , συνεπώς:

$T = 2\pi/\omega \Leftrightarrow T = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow$ **T = 8** (ώρες)

β. Για t = 5 έχουμε :

f(5) = 12·ημ(5π/4) + 13

Όμως, είναι:

$$\text{ημ}\frac{5\pi}{4} = \text{συν}\left(\frac{4\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \text{συν}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \text{κανόνας γωνιών που διαφέρουν κατά } \pi = -\text{συν}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Επομένως:

f(5) = 12·(− $\sqrt{2}$ /2) + 13 = **−6 $\sqrt{2}$ + 13 cm**

Για t = 8 έχουμε :

f(8) = 12·ημ(8π/4) + 13 = 12·ημ(2π) + 13 = 12·0 + 13 = **13 cm**

γ. **1ος τρόπος**

Κατασκευάζουμε πίνακα τιμών, στον οποίο βοηθητικά τοποθετούμε και τις τιμές της βασικής συνάρτησης ημx. Από τις τελευταίες, πολλαπλασιάζοντας κάθε τιμή με 12 και προσθέτοντας 13 , θα προκύψουν οι αντίστοιχες τιμές της f(t) = 12·ημ(πt/4) + 13 .

t	0	2	4	6	8
h(t)	13	25	13	1	13
ημt	**0**	**1**	**0**	**−1**	**0**

Παρατηρούμε ότι η απόσταση γίνεται ελάχιστη και ίση με **1 m** , τη χρονική στιγμή **t = 6 sec** .

2ος τρόπος

Μπορούμε, ωστόσο, να δουλέψουμε και καθαρά αλγεβρικά. Γνωρίζουμε ότι:

$-1 \le ημ(πt/4) \le 1 \Leftrightarrow$ (πολλαπλασιάζουμε όλα τα μέλη με 12)

$-12 \le 12 \cdot ημ(πt/4) \le 12 \Leftrightarrow$ (προσθέτουμε σε όλα τα μέλη 13)

$-12 + 13 \le 12 \cdot ημ(πt/4) + 13 \le 12 + 13 \Leftrightarrow$

$\mathbf{1 \le f(t) \le 25}$

Από την τελευταία, συμπεραίνουμε εύκολα ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι 1 m και η μέγιστη τιμή 25 m .

Λύνουμε την εξίσωση:

$f(t) = 1 \Leftrightarrow 12 \cdot ημ(πt/4) + 13 = 1 \Leftrightarrow ημ(πt/4) = -1 = ημ(3π/2)$

$$\begin{cases} \dfrac{πt}{4} = 2κπ + \dfrac{3π}{2} \\ \dfrac{πt}{4} = 2κπ + π - \dfrac{3π}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{πt}{4} = 2κπ + \dfrac{3π}{2} \\ \dfrac{πt}{4} = 2κπ - \dfrac{π}{2} \end{cases} \quad (κ \in \mathbb{Z})$$

- Από την πρώτη λύση, με απαλοιφή παρονομαστών επί 4, έχουμε:

  $πt = 8κπ + 6π \Leftrightarrow t = 8κ + 6$

  Όμως πρέπει $t \in [0, 8]$ δηλαδή:

  $0 \le t \le 8 \Leftrightarrow$

  $0 \le 8κ + 6 \le 8 \Leftrightarrow$ (προσθέτουμε -6 σε όλα τα μέλη)

  $-6 \le 8κ \le 2 \Leftrightarrow$ (διαιρούμε με 8 όλα τα μέλη)

  $-3/4 \le κ \le 1/4$

  Επειδή $κ \in \mathbb{Z}$, η μοναδική λύση της προηγούμενης είναι για $κ = 0$. Στην περίπτωση αυτή: $t = 8 \cdot 0 + 6 \Leftrightarrow$ $\mathbf{t = 6\ sec}$.

- Από την δεύτερη λύση, με απαλοιφή παρονομαστών επί 4, έχουμε:

  $πt = 8κπ - 2π \Leftrightarrow t = 8κ - 2$

  Για $t \in [0, 8]$ έχουμε:

  $0 \le t \le 8 \Leftrightarrow$

  $0 \le 8κ - 2 \le 8 \Leftrightarrow$ (προσθέτουμε 2 σε όλα τα μέλη)

  $2 \le 8κ \le 10 \Leftrightarrow$ (διαιρούμε με 8 όλα τα μέλη)

  $1/4 \le κ \le 5/4$

  Επειδή $κ \in \mathbb{Z}$, η προηγούμενη έχει λύση μόνα για $κ = 1$. Στην περίπτωση αυτή: $t = 8 \cdot 1 - 2 \Leftrightarrow$ $\mathbf{t = 6\ sec}$.