ΘΕΜΑ 4_17846

α. Όσον αφορά στην f(x) = συνx , συμπληρώνουμε καταρχήν διαμιάς όσα "κελιά" μας είναι γνωστά από τη θεωρία και τη μελέτη της συνάρτησης :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
f(x)	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0		-1		0		1

1ος τρόπος

Με τη βοήθεια των κανόνων αναγωγής στο 1ο τεταρτημόριο έχουμε:

- $$\textbf{συν}\frac{\mathbf{3\pi}}{\mathbf{4}} = συν\left(\frac{4\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = συν\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= \text{κανόνας παραπληρωματικών γωνιών} = -συν\frac{\pi}{4} = -\frac{\mathbf{\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}$$

- $$\textbf{συν}\frac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{4}} = συν\left(\frac{4\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = συν\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= \text{κανόνας γωνιών που διαφέρουν κατά } \pi = -συν\frac{\pi}{4} = -\frac{\mathbf{\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}$$

- $$\textbf{συν}\frac{\mathbf{7\pi}}{\mathbf{4}} = συν\left(\frac{8\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = συν\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right) = συν\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= \text{κανόνας αντίθετων γωνιών} = συν\frac{\pi}{4} = \frac{\mathbf{\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}$$

2ος τρόπος

Μπορούμε, επίσης, να κάνουμε την εξής παρατήρηση: οι τιμές του x δεν είναι παρά πολλαπλάσια του π/4 ή αλλιώς των 90^{o} . Η γωνία αυτή όμως - λόγω που η πλευρά της είναι και διχοτόμος των τεταρτημορίων - έχει με τα πολλαπλάσιά της όλες τις δυνατές συμμετρίες: αξονική ως προς x΄x, y΄y και αξονική ως προς την αρχή των αξόνων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι τριγωνομετρικοί της αριθμοί να είναι όλοι ίσοι με $\sqrt{2}/2$, κατ' απόλυτη τιμή, διαφέροντας μόνο ως προς το πρόσημο. Με τη βοήθεια του πρακτικού κανόνα ΟΗΕΣ, έχουμε:

- $$\textbf{συν}\frac{\mathbf{3\pi}}{\mathbf{4}} = 2\text{ο τεταρτημόριο} \to συνx < 0 = -\frac{\mathbf{\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}$$

- $$\textbf{συν}\frac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{4}} = 3\text{ο τεταρτημόριο} \to συνx < 0 = -\frac{\mathbf{\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}$$

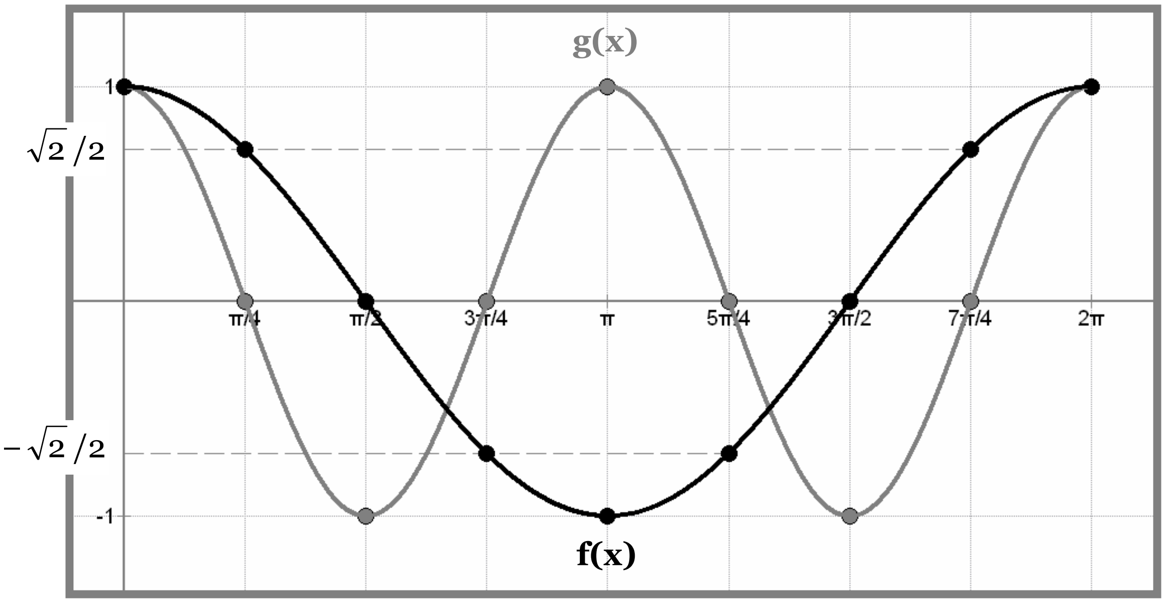
- $\boldsymbol{\text{συν}\dfrac{7\pi}{4}}$ = 4ο τεταρτημόριο → συνx > 0 = $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

Όποιον τρόπο κι αν προτιμήσουμε, τελικά, ο πίνακας τιμών ολοκληρωμένος θα είναι :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
f(x)	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Όσον αφορά στη g(x) = συν2x , εύκολα διαπιστώνουμε ότι έχει περίοδο Τ = 2π/ω = 2π/2 = π . Συνεπώς, οι τιμές της θα είναι ίδιες με τις τιμές της βασικής συνάρτησης συνx: 1, 0, −1, 0, 1 , μόνο «στριμωγμένες» τώρα σε διάστημα περιόδου π, αντί για 2π. Είναι προφανές, ότι στο [0, 2π] η g(x) θα κάνει δύο επαναλήψεις. Έχουμε, τελικά:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
f(x)	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
g(x)	1	0	−1	0	1	0	−1	0	1



β. Προφανώς, λύσεις της εξίσωσης συν2x = συνx θα αποτελούν τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g . Από το προηγούμενο σχήμα, στο διάστημα [0, 2π] περιμένουμε να υπάρχουν 4 λύσεις , όσα δηλαδή και τα σημεία τομής τους.

γ. Λύνουμε την εξίσωση:

$\sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$

$2x = 2\kappa\pi + x$ ή $2x = 2\kappa\pi - x$ $(\kappa\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow$

$x = 2\kappa\pi$ ή $3x = 2\kappa\pi \Leftrightarrow$

$\mathbf{x = 2\kappa\pi}$ ή $\mathbf{x = 2\kappa\pi/3}$

Απαιτούμε οι παραπάνω λύσεις ν' ανήκουν στο διάστημα [0, 2π] .

Για την πρώτη εξίσωση, είναι προφανές ότι αυτό συμβαίνει αν κ = 0 ή κ = 1 , συνεπώς έχουμε δύο λύσεις:

$$\mathbf{x = 0} \text{ ή } \mathbf{x = 2\pi}$$

Για τη δεύτερη περίπτωση, λύνουμε την ανίσωση:

$0 \le x \le 2\pi \Leftrightarrow$

$0 \le 2\kappa\pi/3 \le 2\pi \Leftrightarrow 0 \le 2\kappa\pi \le 6\pi \Leftrightarrow 0 \le 2\kappa \le 6 \Leftrightarrow 0 \le \kappa \le 3$

Από την οποία, λόγω που $\kappa\in\mathbb{Z}$, έχουμε λύσεις για **κ = 0, 1, 2, 3** .

Για καθεμία από αυτές, έχουμε:

- $\kappa = 0 \Rightarrow x = 2\cdot 0\cdot\pi/3 \Leftrightarrow \mathbf{x = 0}$
- $\kappa = 1 \Rightarrow x = 2\cdot 1\cdot\pi/3 \Leftrightarrow \mathbf{x = 2\pi/3}$
- $\kappa = 2 \Rightarrow x = 2\cdot 2\cdot\pi/3 \Leftrightarrow \mathbf{x = 4\pi/3}$
- $\kappa = 3 \Rightarrow x = 2\cdot 3\cdot\pi/3 \Leftrightarrow \mathbf{x = 2\pi}$

Στο σημείο αυτό, έχουμε υπολογίσει τις τετμημένες των σημείων τομής. Προχωρούμε τώρα στον υπολογισμό των τεταγμένων, επίσης.

- $f(0) = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$
- $f(2\pi/3) = \sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{3} = \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{3\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) =$

  κανόνας παραπληρωματικών $= \sigma\upsilon\nu\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) =$

  κανόνας αντίθετων $= \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

▶ $f(4\pi/3) = \text{συν}\dfrac{4\pi}{3} = \text{συν}\left(\dfrac{3\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3}\right) = \text{συν}\left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) =$

κανόνας γωνιών που διαφέρουν κατά π $= -\text{συν}\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$

▶ $f(2\pi) = \text{συν}2\pi = 1$

Συνεπώς, έχουμε συγκεντρώσει τα παρακάτω σημεία:

(0 , 1) , (2π/3 , −1/2) , (4π/3 , −1/2) , (2π, 1)

Τα οποία - αμ' έπος αμ' έργον - απεικονίζουμε και στη γραφική παράσταση: