ΘΕΜΑ 4_17842

α. Εφόσον η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία Α και Β, αυτό σημαίνει ότι οι συντεταγμένες των σημείων θα επαληθεύουν την εξίσωση της συνάρτησης.

Για το σημείο Α (0, 16) αυτό σημαίνει ότι:

$$f(0) = 16 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(0 - c)^2 - d = 16 \Leftrightarrow \frac{1}{2}c^2 - d = 16 \Leftrightarrow \mathbf{c^2 - 2d = 32}$$

Για το σημείο Β (4, 0) αυτό σημαίνει ότι:

$$f(4) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(4 - c)^2 - d = 0 \Leftrightarrow (4 - c)^2 - 2d = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16 - 8c + c^2 - 2d = 0 \Leftrightarrow \mathbf{c^2 - 8c - 2d = -16}$$

Έχουμε, δηλαδή, το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} \mathbf{c^2 - 2d = 32} \\ \mathbf{c^2 - 8c - 2d = -16} \end{cases}$$

το οποίο και λύνουμε:

$$\begin{cases} c^2 - 2d = 32 \\ c^2 - 8c - 2d = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} (-1)\cdot \\ \\ \end{matrix}\begin{cases} c^2 - 2d = 32 \\ c^2 - 8c - 2d = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -c^2 + 2d = -32 \\ c^2 - 8c - 2d = -16 \end{cases} \overset{\oplus}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow -8c = -48 \Leftrightarrow \mathbf{c = 6}$$

Η 1η εξίσωση μας δίνει, για c = 6 :

$$36 - 2d = 32 \Leftrightarrow -2d = -4 \Leftrightarrow \mathbf{d = 2}$$

β. Για c = 6 και d = 2 η εξίσωση της συνάρτησης γίνεται:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x - 6)^2 - 2 = \frac{1}{2}(x^2 - 12x + 36) - 2 = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 18 - 2 \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 16}$$

i. Από τις συντεταγμένες των δοθέντων σημείων, είναι προφανές ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Β (4, 0) και τον y΄y στο Α (0, 16) .

Εφόσον η f είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού, η γραφική παράστασή της θα είναι παραβολή.

Συνεπώς, η C_f θα τέμνει το άξονα y΄y σε ένα μοναδικό σημείο, το οποίο και προφανώς είναι το **Α (0, 16)** .

Ωστόσο, επειδή μια παραβολή τέμνει τον $x'x$ σε δύο το πολύ σημεία, θα πρέπει να εξετάσουμε μήπως υπάρχει και δεύτερο σημείο τομής, εκτός από το Β.

Θέτουμε όπου $y = f(x) = 0$ και λύνουμε την εξίσωση, που προκύπτει:

$$0 = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 16 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 32 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 144 - 4 \cdot 1 \cdot 32 = 144 - 128 = 16 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{16}{2} = 8 \\ x_2 = \dfrac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

Συνεπώς, τα σημεία τομής με τον άξονα $x'x$ είναι τα εξής δύο:

Β (4, 0) και **Γ (8, 0)**

ii. Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της f, με κάποια σχετική ακρίβεια, χρειάζεται καταρχάς να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες της κορυφής της. Γνωρίζουμε, για κάθε παραβολή, ότι οι συντεταγμένες αυτές δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}, \quad y_0 = -\frac{\Delta}{4\alpha}$$

Παρατήρηση: Φυσικά και μπορούμε, πονηρά σκεπτόμενοι και λόγω της αξονικής συμμετρίας μιας παραβολής, να υποψιαστούμε ότι η τετμημένη της κορυφής θα είναι $x_0 = 6$, δηλαδή ακριβώς στο μέσον του διαστήματος [4, 8], που ορίζεται από τα σημεία τομής της με τον άξονα $x'x$. Τέλος παρατήρησης.

Επομένως, έχουμε $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -6$, $\gamma = 16$ και $\Delta = 36 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 16 = 4$

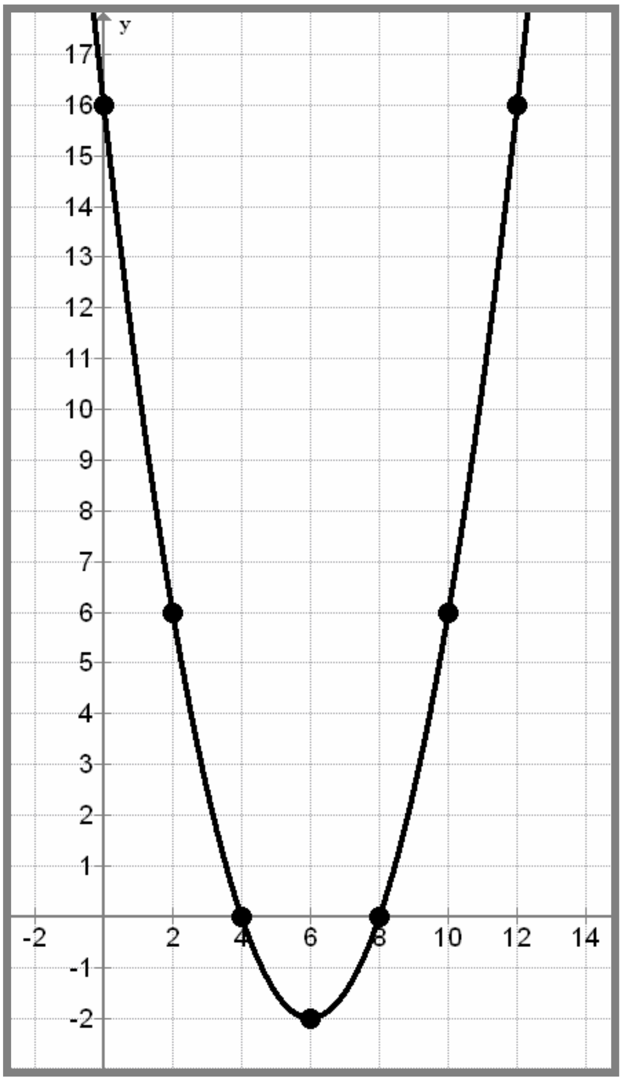
$$\mathbf{x_0} = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-6}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{6}{1} = \mathbf{6} \quad \text{και} \quad \mathbf{y_0} = -\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{4}{4 \cdot \frac{1}{2}} = \mathbf{-2}$$

Κατασκευάζουμε πίνακα τιμών, εκμεταλλευόμενοι φυσικά και όλα εκείνα τα χρήσιμα στοιχεία, τα οποία είναι ήδη γνωστά, όπως τα σημεία τομής με τους άξονες και την αξονική συμμετρία.

x	0	2	4	6	8	10	12
f(x)	16	6	0	− 2	0	6	16

Υπολογίζουμε: $f(2) = \frac{1}{2}2^2 - 6 \cdot 2 + 16 = 2 - 12 + 16 = 6 = f(10)$

Προχωρούμε τώρα στην σχεδίαση:



Από την αρχική μορφή του τύπου της f , $f(x) = \frac{1}{2}(x - 6)^2 - 2$ είναι εύκολο να αντιληφθούμε, ότι η γραφική της παράσταση προκύπτει από εκείνη της $g(x) = \frac{1}{2}x^2$, αν μετατοπίσουμε την τελευταία κατά:

- 6 μονάδες δεξιά και
- 2 μονάδες προς τα κάτω

iii. Είναι προφανές, από τη γραφική παράσταση ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο $x_0 = 6$ ελάχιστη τιμή ίση με $f(6) = -2$.

Όσον αφορά στη μονοτονία, γίνεται επίσης φανερό ότι:

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα (↘) στο διάστημα $(-\infty , 6]$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα (↗) στο διάστημα $[6, +\infty)$.