ΘΕΜΑ 4_17841

α. Γνωρίζουμε ότι για οποιαδήποτε γωνία ω είναι $-1 \le ημω \le 1$, συνεπώς:

$-1 \le ημ(πt/30) \le 1 \Leftrightarrow$ (πολλαπλασιάζουμε όλα τα μέλη με 6)

$-6 \le 6 \cdot ημ(πt/30) \le 6 \Leftrightarrow$ (προσθέτουμε σε όλα τα μέλη το 8)

$2 \le 8 + 6ημ(πt/30) \le 14 \Leftrightarrow$

$\mathbf{2 \le h(t) \le 14}$

Συνεπώς, το μέγιστο ύψος του καθίσματος είναι 14 μέτρα, ενώ το ελάχιστο 2 μέτρα.

- Για το μέγιστο ύψος έχουμε:

$h(t) = 14 \Leftrightarrow 8 + 6 \cdot ημ(πt/30) = 14 \Leftrightarrow 6ημ(πt/30) = 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ημ(πt/30) = 1$

Φυσικά, θα μπορούσαμε πολύ ταχύτερα να σκεφτούμε ότι, εφόσον δεν αλλάζει η μονοτονία (ο συντελεστής του ημιτόνου είναι θετικός), η h(x) γίνεται μέγιστη όταν το ημ(πt/30) γίνεται μέγιστο, όταν δηλαδή γίνεται ίσο με τη μονάδα.

Λύνουμε την εξίσωση:

$ημ(πt/30) = 1 \Leftrightarrow ημ(πt/30) = ημ(π/2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{πt}{30} = 2κπ + \dfrac{π}{2} \\ \dfrac{πt}{30} = 2κπ + π - \dfrac{π}{2} \end{cases} \overset{\cdot 30}{\Leftrightarrow} \begin{cases} πt = 60κπ + 15π \\ πt = 60κπ + 15π \end{cases} \overset{:π}{\Leftrightarrow} t = 60κ + 15 \ \ (κ \in \mathbb{Z})$$

Όμως $0 \le t \le 180$, συνεπώς:

1ος τρόπος

Επειδή το διάστημα είναι μικρό και οι τιμές ακέραιες, οι πράξεις είναι απλούστερες κι από απλοϊκές! Με λίγες δοκιμές, για μικρές τιμές του κ, έχουμε:

Για **κ = 0** , $t = 60 \cdot 0 + 15 = 15$

Για **κ = 1** , $t = 60 \cdot 1 + 15 = 75$

Για **κ = 2** , $t = 60 \cdot 2 + 15 = 135$

Συνεπώς, το κάθισμα των δύο κοριτσιών βρίσκεται στο μέγιστο ύψος μετά από **15** , **75** και **135 sec** .

2ος τρόπος

Αυτός ο τρόπος δεν ενδείκνυται για τη συγκεκριμένη περίπτωση, αλλά παρατίθεται για διδακτικούς μόνο λόγους, ως γενική περίπτωση επίλυσης:

$0 \le t \le 180 \Leftrightarrow$

$0 \le 60\,\kappa + 15 \le 180 \Leftrightarrow$ (προσθέτουμε σε όλα τα μέλη το −15)

$-15 \le 60\kappa \le 165 \Leftrightarrow$ (διαιρούμε όλα τα μέλη με 60)

$-15/60 \le \kappa \le 165/60 \Leftrightarrow$ (απλοποιούμε)

$-1/4 \le \kappa \le 11/4$

Όμως $\kappa \in \mathbb{Z}$ και οι ακέραιες τιμές, που βρίσκονται ανάμεσα στο $-1/4 = -0{,}25$ και το $11/4 = 2{,}75$ είναι:

κ = 0, 1 και **2**

Επομένως:

Για **κ = 0** , $t = 60 \cdot 0 + 15 =$ **15**

Για **κ = 1** , $t = 60 \cdot 1 + 15 =$ **75**

Για **κ = 2** , $t = 60 \cdot 2 + 15 =$ **135**

- Σκεπτόμενοι ανάλογα με την προηγούμενη περίπτωση, το ύψος γίνεται ελάχιστο αν:

  $h(t) = 2 \Leftrightarrow \eta\mu(\pi t/30) = -1 \Leftrightarrow \eta\mu(\pi t/30) = \eta\mu(-\pi/2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\pi t}{30} = 2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi t}{30} = 2\kappa\pi + \pi + \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\pi t}{30} = 2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi t}{30} = 2\kappa\pi + \dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \overset{\cdot 30}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \pi t = 60\kappa\pi - 15\pi \\ \pi t = 60\kappa\pi + 45\pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\overset{:\pi}{\Leftrightarrow} \begin{cases} t = 60\kappa - 15 \\ t = 60\kappa + 45 \end{cases} \quad (\kappa \in \mathbb{Z})$$

Όμως $0 \le t \le 180$, συνεπώς με δοκιμές η 1η λύση δίνει:

Για **κ = 1** , $t = 60 \cdot 1 - 15 = 45$

Για **κ = 2** , $t = 60 \cdot 2 - 15 = 105$

Για **κ = 3** , $t = 60 \cdot 3 - 15 = 165$

Ενώ η 2η λύση δίνει:

Για **κ = 0** , $t = 60 \cdot 0 + 45 = 45$

Για **κ = 1** , $t = 60 \cdot 1 + 45 = 105$

Για **κ = 2** , $t = 60 \cdot 2 + 45 = 165$

Που είναι προφανώς οι ίδιες. Συνεπώς, το κάθισμα των δύο κοριτσιών φτάνει στο ελάχιστο ύψος τις χρονικές στιγμές **45** , **105** και **165 sec** .

Παρατήρηση

Ένας διαφορετικός τρόπος σκέψης θα ήταν να βρούμε, αρχικά, την περίοδο της τριγωνομετρικής συνάρτησης, η οποία δίνεται από τη σχέση $T = 2\pi/\omega$, όπου ω ο συντελεστής της ανεξάρτητης μεταβλητής. Στην άσκησή μας, ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος t , ενώ ο συντελεστής της είναι $\omega = \pi/30$. Συνεπώς:

$$\mathbf{T} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{30}} = \frac{60\pi}{\pi} = \mathbf{60\ sec}$$

Συνεπώς, αν παρουσιάζει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή σε κάποια χρονική στιγμή, τότε θα παρουσιάζει και πάλι αντίστοιχη τιμή μετά από χρόνο μιας περιόδου, δηλαδή μετά από 60 sec. Αυτό σημαίνει πως αν βρούμε πχ. ότι για $\kappa = 1$ έχουμε ελάχιστη τιμή σε χρόνο 45 sec, τότε η επόμενη ελάχιστη τιμή θα είναι μετά από: 45 + 60 = 105 sec , η μεθεπόμενη μετά από 105 + 60 = 165 sec , κ.τ.λ.

β. Εφόσον το μέγιστο ύψος του καθίσματος είναι 14 μέτρα και το ελάχιστο 2 μέτρα, άρα η διάμετρος της ρόδας θα είναι 14 − 2 = 12 μέτρα και, συνεκδοχικά, η ακτίνα **ρ = 6 m** .

γ. Η πρώτη ερώτηση έχει απαντηθεί στην παρατήρηση του ερωτήματος (α) και είναι **T = 60 sec** .

Συνεπώς, ο αριθμός των περιστροφών θα είναι:

(συνολικός χρόνος) : (περίοδος) = 180 : 60 = **3 περιστροφές**

δ. **i.** Από τα προηγούμενα είναι γνωστό ότι στο διάστημα [0, 90]:

- η h παρουσιάζει μέγιστο 14 τις στιγμές $t = 15$ και 75 sec.
- η h παρουσιάζει ελάχιστη τιμή 2 τη στιγμή $t = 45$ sec.

Συνεπώς:

t	0	15	30	45	60	75	90
h(t)		14		2		14	

Με απλή αντικατάσταση, υπολογίζουμε και τις υπόλοιπες τιμές της συνάρτησης:

$h(0) = 8 + 6 \cdot \eta\mu(\pi \cdot 0/30) = 8 + 6 \cdot \eta\mu 0 = 8 + 0 = 8$

και προφανώς την ίδια ακριβώς τιμή θα πάρουμε, μετά το πέρας μιας ολόκληρης περιόδου, δηλαδή μετά από 60 sec :

$h(0) = h(0 + 60) = h(60) = 8$

Αναλόγως σκεπτόμενοι θα είναι:

$h(30) = 8 + 6 \cdot ημ(π \cdot 30/30) = 8 + 6 \cdot ημπ = 8 + 0 = 8 = ημ(90)$

Μετά από όλα τα προηγούμενα, ολοκληρώνουμε τη συμπλήρωση του πίνακα τιμών της συνάρτησης:

t	0	15	30	45	60	75	90
h(t)	8	14	8	2	8	14	8

ii. Είμαστε πλέον σε θέση να σχεδιάζουμε και τη γραφική παράσταση: