ΘΕΜΑ 4_17840

α. Επιλύουμε το παραμετρικό σύστημα, για τις διάφορες τιμές του λ :

$$\begin{cases} -x+2y=1 \\ x+\lambda y=\lambda \end{cases}$$

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \mathbf{-\lambda-2}$$

$$\mathbf{D_x} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 2\lambda = \mathbf{-\lambda}$$

$$\mathbf{D_y} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \mathbf{-\lambda-1}$$

▶ Αν $\mathbf{D \neq 0} \Leftrightarrow -\lambda - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda \neq -2}$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την:

$$\mathbf{x_0} = \frac{D_x}{D} = \frac{-\lambda}{-\lambda-2} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{\lambda+2}}$$

$$\mathbf{y_0} = \frac{D_x}{D} = \frac{-\lambda-1}{-\lambda-2} = \frac{\boldsymbol{\lambda+1}}{\boldsymbol{\lambda+2}}$$

▶ Αν $\mathbf{D = 0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda = -2}$, τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} -x+2y=1 \\ x-2y=-2 \end{cases} \overset{(-1)\cdot}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x+2y=1 \\ x-2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-1 \\ x-2y=-2 \end{cases}$$

που είναι **αδύνατο** .

β. Για $\boldsymbol{\lambda = -1}$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} -x+2y=1 \\ x-y=-1 \end{cases} \overset{\oplus}{\Leftrightarrow} \mathbf{y = 0}$$

Για y = 0 , η δεύτερη εξίσωση γίνεται: $x - 0 = -1 \Leftrightarrow \mathbf{x = -1}$

Ζητείται τώρα γωνία θ∈[0, 2π] τέτοια, ώστε: **συνθ = −1** και **ημθ = 0 .**

Όμως, στο διάστημα [0, 2π] , υπάρχει μόνο μία γωνία ώστε συνθ = −1 , η **θ = π** . Από την άλλη, υπάρχουν τρεις γωνίες ώστε ημθ = 0 , οι **θ = 0 , π** και **2π** . Είναι, λοιπόν, προφανές ότι **θ = π** είναι η μοναδική γωνία στο [0, 2π] , που ικανοποιεί και τις δύο προϋποθέσεις.

γ. Για **λ = 1** το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} -x+2y=1 \quad \oplus \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \ 3y=2 \ \Leftrightarrow \ \mathbf{y = 2/3}$$

Για y = 2/3 , η δεύτερη εξίσωση γίνεται: $x + 2/3 = 1 \Leftrightarrow$ **x = 1/3**

Αν υπήρχει γωνία ω τέτοια, ώστε συνω = 1/3 και ημω = 2/3 , τότε θα έπρεπε οι τριγωνομετρικοί της αριθμοί να ικανοποιούν τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $ημ^2 ω + συν^2 ω = 1$. Όμως:

$$\mathbf{ημ^2 ω + συν^2 ω =} \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \mathbf{\frac{5}{9} \neq 1}$$

Όπερ έδει δείξαι.