

ΘΕΜΑ 4_17839

α. Επιλύουμε το παραμετρικό σύστημα, για τις διάφορες τιμές του α :

$$\begin{cases} (\alpha - 1)x + 3y = 3 \\ x + (\alpha + 1)y = 3 \end{cases}$$

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} \alpha - 1 & 3 \\ 1 & \alpha + 1 \end{vmatrix} = (\alpha - 1) \cdot (\alpha + 1) - 1 \cdot 3 = \alpha^2 - 4 = (\alpha - 2)(\alpha + 2)$$

$$\mathbf{D}_x = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & \alpha + 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (\alpha + 1) - 3 \cdot 3 = 3\alpha + 3 - 9 = 3\alpha - 6 = 3(\alpha - 2)$$

$$\mathbf{D}_y = \begin{vmatrix} \alpha - 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (\alpha - 1) \cdot 3 - 1 \cdot 3 = 3\alpha - 3 - 3 = 3\alpha - 6 = 3(\alpha - 2)$$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση για $\mathbf{D} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow (\alpha - 2)(\alpha + 2) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 2$
και $\alpha \neq -2$. Στην περίπτωση αυτή, η μοναδική λύση θα είναι:

$$\mathbf{x}_0 = \frac{\mathbf{D}_x}{\mathbf{D}} = \frac{3(\alpha - 2)}{(\alpha - 2)(\alpha + 2)} = \frac{\mathbf{3}}{\alpha + 2}$$

$$\mathbf{y}_0 = \frac{\mathbf{D}_y}{\mathbf{D}} = \frac{3(\alpha - 2)}{(\alpha - 2)(\alpha + 2)} = \frac{\mathbf{3}}{\alpha + 2}$$

Είναι προφανές ότι $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0$.

β. Αν $\mathbf{D} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha = 2$ ή $\alpha = -2$ τότε...

i. Για $\alpha = 2$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} (2 - 1)x + 3y = 3 \\ x + (2 + 1)y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 3 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$$

που είναι **αόριστο**. Επειδή $x + 3y = 3 \Leftrightarrow x = 3 - 3y$, η μορφή των άπειρων λύσεων θα είναι: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{3} - \mathbf{3}\mathbf{k}, \mathbf{k})$.

ii. Για $\alpha = -2$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} (-2-1)x + 3y = 3 \\ x + (-2+1)y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 3y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 3y = 3 \\ -3x + 3y = -9 \end{cases}$$

που είναι **αδύνατο**.

γ. Στην περίπτωση που $\alpha = 3$, επειδή $3 \neq 2, -2$, θα είναι $D \neq 0$. Συνεπώς, θα έχουμε μοναδική λύση και προφανώς οι ευθείες θα **τέμνονται** στο σημείο, με συντεταγμένες τη λύση του συστήματος.

Στην περίπτωση που $\alpha = 2$, δείξαμε ότι το σύστημα που προκύπτει είναι αόριστο, συνεπώς οι δύο ευθείες θα **ταυτίζονται**.

Στην περίπτωση που $\alpha = -2$, δείξαμε ότι το σύστημα που προκύπτει είναι αδύνατο, συνεπώς οι δύο ευθείες θα είναι **παράλληλες**.