ΘΕΜΑ 4_17838

α. Γνωρίζουμε ότι: $συν2ω = 2 \cdot συν^2 ω - 1$. Άρα, η δοθείσα σχέση γίνεται:

$5συν2ω + 28συνω + 21 = 0 \Leftrightarrow$

$5(2συν^2 ω - 1) + 28συνω + 21 = 0 \Leftrightarrow$

$10συν^2 ω - 5 + 28συνω + 21 = 0 \Leftrightarrow$

$10συν^2 ω + 28συνω + 16 = 0 \Leftrightarrow$ (απλοποιούμε με το 2)

$5συν^2 ω + 14συνω + 8 = 0$

$\mathbf{\Delta} = 14^2 - 4 \cdot 5 \cdot 8 = 196 - 160 = \mathbf{36}$

$$συνω_{1,2} = \frac{-14 \pm 6}{10} = \begin{cases} \dfrac{-8}{10} = \dfrac{-4}{5} \\ \dfrac{-20}{10} = -2 \end{cases}$$

Εφόσον είναι $-1 \leq συνx \leq 1$, η λύση -2 απορρίπτεται, συνεπώς:

$$\mathbf{συνω = -\frac{4}{5}}$$

β. i. Από τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $ημ^2 ω + συν^2 ω = 1$, υπολογίζουμε επιπλέον το ημίτονο της γωνίας ω:

$$ημ^2 ω = 1 - συν^2 ω = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Leftrightarrow ημω = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5}$$

Εφόσον δίνεται ότι η ω ανήκει στο 2ο τεταρτημόριο ($π/2 < ω < π$) , θα έχει ημίτονο θετικό, άρα κρατάμε μόνο τη θετική λύση. Τελικά:

$$\mathbf{ημω = \frac{3}{5}}$$

Συνεπώς, από τις σχέσεις διπλάσιου τόξου, έχουμε στη συνέχεια:

$$συν2ω = 2 \cdot συν^2 ω - 1 = 2\left(-\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{32}{25} - 1 \Leftrightarrow \mathbf{συν2ω = \frac{7}{25}}$$

$$ημ2ω = 2 \cdot ημω \cdot συνω = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \Leftrightarrow \mathbf{ημ2ω = -\frac{24}{25}}$$

ii. Λαμβάνοντας υπόψη μας τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$\mathbf{ημ^2 2ω + συν^2 2ω = 1}$ και $\mathbf{εφ2ω \cdot σφ2ω = 1}$

έχουμε τελικά:

$$\mathbf{\Pi} = \frac{13\cdot[\eta\mu^2 2\omega + \sigma\upsilon\nu^2 2\omega] + 12}{18\cdot \varepsilon\varphi 2\omega \cdot \sigma\varphi 2\omega + 25\cdot[\eta\mu 2\omega + \sigma\upsilon\nu 2\omega]} =$$

$$= \frac{13\cdot 1 + 12}{18\cdot 1 + 25\cdot\left[-\frac{24}{25} + \frac{7}{25}\right]} = \frac{25}{18 + 25\cdot\left[-\frac{17}{25}\right]} = \frac{25}{18-17} = \mathbf{25}$$