ΘΕΜΑ 4_17835

α. Επιλύουμε το παραμετρικό σύστημα των δύο εξισώσεων, για τις διάφορες τιμές του λ:

$$\begin{cases} x+(\lambda+2)y=3 \\ (\lambda-2)x+5y=3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda+2 \\ \lambda-2 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot5 - (\lambda-2)\cdot(\lambda+2) = 5 - (\lambda^2-4) = 5 - \lambda^2 + 4 =$$

$$= 9 - \lambda^2 = \mathbf{(3-\lambda)(3+\lambda)}$$

$$\mathbf{D_x} = \begin{vmatrix} 3 & \lambda+2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot5 - 3\cdot(\lambda+2) = 15 - 3\lambda - 6 = 9 - 3\lambda = \mathbf{3(3-\lambda)}$$

$$\mathbf{D_y} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ \lambda-2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot3 - 3\cdot(\lambda-2) = 3 - 3\lambda + 6 = 9 - 3\lambda = \mathbf{3(3-\lambda)}$$

- Αν $\mathbf{D \neq 0} \Leftrightarrow (3-\lambda)(3+\lambda) \neq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda \neq 3}$ **και** $\boldsymbol{\lambda \neq -3}$ τότε το σύστημα έχει **μοναδική λύση** . Αυτό σημαίνει ότι, στην περίπτωση αυτή, οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) **τέμνονται** .

- Αν $\mathbf{D = 0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda = 3}$ **ή** $\boldsymbol{\lambda = -3}$ τότε…

  - Για λ = 3 το σύστημα γίνεται:

    $$\begin{cases} x+(3+2)y=3 \\ (3-2)x+5y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5y=3 \\ x+5y=3 \end{cases}$$

    που είναι **αόριστο** . Αυτό σημαίνει ότι για λ = 3 οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) **ταυτίζονται** .

  - Για λ = −3 το σύστημα γίνεται:

    $$\begin{cases} x+(-3+2)y=3 \\ (-3-2)x+5y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=3 \quad \cdot(-5) \\ -5x+5y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x+5y=-15 \\ -5x+5y=3 \end{cases}$$

    που είναι **αδύνατο** . Αυτό σημαίνει ότι για λ = −3 οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι **παράλληλες** .

β. Στην περίπτωση που $D \neq 0$ έχουμε ως μοναδική λύση την:

$$\mathbf{x_0} = \frac{D_x}{D} = \frac{3(3-\lambda)}{(3-\lambda)(3+\lambda)} = \mathbf{\frac{3}{3+\lambda}}$$

$$\mathbf{y_0} = \frac{D_y}{D} = \frac{3(3-\lambda)}{(3-\lambda)(3+\lambda)} = \mathbf{\frac{3}{3+\lambda}}$$

Συνεπώς, οι συντεταγμένες του σημείου τομής είναι:

$$\mathbf{A\ (x_0,\ y_0) = \left(\frac{3}{3+\lambda}, \frac{3}{3+\lambda}\right)}$$

Ως παρατήρηση, θα μπορούσαμε να αναφέρουμε ότι οι συντεταγμένες του σημείου Α θα βρίσκονται, κάθε φορά, πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y = x$, δηλαδή τη διχοτόμο του 1ου - 3ου τεταρτημορίου.

γ. Προκειμένου το Α να ανήκει, επιπλέον, στην ευθεία $x + 2y = 3$, θα πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Με άλλα λόγια, θα πρέπει:

$$x_0 + 2y_0 = 3 \iff$$

$$\frac{3}{3+\lambda} + 2\frac{3}{3+\lambda} = 3 \iff$$

$$(3+\lambda)\frac{3}{3+\lambda} + 2(3+\lambda)\frac{3}{3+\lambda} = 3(3+\lambda) \iff$$

$$3 + 6 = 9 + 3\lambda \iff 3\lambda = 0 \iff \mathbf{\lambda = 0}$$