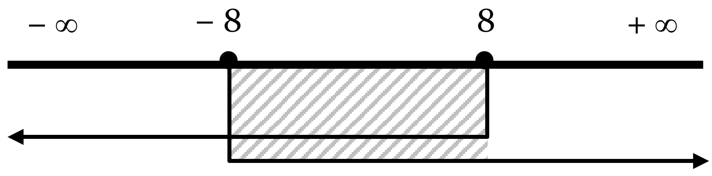
ΘΕΜΑ 4_17833

α. Πρέπει:

$$\mathbf{8 - x \geq 0} \quad \text{και} \quad \mathbf{8 + x \geq 0}$$

ισοδύναμα:

$$x \leq 8 \quad \text{και} \quad x \geq -8$$



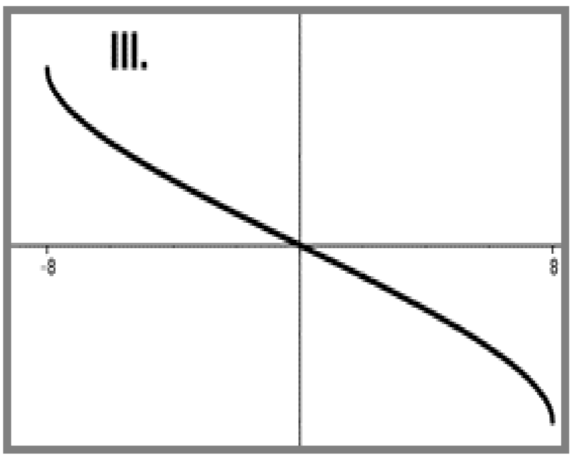
Συνεπώς, το πεδίο ορισμού είναι $\mathbf{A_f = [-8, 8]}$.

β. Εφόσον το πεδίο ορισμού είναι συμμετρικό ως προς την αρχή του άξονα των πραγματικών, άρα για κάθε $x \in A_f$ είναι και $-x \in A_f$. Επομένως, προχωρούμε στην εξέταση του $f(-x)$:

$$\mathbf{f(-x)} = \sqrt{8-(-x)} - \sqrt{8-x} = \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x} = -(\sqrt{8-x} - \sqrt{8+x}) = \mathbf{f(x)}$$

Συνεπώς, η f είναι **περιττή**.

γ. Εφόσον η f είναι περιττή, θα πρέπει να έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων (0, 0) , άρα η περίπτωση (Ι) απορρίπτεται. Όμως η f, από την υπόθεση, είναι επιπλέον γνησίως φθίνουσα. Τελικά. η σωστή γραφική παράσταση είναι η (ΙΙΙ) .



Από τα προηγούμενα, συμπεραίνουμε ότι θα παρουσιάζει τη μέγιστη τιμή της στο σημείο $x_1 = -8$, ενώ την ελάχιστη στο σημείο $x_2 = 8$. Άρα, θα είναι:

- Μέγιστη τιμή : $f(-8) = \sqrt{8-(-8)} - \sqrt{8-8} = \sqrt{16} - \sqrt{0}$ **= 4**
- Ελάχιστη τιμή : $f(8) = \sqrt{8-8} - \sqrt{8+8} = \sqrt{0} - \sqrt{16}$ **= − 4**

δ. Γραφική ερμηνεία

Η f ως περιττή έχει κεντρική συμμετρία και όχι αξονική, συνεπώς αν η γραφική της παράσταση μετατοπιστεί οριζόντια ή κατακόρυφα, αυτό δεν πρόκειται να αλλοιώσει το είδος της συμμετρίας, παρά μόνο τις συντεταγμένες του κέντρου της.

Έχοντας αυτά κατά νου, διαπιστώνουμε ότι:

- η $g(x) = f(x) - 3$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της f, κατά 3 μονάδες προς τα κάτω, ενώ…
- η $h(x) = f(x + 3)$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της f, κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά.

Συνεπώς, τόσο η g όσο και η h, παρά το γεγονός ότι θα έχουν διατηρήσει τη κεντρική τους συμμετρία, δε θα είναι πλέον περιττές καθώς, σύμφωνα με τον ορισμό, δε θα έχουν ως κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

Φυσικά, δε θα είναι ούτε άρτιες, αφού το είδος της συμμετρίας δεν επηρεάστηκε στο παραμικρό.

Αλγεβρική ερμηνεία

Για τη συνάρτηση g έχουμε:

- Ίδιο πεδίο ορισμού
- $\mathbf{g(-x)} = \sqrt{8-(-x)} - \sqrt{8-x} - 3 = \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x} - 3 =$

$$= -(\sqrt{8-x} - \sqrt{8+x}) - 3 \neq -\,\mathbf{g(x)} \text{ ή } \mathbf{g(x)}$$

Επομένως, η g δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

Για τη συνάρτηση h έχουμε:

$h(x) = f(x + 3) = \sqrt{8-(x+3)} - \sqrt{8+x+3} = \sqrt{5-x} - \sqrt{x+11}$

Όμως, το πεδίο ορισμού της h είναι:

$$5 - x \geq 0 \;\text{ και }\; x + 11 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5 \;\text{ και }\; x \geq -11 \Leftrightarrow -11 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{A_h = [-11,\ 5]}$$

Για το τελευταίο όμως δεν ισχύει η προϋπόθεση, για κάθε $x \in [-11, 5]$ να είναι και $-x \in [-11, 5]$. Για παράδειγμα, το x μπορεί να πάρει την τιμή -9 , αλλά όχι την τιμή 9 , αφού η τελευταία δεν ανήκει στο A_h .

Συνεπώς, η h δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.