ΘΕΜΑ 2_19911

α. Γνωρίζουμε για το ημίτονο αθροίσματος ότι:

$$ημ(α + β) = ημα·συνβ + συνα·ημβ$$

Εφαρμόζοντας το ίδιο, στη ζητούμενη σχέση, έχουμε:

$$\mathbf{ημ(x + \frac{π}{3})} = ημx·συν\frac{π}{3} + συνx·ημ\frac{π}{3} =$$

$$= ημx·\frac{1}{2} + συνx·\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}·συνx + \frac{1}{2}·ημx}$$

β. Δεδομένου του ερωτήματος (α) , η εξίσωση:

$$\frac{1}{2}ημx + \frac{\sqrt{3}}{2}συνx = 0$$

γίνεται ισοδύναμα:

$$ημ(x + \frac{π}{3}) = 0 \Leftrightarrow ημ(x + \frac{π}{3}) = ημ0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{π}{3} = 2κπ + 0 \\ x + \frac{π}{3} = 2κπ + π - 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{π}{3} = 2κπ \\ x + \frac{π}{3} = 2κπ + π \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2κπ - \frac{π}{3} \\ x = 2κπ + π - \frac{π}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2κπ - \frac{π}{3} \\ x = 2κπ + \frac{2π}{3} \end{cases} \quad (κ\in\mathbb{Z})$$

Εφόσον ζητούμε τις λύσεις που ανήκουν στο διάστημα (0, π) , έχουμε:

Για την 1η λύση:

$x\in(0, π) \Leftrightarrow 0 < x < π \Leftrightarrow 0 < 2κπ - \frac{π}{3} < π \Leftrightarrow$

$0 + \frac{π}{3} < 2κπ - \frac{π}{3} + \frac{π}{3} < π + \frac{π}{3} \Leftrightarrow$ (προσθέτουμε $\frac{π}{3}$ σε όλα τα μέλη)

$\frac{π}{3} < 2κπ < \frac{4π}{3} \Leftrightarrow$ (απλοποιούμε το π, από όλα τα μέλη)

$\frac{1}{3} < 2κ < \frac{4}{3} \Leftrightarrow$ (διαιρούμε όλα τα μέλη με 2)

$\frac{1}{6} < κ < \frac{2}{3}$

Επειδή όμως $\kappa \in \mathbb{Z}$, η παραπάνω ανίσωση είναι αδύνατη. Συνεπώς, η πρώτη σχέση δε μας δίνει λύσεις, στο διάστημα $(0, \pi)$.

Για τη 2η λύση:

$x \in (0, \pi) \Leftrightarrow 0 < x < \pi \Leftrightarrow 0 < 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} < \pi \Leftrightarrow$

$0 - \frac{2\pi}{3} < 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} < \pi - \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$

$-\frac{2\pi}{3} < 2\kappa\pi < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$-\frac{2}{3} < 2\kappa < \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{3} < \kappa < \frac{1}{6}$

Όμως $\kappa \in \mathbb{Z}$, άρα η ανίσωση έχει μοναδική, ακέραια λύση για $\kappa = 0$. Συνεπώς, από τη δεύτερη σχέση και για $\kappa = 0$, παίρνουμε τη λύση:

$$x = 2 \cdot 0 \cdot \pi + \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \mathbf{x = \frac{2\pi}{3}}$$