ΘΕΜΑ 2_18637

α. Με απλή αντικατάσταση, των συντεταγμένων της λύσης, στη 2η εξίσωση την οποία χρειάζεται να επαληθεύουν, παίρνουμε τη σχέση:

$$\alpha x + \beta y = \gamma \Leftrightarrow \alpha\cdot(-1) + \beta\cdot 5 = \gamma \Leftrightarrow -\alpha + 5\beta - \gamma = 0$$

Ωστόσο, χρειάζεται ακόμη μία προϋπόθεση. Υπολογίζουμε την ορίζουσα του συστήματος και απαιτούμε να είναι διάφορη του μηδενός, ώστε η δοθείσα λύση να είναι μοναδική:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 2\cdot\beta - \alpha\cdot 1 = 2\beta - \alpha$$

Συνεπώς, για να είναι η λύση μοναδική, θα πρέπει:

$$D \neq 0 \Leftrightarrow 2\beta - \alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 2\beta$$

Τελικά, οι παράμετροι α, β, γ θα πρέπει να συνδέονται με τη σχέση:

$$\mathbf{-\alpha + 5\beta - \gamma = 0} \quad (\text{με } \boldsymbol{\alpha \neq 2\beta})$$

Θέτουμε, λοιπόν, δύο τυχαίες τιμές στις παραμέτρους α, β (με τήρηση της προϋπόθεσης $\alpha \neq 2\beta$) , έστω $\boldsymbol{\alpha = 1}$ και $\boldsymbol{\beta = 2}$, οπότε έχουμε:

$$-\alpha + 5\beta - \gamma = 0 \Leftrightarrow -1 + 5\cdot 2 - \gamma = 0 \Leftrightarrow 9 - \gamma = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma = 9}$$

Άρα, μια πιθανή τριάδα τιμών για τις παραμέτρους, ώστε το σύστημα να έχει μοναδική λύση τη ζητούμενη, είναι: $\boldsymbol{(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 2, 9)}$

β. Καταρχάς, προκειμένου το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις και σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, θα πρέπει $D = 0$ ή, τελικά, $\boldsymbol{\alpha = 2\beta}$ (1) .

Θα πρέπει όμως, επιπλέον, να είναι και τα D_x , D_y ίσα με μηδέν.

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ \gamma & \beta \end{vmatrix} = 3\cdot\beta - \gamma\cdot 1 = 3\beta - \gamma$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix} = 2\cdot\gamma - \alpha\cdot 3 = 2\gamma - 3\alpha$$

Οπότε:

$$D_x = 0 \Leftrightarrow 3\beta - \gamma = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma = 3\beta}$$

και

$$D_y = 0 \Leftrightarrow 2\gamma - 3\alpha = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma = \frac{3}{2}\alpha}$$

Τα οποία όμως, τελικά, είναι ισοδύναμα, αφού λόγω (1) είναι $\alpha = 2\beta$!

Λαμβάνοντας τα προηγούμενα, κάθε τριάδα της παρακάτω μορφής οδηγεί σε αόριστο σύστημα:

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (2\beta, \beta, 3\beta)$$

Θέτουμε, λοιπόν, μια τυχαία τιμή στην παράμετρο β, έστω **β = 2** , οπότε έχουμε:

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (4, 2, 6)$$

Στην περίπτωση αυτή, λοιπόν, το αρχικό μας σύστημα θα έχει τη μορφή:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 & (1) \\ 4x + 2y = 6 & (2) \end{cases}$$

Αλγεβρικά, παρατηρούμε ήδη ότι οι (1) και (2) ταυτίζονται, καθώς η δεύτερη είναι η πρώτη, πολλαπλασιασμένη με 2 . Προχωρούμε, τώρα, στη γραφική επαλήθευση:

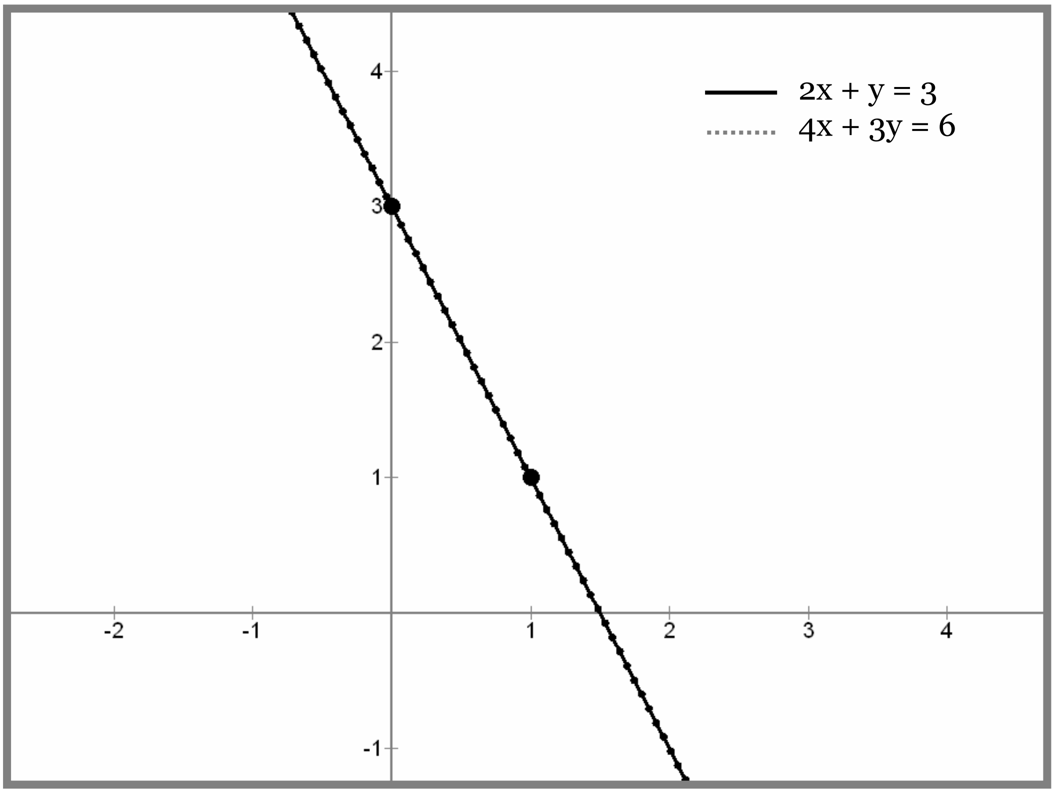
(1)

x	0	1
y	3	1

(2)

x	0	1
y	3	1

Παρατηρούμε ότι, για τις ίδιες τιμές του x, οι δύο εξισώσεις παράγουν τα ίδια ζεύγη συντεταγμένων, δηλαδή τα ίδια ακριβώς σημεία. Όμως, από δύο σημεία του επιπέδου διέρχεται μοναδική ευθεία.



Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να τοποθετήσουμε στη μεταβλητή x εντελώς διαφορετικές τιμές, σε κάθε πίνακα:

(1)

x	0	1
y	3	1

(2)

x	− 1	2
y	5	− 1