## ΘΕΜΑ 2_18637

**α.** Με απλή αντικατάσταση, των συντεταγμένων της λύσης, στη 2η εξίσωση την οποία χρειάζεται να επαληθεύουν, παίρνουμε τη σχέση:

$$\alpha x + \beta y = \gamma \Leftrightarrow 1\alpha - 4\beta = \gamma \Leftrightarrow \alpha - 4\beta - \gamma = 0$$

Ωστόσο, χρειάζεται ακόμη μία προϋπόθεση. Υπολογίζουμε την ορίζουσα του συστήματος και απαιτούμε να είναι διάφορη του μηδενός, ώστε η δοθείσα λύση να είναι μοναδική:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 1\cdot\beta - \alpha\cdot(-2) = \beta + 2\alpha$$

Συνεπώς, για να είναι η λύση μοναδική, θα πρέπει:

$$D \neq 0 \Leftrightarrow \beta + 2\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \beta \neq -2\alpha$$

Τελικά, οι παράμετροι α, β, γ θα πρέπει να συνδέονται με τη σχέση:

$$\boldsymbol{\alpha - 4\beta - \gamma = 0} \quad (\text{με } \boldsymbol{\beta \neq -2\alpha})$$

Θέτουμε, λοιπόν, δύο τυχαίες τιμές στις παραμέτρους α, β (με τήρηση της προϋπόθεσης $\beta \neq -2\alpha$) , έστω $\boldsymbol{\alpha = 2}$ και $\boldsymbol{\beta = 1}$ , οπότε έχουμε:

$$\alpha - 4\beta - \gamma = 0 \Leftrightarrow 2 - 4\cdot 1 - \gamma = 0 \Leftrightarrow -2 - \gamma = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma = 2}$$

Άρα, μια πιθανή τριάδα τιμών για τις παραμέτρους, ώστε το σύστημα να έχει μοναδική λύση τη ζητούμενη, είναι: $\boldsymbol{(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 1, 2)}$

**β.** Καταρχάς, προκειμένου το σύστημα να είναι αδύνατο και σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, θα πρέπει $D = 0$ ή, τελικά, $\boldsymbol{\beta = -2\alpha}$ (1) .

Θα πρέπει όμως, επίσης, ένα από τα $D_x$ , $D_y$ να είναι διάφορο του μηδενός.

$$D_x = \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ \gamma & \beta \end{vmatrix} = 9\cdot\beta - \gamma\cdot(-2) = 9\beta + 2\gamma$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix} = 1\cdot\gamma - \alpha\cdot 9 = \gamma - 9\alpha$$

Οπότε:

$$D_x \neq 0 \Leftrightarrow 9\beta + 2\gamma \neq 0 \Leftrightarrow 2\gamma \neq -9\beta \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma \neq -\frac{9}{2}\beta}$$

ή

$$D_y \neq 0 \Leftrightarrow \gamma - 9\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma \neq 9\alpha}$$

Τα οποία όμως, τελικά, είναι ισοδύναμα, αφού λόγω (1) είναι $\beta = -2\alpha$!

Θέτουμε, λοιπόν, μια τυχαία τιμή στην παράμετρο α, έστω **α = 2** , οπότε από (1) έχουμε:

$$\beta = -2\alpha \Leftrightarrow \beta = -2\cdot 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta = -4}$$

Σύμφωνα, λοιπόν, με τα προηγούμενα και προκειμένου το σύστημα να είναι αδύνατο, θα πρέπει:

$\gamma \neq 9\alpha \Leftrightarrow \gamma \neq 9\cdot 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma \neq 18}$

Άρα, μια πιθανή τριάδα τιμών για τις παραμέτρους, ώστε το σύστημα να είναι αδύνατο, είναι: **(α, β, γ) = (2, −4, 10)**

Στην περίπτωση αυτή, τελικά το αρχικό μας σύστημα θα έχει τη μορφή:

$$\begin{cases} x - 2y = 9 & (1) \\ 2x - 4y = 10 & (2) \end{cases}$$

Το τελευταίο, γραφικά θα έχει ως εξής:

(1)

| **x** | 0 | 9 |
|---|---|---|
| **y** | − 9/2 | 0 |

(2)

| **x** | 0 | 5 |
|---|---|---|
| **y** | − 5/2 | 0 |